Metodi Matematici e Statistici 2005/2006

C.d.L. in Ing. Gestionale

I prova in intinere – 15/4/2005

Esercizio 1. I produttori di un certo tipo di tessuto dovrebbero utilizzare la sostanza chimica A, più costosa ma meno pericolosa, invece che la B, più economica ma più dannosa per gli operai. L'utilizzo di B provoca una certa malattia mediamente in un operaio su 100; invece l'utilizzo di A la provoca, in media, solo in un operaio su 10000.

i) In una certa area ci sono molti produttori tessili e si ritiene che essi usino A o B con uguale probabilità. Che probabilità c'è che un operaio preso a caso in quell'area sia affetto da quella malattia?

ii) Un operaio affetto da quella malattia denuncia la propria azienda, ma non è possibile scoprire se essa utilizzava A o B. Che probabilità c'è che usasse B?

iii) Se un gruppo di aziende, che complessivamente impiegano 500 operai, utilizza B, che probabilità c'è che tra essi il numero di ammalati sia strettamente inferiore a due?

iv) Supponiamo che, nel caso dell'uso della sostanza B, la quantità di sostanza nociva che si accumula nel sangue sia una variabile aleatoria esponenziale di parametro uno e che la malattia insorga se questa sostanza supera una certa soglia θ. Calcolare il valore di θ.

Esercizio 2. Si consideri una v.a. continua X con densità:

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Rispondere alle seguenti domande:

i) Calcolare valor medio e varianza di X,

ii) Calcolare $E[(X+5)(X+1)]$

Sia $W = X^3$.

iii) Calcolare $P(W \leq 1/8)$.

iv) Determinare la densità di probabilità f_W di W.

Sia Y una v.a. discreta che prende valori $-1, 1$ con uguale probabilità e indipendente da X.

v) Calcolare $P(X \leq Y/2)$.

Sol. Esercizio 1. Denotiamo con M l'eventualità che un operaio sia malato, con A il fatto che l'azienda usi il prodotto A e con B il fatto che l'azienda usi il prodotto B. Abbiamo che $P(M|A) = 0.0001$, $P(M|B) = 0.01$, $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$. Quindi

i) Applicando la formula di fattorizzazione:

$$P(M) = P(M|A)P(A) + P(M|B)P(B) = 0.00001 \cdot 0.5 + 0.001 \cdot 0.5 = 0.00505.$$

ii) Applicando la formula di Bayes:

$$P(B|M) = \frac{P(M|B)P(B)}{P(M)} = \frac{0.01 \cdot 0.5}{0.00505} \approx 0.9901$$

iii) La v.a. N è distribuita come una Binomiale di parametri $n = 500$ e $p = 0.01$, quindi la probabilità cercata è:

$$P(N < 2) = P(N = 0) + P(N = 1) = 0.99^{500} + 500 \cdot 0.01 \cdot 0.99^{499} \approx 0.03975$$

Si può anche procedere utilizzando l'approssimazione di Poisson: $N \simeq \mathrm{P}(\lambda)$ con $\lambda = 5$.

iv) Consideriamo la v.a. $Q \sim \mathrm{Exp}(1)$, dobbiamo determinare il valore di θ tale che $P(Q > \theta) = 0.01$, quindi

$$0.01 = P(Q > \theta) = e^{-\theta}$$

implica

$$\theta = -\log(0.01) \approx 4.6052.$$

Sol. Esercizio 2. i) Calcoliamo il valor medio:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int x f(x) dx = \int_{-1}^{1} x|x| dx \\
&= \int_{-1}^{0} x|x| dx + \int_{0}^{1} x|x| dx \\
&= -\int_{-1}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = 0
\end{aligned}$$

Calcoliamo la varianza di X usando la formula $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$:

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \int x^2 f(x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 |x| dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2 |x| dx + \int_{0}^{1} x^2 |x| dx \\
&= -\int_{-1}^{0} x^3 dx + \int_{0}^{1} x^3 dx \\
&= -\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=0} + \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{Var}[X] = 1/2$.

ii)

$$E[(X+5)(X+1)] = E[X^2+6X+5] = E[X^2]+6E[X]+5 = \frac{1}{2}+5 = \frac{11}{2}$$

iii)

$$\begin{aligned}
P(W \leq 1/8) &= P(X^3 \leq 1/8) = P(X \leq 1/2) \\
&= \int_{-1}^{1/2} f(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} |x|dx + \int_{0}^{1/2} |x|dx \\
&= -\int_{-1}^{0} xdx + \int_{0}^{1} xdx \\
&= -\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=-1}^{x=0} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

iv) Per calcolare la f_W si può procedere come segue. Si osserva che

$$F_W(t) = P(W \leq t) = P(X^3 \leq t) = P(X \leq t^{1/3}) = F_X(t^{1/3})$$

La relazione tra f_W e F_W è data da:

$$f_W(t) = \frac{d}{dt}F_W(t)$$

quindi

$$f_W(t) = \frac{d}{dt}F_W(t) = \frac{d}{dt}F_X(t^{1/3})$$

Calcolare la derivata della funzione composta richiede un po' di cura:

$$\frac{d}{dt}F_X(t^{1/3}) = F'_X(t^{1/3}) \cdot \frac{d(t^{1/3})}{dt}$$

dove abbiamo indicato con F'_X la derivata di F_X. Osservando che $F'_X(s) = f_X(s) = f(s)$ e che

$$\frac{d(t^{1/3})}{dt} = \frac{1}{3}t^{-2/3}$$

si ha che (per $t \neq \pm 1$)

$$f_W(t) = \frac{d}{dt}F_X(t^{1/3}) = \frac{1}{3}f(t^{1/3})t^{-2/3}$$

quindi

$$f_W(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}|t^{1/3}|t^{-2/3} & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ovvero, semplificando un po',

$$f_W(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}|t|^{-1/3} & \text{se } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NOTA: Si ricordi che $t^{1/3}$ è definito anche per t negativi e che

$$|t^{1/3}|t^{-2/3} = |t|^{1/3}(t^{-2})^{1/3} = (|t|t^{-2})^{1/3} = (|t|^{-1})^{1/3} = |t|^{-1/3}.$$

iv) Per calcolare $P(X \leq Y/2)$ usiamo la formula di fattorizzazione:

$$P(X \leq Y/2) = P(X \leq Y/2|Y = -1)P(Y = -1) + P(X \leq Y/2|Y = +1)P(Y = +1) \tag{1}$$

dato che i casi possibili sono solo due. Ora

$$P(X \leq Y/2|Y = -1) = P(X \leq -1/2|Y = -1) = P(X \leq -1/2)$$

poichè X è indipendente da Y. Allo stesso modo

$$P(X \leq Y/2|Y = +1) = P(X \leq 1/2|Y = +1) = P(X \leq 1/2)$$

Dobbiamo quindi calcolare $P(X \leq -1/2)$:

$$\begin{aligned} P(X \leq -1/2) &= \int_{-1}^{-1/2} f(x)dx \\ &= \int_{-1}^{-1/2} |x|dx = -\int_{-1}^{-1/2} xdx \\ &= -\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=-1}^{x=-1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

quindi mettendo tutto assieme si ottiene:

$$\begin{aligned} P(X \leq Y/2) &= P(X \leq -1/2)P(Y = -1) + P(X \leq 1/2)P(Y = +1) \\ &= \frac{3}{8}\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2}$$