COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Seminario Fisico–Matematico – I anno

Note basate sugli appunti dei corsi tenuti da:
F. Ricci, A. Mennucci e T. Pacini negli anni A.A. dal 2009 al 2013,
L. Ambrosio e C. Mantegazza nell'A.A. 2013–14,
L. Ambrosio e L. Mazzieri nell'A.A. 2014–15,

F. Ricci e A. Mennucci nell'A.A. 2016–17.

Indice

CAPITOLO 1

ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

1. Connettivi logici e notazioni di base

Anche se le note del corso sono scritte in un linguaggio semi–formalizzato, sarà a volte utile esprimere alcuni enunciati e alcune nozioni in termini più formali, usando:

- gli operatori di congiunzione $\wedge$ ("e") e disgiunzione $\vee$ ("o");
- i quantificatori $\exists$ ("esiste") e $\forall$ ("per ogni");
- i simboli di implicazione $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Longleftrightarrow$;
- il simbolo di negazione $\neg$ ("non").

Ricordiamo anche le regole fondamentali per l'uso dell'operatore di negazione: $\neg(\neg P)$ equivale a P, $\neg(P \wedge Q)$ equivale a $(\neg P) \vee (\neg Q)$, $\neg(P \vee Q)$ equivale a $(\neg P) \wedge (\neg Q)$, $\neg(\forall x P(x))$ equivale a $\exists x \neg P(x)$, $\neg(\exists x P(x))$ equivale a $\forall x \neg P(x)$.
La lista dei simboli è in realtà ridondante, perché $P \Leftarrow Q$ potrebbe essere sostituito da $Q \Rightarrow P$ e $P \Longleftrightarrow Q$ potrebbe essere sostituito da $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$, riducendo così tutto all'operatore $\Rightarrow$. Ma, persino $P \Rightarrow Q$ può essere sostituito da $(\neg P) \vee Q$. Informalmente, l'implicazione $P \Rightarrow Q$ è da intendersi falsa quando P è vera e Q è falsa, è da intendersi vera in tutti gli altri 3 casi. Questo è coerente con lo schema della "dimostrazione per assurdo", con la quale si mostra l'implicazione $P \Rightarrow Q$ mostrando in realtà che $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$: si ha infatti

$$(\neg(\neg Q)) \vee (\neg P) \quad \text{equivale a} \quad Q \vee (\neg P) \quad \text{che a sua volta equivale a} \quad (\neg P) \vee Q$$

per la regola che $\neg(\neg Q)$ corrisponde a Q e per la "commutatività" di $\vee$. Con ragionamenti simili, potremmo usare le regole di negazione per fare a meno dei simboli $\forall$ e $\wedge$, usando $\exists$, $\vee$ e ovviamente $\neg$.
Questa ridondanza nella scelta dei simboli, tuttavia, aiuta a generare formule non troppo lunghe, come presto si vedrà. Per lo stesso motivo e per guadagnare in leggibilità, useremo a volte anche "e" per $\wedge$ e "o" per $\vee$.

Per non appesantire troppo questa trattazione, che vuole restare elementare, useremo anche senza renderle esplicite tutte le regole fondamentali di deduzione, come ad esempio la deduzione di $P \Rightarrow R$ dalla combinazione di $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$ o la commutatività di $\wedge$ e $\vee$, che abbiamo già menzionato.

Ci limitiamo anche a dare per note le nozioni e operazioni fondamentali della teoria degli insiemi elencate di seguito, con l'avvertimento che l'esistenza di certi insiemi (come l'insieme vuoto) e la liceità di operazioni (come unione, intersezione ecc.) sono parte degli *assiomi* fondamentali della teoria degli insiemi, detta *teoria di Zermelo-Fraenkel*[1], o teoria ZF:

- la nozione di appartenenza di un elemento[2] a un insieme ($x \in A$) e la sua negazione $x \notin A$, i.e. $\neg(x \in A)$,

[1] Una breve presentazione degli assiomi di Zermelo-Fraenkel è comunque inserita come appendice a questo Capitolo.

[2] Nella teoria formale gli elementi di un insieme sono sempre insiemi a loro volta. Si veda l'Appendice.

- la nozione di *insieme vuoto*, indicato con $\emptyset$, i.e. l'insieme A che soddisfa $\forall x(x \notin A)$. Si noti che l'insieme vuoto è unico grazie al cosiddetto *assioma di estensionalità*:
$$A = B \text{ se e solo se vale } \qquad \forall x((x \in A) \Longleftrightarrow (x \in B)),$$
- la nozione di inclusione di un insieme in un altro ($A \subseteq B$), in formule
$$A \subseteq B \text{ se e solo se vale } \qquad \forall x((x \in A) \Longrightarrow (x \in B))$$
(useremo anche la notazione $A \subset B$ per $(A \subseteq B) \wedge \neg(A = B)$),
- le operazioni di unione ($A \cup B$) e intersezione ($A \cap B$), le proprietà commutativa e associativa di ciascuna di esse, la proprietà distributiva dell'una rispetto all'altra,
- le nozioni di differenza insiemistica ($A \setminus B$, $B \setminus A$) e differenza simmetrica ($A \triangle B$) di due insiemi,
- la nozione di complementare $X \setminus A$ di un insieme A rispetto a un insieme ambiente X dato, e a volte sottinteso (A^c),[3]
- l'insieme potenza (o insieme delle parti) $\mathscr{P}(X)$ di un dato insieme X:
$$\mathscr{P}(X) := \big\{A : \ A \subseteq X\big\},$$
- le formule di De Morgan:
$$\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \ , \qquad \Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \ .$$

Descriveremo un insieme elencando i suoi elementi, ad esempio con la notazione $A = \{a, b, c, d\}$, o (specialmente per insiemi potenzialmente infiniti) attraverso la validità di una formula
$$A = \big\{x \in B : \ P(x)\big\}.$$
Informalmente, A è il sottoinsieme di B costituito dagli elementi x tali che vale $P(x)$.

A titolo di esempio, descriviamo in formule gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$:
$$\forall x\big[x \in (A \cup B) \Longleftrightarrow \big((x \in A) \vee (x \in B)\big)\big], \qquad \forall x\big[x \in (A \cap B) \Longleftrightarrow \big((x \in A) \wedge (x \in B)\big)\big].$$
Analogamente l'insieme $A \setminus B = A \cap B^c$ è descritto dalla formula
$$\forall x\big[x \in (A \setminus B) \Longleftrightarrow \big((x \in A) \wedge (x \notin B)\big)\big]$$
e $A \triangle B$ si può intendere come una abbreviazione per $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Infine, anche se gli insiemi

- $\mathbb{N}$ dei numeri naturali $\big\{0, 1, 2, 3, \ldots, \big\}$ e $\mathbb{N}^*$ dei numeri naturali positivi $\{1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{Z}$ dei numeri interi $\big\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$,
- $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali $\big\{p/q : p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}^*\big\}$

verranno "costruiti" e caratterizzati assiomaticamente nell'ambito della teoria, presupponiamo già una certa familiarità con essi, per poter dare sin da subito esempi naturali di funzioni, relazioni, etc.

[3]Come vedremo, c'è spesso bisogno di un insieme ambiente, visto che la considerazione dell'insieme di tutti gli insiemi porta a paradossi. Per questa ragione useremo la notazione A^c solo quando l'insieme ambiente è chiaro dal contesto.

2. Prodotto cartesiano di due insiemi

Siano a, b due elementi, non necessariamente distinti tra loro. Quando si parla di *coppia ordinata* (a,b) si vuole specificare la posizione dei due termini nella coppia, e cioè che essa consiste di un *primo termine* a e di un *secondo termine* b. Per questo motivo, la coppia (a,b) è un'entità del tutto diversa dall'insieme $\{a,b\}$.
Due coppie (a,b) e (a',b') sono uguali se e solo se sono uguali a due a due i termini corrispondenti. In formule:

$$(a,b)=(a',b') \Longleftrightarrow a=a' \text{ e } b=b' \ .$$

In particolare, $(a,b)\neq(b,a)$ se $a\neq b$.
Per poter accogliere una simile definizione nella teoria degli insiemi, una coppia va definita come un opportuno insieme. La definizione più comunemente adottata è la seguente:

$$(a,b)=\big\{\{a\},\{a,b\}\big\} \ .$$

È un semplice esercizio verificare che effettivamente

$$\big\{\{a\},\{a,b\}\big\}=\big\{\{a'\},\{a',b'\}\big\} \iff a=a' \text{ e } b=b' \ .$$

Siano ora A e B due insiemi. Si chiama *prodotto cartesiano* di A e B l'insieme $A\times B$ delle coppie ordinate (a,b), al variare di a in A e di b in B:

$$A\times B=\big\{(a,b): a\in A\ ,\ b\in B\big\} \ .$$

Convenzionalmente, si pone $\emptyset\times B=\emptyset$ e $A\times\emptyset=\emptyset$. Si osservi che, tranne che nel caso $A=B\neq\emptyset$,

$$A\times B\neq B\times A \ .$$

Il prodotto cartesiano $A\times A$ di un insieme A con se stesso si indica anche con A^2. Si chiama *diagonale* di A^2 l'insieme

$$\operatorname{diag}(A^2)=\big\{(a,a): a\in A\big\} \ .$$

3. Relazioni

Si chiama *relazione* tra elementi di un insieme A ed elementi di un insieme B un qualunque sottoinsieme $\mathcal{R}$ del prodotto cartesiano $A\times B$.
Se la coppia $(a,b)\in A\times B$ appartiene a $\mathcal{R}$, si dice che *a è in relazione con b*; si usa la notazione[4] $a\mathcal{R}b$.
Si indica con $\mathcal{R}^{-1}$ la *relazione inversa* tra elementi di B ed elementi di A

$$\mathcal{R}^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in\mathcal{R}\}\subseteq B\times A \ .$$

Dati $A'\subseteq A$, $B'\subseteq B$, la *restrizione di $\mathcal{R}$ a $A'\times B'$* è la relazione tra A' e B'

$$\mathcal{R}|_{A'\times B'}=\big\{(a,b): a\in A'\,,\, b\in B'\big\}=\mathcal{R}\cap(A'\times B') \ .$$

Esempi.

(1) Con $A=\{1,2,\dots,100\}$ e $B=\{1,2,\dots,200\}$, poniamo la relazione

$$a\mathcal{R}b \iff MCD(a,b)>1 \ .$$

Una scrittura equivalente è

$$\mathcal{R}=\big\{(a,b)\in A\times B:\ MCD(a,b)>1\big\} \ .$$

[4] Invece di lettere, come $\mathcal{R}$, è anche comune usare simboli come $\sim$, $\leq$, ecc., secondo i casi (v. seguito).

(2) Con $A = B = \mathbb{N}$ (come ricordato prima, $\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali), l'insieme
$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : \ m \leq n\}$$
fornisce la relazione $\leq$.

4. Relazioni di equivalenza

Una relazione $\mathcal{R}$ tra elementi di uno stesso insieme A si dice una *relazione di equivalenza su* A se soddisfa le seguenti proprietà per qualsiasi scelta di a, b, c in A:

- *riflessiva*: $a\mathcal{R}a$;
- *simmetrica*: $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$;
- *transitiva*: $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Simboli comunemente usati per relazioni di equivalenza sono: $\sim$, $\simeq$, $\approx$ e simili.
Sia dunque $\sim$ una relazione di equivalenza. Fissato $a \in A$, si chiama *classe di equivalenza di* a *modulo* $\sim$ l'insieme
$$C_a = \{b \in A : b \sim a\} \ .$$

LEMMA 1.1. *Se $a \sim a'$, allora $C_a = C_{a'}$. Se $a \not\sim a'$, allora $C_a \cap C_{a'} = \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $a \sim a'$ e $b \in C_a$. Allora $b \sim a$ e per la proprietà transitiva $b \sim a'$. Dunque $b \in C_{a'}$. Questo prova che $C_a \subseteq C_{a'}$. Allo stesso modo si dimostra che $C_{a'} \subseteq C_a$. Dalla doppia inclusione segue che $C_a = C_{a'}$.
Dimostriamo ora che
$$C_a \cap C_{a'} \neq \emptyset \Longrightarrow a \sim a' \ . \tag{4.1}$$
Infatti, sia $b \in C_a \cap C_{a'}$. Allora $b \sim a$ e $b \sim a'$. Per le proprietà simmetrica e transitiva, $a \sim a'$. Vale allora la contronominale della implicazione (4.1), cioè
$$a \not\sim a' \Longrightarrow C_a \cap C_{a'} = \emptyset\,.$$
□

Si chiama *partizione* di A una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di A che siano a due a due disgiunti e la cui unione sia tutto l'insieme A.

TEOREMA 1.2 (**Classi di equivalenza e partizioni**). *Data una relazione di equivalenza $\sim$ in A, le classi di equivalenza modulo $\sim$ costituiscono una partizione di A. Viceversa, data una partizione di A, esiste un'unica relazione di equivalenza le cui classi di equivalenza siano gli elementi della partizione stessa.*

DIMOSTRAZIONE. Il Lemma 1.1 dimostra che le classi di equivalenza distinte modulo $\sim$ sono disgiunte. Inoltre, ogni $a \in A$ appartiene alla classe C_a per la proprietà riflessiva. Quindi l'unione delle classi distinte è tutto A.
Per il viceversa, sia $\{A_i : \ i \in I\}$ una partizione di A, cioè con $\bigcup_{i\in I} A_i = A$, $A_i \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$, e $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ se $i \neq i'$. Si verifica facilmente che la relazione
$$x\mathcal{R}y \iff \exists\, i \in I \text{ tale che } x,\, y \in A_i$$
è di equivalenza e che le sue classi di equivalenza sono gli A_i. □

L'insieme delle classi di equivalenza si chiama *insieme quoziente* di A modulo $\sim$ ed è indicato con la notazione $A/{\sim}$. In formule,

$$A/{\sim} = \{C_a : a \in A\}.$$

Ad esempio, dato $n \in \mathbb{N}^*$, possiamo introdurre la relazione di equivalenza $\sim_n$ in $\mathbb{Z}$ richiedendo che $p \sim_n q$ se $p - q$ è un multiplo intero (relativo) di n. Le classi di equivalenza (*le cosiddette classi di resto modulo* n) sono in questo caso n e possono essere indicizzate proprio dagli n valori possibili, $0, 1, \ldots, n-1$, del resto nella divisione per n. In questo caso, quindi, l'insieme quoziente ha n elementi.

5. Relazioni d'ordine

Una relazione $\mathcal{R}$ tra elementi di uno stesso insieme A si chiama una *relazione d'ordine*, o un *ordinamento*, su A se valgono le seguenti proprietà per qualsiasi scelta di a, b, c in A:

- *riflessiva*: $a\mathcal{R}a$;
- *antisimmetrica*: $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$;
- *transitiva*: $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Simboli comunemente usati per relazioni d'ordine sono: $\leq$, $\preceq$ e simili. I corrispondenti simboli $<$, $\prec$, ecc. si usano allora per indicare che

$$a\mathcal{R}b \ \text{ e } \ a \neq b \ .$$

Un ordinamento si dice *totale* se inoltre vale la proprietà:

- *tricotomia*: $\forall\, a,\, b \in A,\ a\mathcal{R}b$ o $b\mathcal{R}a$.

Altrimenti si dice che l'ordinamento è parziale.

Esempi.

(1) La relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$ è un ordinamento totale.
(2) La relazione $\subseteq$ su $\mathscr{P}(X)$ (l'insieme dei sottoinsiemi di un insieme X) è un ordinamento, solo parziale se X ha almeno due elementi.
(3) La relazione $\mathcal{R}$ su $\mathbb{N}$ data da

$$m\mathcal{R}n \Longleftrightarrow m\big|n$$

è un ordinamento parziale.
(4) Se $\mathcal{R}$ è un ordinamento su A, la *relazione inversa* $\mathcal{R}^{-1}$ è pure un ordinamento, detto *ordinamento inverso*. Se $a\mathcal{R}b$ si scrive come $a \leq b$, $a\mathcal{R}^{-1}b$ si scrive $a \geq b$.
(5) Se $\mathcal{R}$ è un ordinamento su A e $A' \subseteq A$, la *restrizione* $\mathcal{R}_{|_{a'^2}}$ di $\mathcal{R}$ ad A' è un ordinamento su A', detto *ordinamento indotto* da A ad A'.

Se $\mathcal{R}|_{A'}$ è un ordinamento totale su A', A' si dice una *catena* (o sottoinsieme totalmente ordinato) di A.

Uno stesso insieme può ammettere più ordinamenti. È perciò corretto dire che un *insieme ordinato* è una coppia $(A, \leq)$, dove A è un insieme e $\leq$ è un ordinamento su di esso.

Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato. Un elemento $m \in A$ si dice *massimo di* A se, per ogni $a \in A$, $a \leq m$.
In modo analogo si definisce il *minimo* di un insieme ordinato.

Lemma 1.3 (**Unicità del massimo e del minimo**). *Se un insieme ordinato ha un massimo (risp. minimo), esso è unico.*

DIMOSTRAZIONE. Siano m e m' due massimi. Allora $m' \leq m$ e $m \leq m'$ e, per la proprietà antisimmetrica, $m = m'$. Analogamente per i minimi. $\square$

Le nozioni di massimo e di minimo si applicano ovviamente anche a sottoinsiemi di un insieme ordinato.

Un elemento $m \in A$ si dice *massimale* se non esiste alcun elemento $a \in A$ tale che $m < a$ (se la relazione di ordine è totale questo equivale a dire che $a \leq m$ per ogni $a \in A$). In modo analogo si definisce un elemento *minimale* di A.
Per un insieme A totalmente ordinato, le nozioni di elemento massimo ed elemento massimale coincidono. Se l'ordinamento non è totale, il massimo è un elemento massimale, ma non viceversa. Un insieme parzialmente ordinato può possedere più elementi massimali. Ad esempio, nell'insieme

$$\{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ ha al più 5 elementi}\}$$

con la relazione di ordine indotta dall'inclusione in $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, ogni insieme di 5 elementi è massimale e nessuno di questi insiemi è massimo. Considerazioni del tutto analoghe valgono per gli elementi minimi e minimali.

Sia ora A' un sottoinsieme di A. Diamo le seguenti definizioni.

(i) Un elemento $a \in A$ si dice un *maggiorante* di A' se, per ogni $a' \in A'$, $a' \leq a$. In modo analogo di definisce un *minorante* di A'.

(ii) L'insieme A si dice *superiormente limitato in* A se esistono in A maggioranti di A'. In modo analogo si dice *inferiormente limitato in* A se esistono in A minoranti di A'.

(iii) Se l'insieme dei maggioranti di A' ha minimo[5], questo si chiama l'*estremo superiore di* A'. L'*estremo inferiore* di A' si definisce come il massimo dei minoranti, quando questo esiste.

Per il Lemma 1.3, l'estremo superiore e l'estremo inferiore, se esistono, sono unici.
I simboli max, min, sup, inf indicano rispettivamente massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore di un sottoinsieme di un insieme ordinato.
Si noti che (con considerazioni analoghe per minimi, minoranti e estremo inferiore)

- un maggiorante a di A' in A appartiene ad A' se e solo se $a = \max A'$;
- se $A' \subseteq A$ ha massimo, allora $\max A' = \sup A'$;
- un elemento $a \in A$ è massimale se e solo se $A' = \{a\}$ non ha maggioranti all'infuori di a stesso.

Esempi.

(1) Si consideri $\mathbb{N}$ ordinato dalla relazione $m \preceq n$ se $m \big| n$. Allora $\min \mathbb{N} = 1$ e $\max \mathbb{N} = 0$. Se prendiamo invece $A = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ con l'ordinamento indotto da $\preceq$, A non ammette né minimo né massimo, i numeri primi sono gli elementi minimali, e non ci sono elementi massimali.

(2) Nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, dotato dell'ordinamento (totale) abituale, si consideri l'insieme $A' = \{m/n : \ (m/n)^2 < 2\}$. Si dimostri che l'insieme dei maggioranti di A' è $\{m/n > 0 : \ (m/n)^2 > 2\}$ e che tale insieme non ha minimo. Dunque A' ha dei maggioranti in $\mathbb{Q}$, ma non l'estremo superiore.

[5] Si noti che questo implica che l'insieme dei maggioranti di A' è non vuoto, dunque che A' è superiormente limitato in A.

6. Funzioni

Una relazione $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ si dice una *funzione* (o anche *applicazione*, *mappa*, *trasformazione*) *di A in B* se vale la seguente proprietà:

(6.1) per ogni $a \in A$, esiste un unico $b \in B$ tale che $a\mathcal{R}b$.

Si scrive abitualmente $\mathcal{R}(a) = b$ invece di $(a, b) \in \mathcal{R}$. Una funzione $\mathcal{R}$ di A in B si indica con la notazione

$$\mathcal{R} : A \longrightarrow B \ .$$

Notazioni come

$$a \longmapsto \mathcal{R}(a) = b \ , \qquad a \overset{\mathcal{R}}{\longmapsto} b \ ,$$

sono pure usate per indicare come $\mathcal{R}$ agisce sul singolo elemento a.
Pur non dimenticando che le funzioni sono relazioni, iniziamo a usare da subito, ma non esclusivamente, la notazione tradizionale $f : A \to B$ per una funzione f da A in B.
Data $f : A \to B$, le seguenti definizioni e notazioni sono standard:

- A si chiama il *dominio* di f e B il suo *codominio*;
- se $f(a) = b$, b si chiama *l'immagine di a secondo f*;
- dato $A' \subseteq A$, la relazione $f_{|_{A'\times B}} = f \cap (A' \times B)$ è una funzione su A', detta la *restrizione* di f ad A' e si indica comunemente con il simbolo $f_{|_{A'}}$;
- l'insieme
$$\mathrm{im} f = \big\{ b \in B : \ \exists\, a \in A \text{ tale che } f(a) = b \big\} \subseteq B$$
si chiama l'*insieme immagine*, o anche solo *immagine*, di f;
- dato $A' \subseteq A$, si chiama *immagine di A' secondo f* l'insieme $f(A')$[6] definito da
$$f(A') = \mathrm{im}(f_{|_{A'}}) = \big\{ b \in B : \ \exists\, a \in A' \text{ tale che } f(a) = b \big\};$$
- dato $B' \subseteq B$, si chiama *controimmagine di B' secondo f* l'insieme $f^{-1}(B)$ definito da
$$f^{-1}(B') = \big\{ a \in A : \ f(a) \in B' \big\} \ ;$$

Si noti che $f(\emptyset) = \emptyset$ e che $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

- f si dice *suriettiva* se $\mathrm{im} f = B$ (quindi, per ogni $b \in B$ esiste *almeno* un $a \in A$ tale che $f(a) = b$);
- $\mathcal{R}$ si dice *iniettiva* se
$$a,\, a' \in A \text{ e } a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$
(quindi, per ogni $b \in B$ esiste *al più* un $a \in A$ tale che $f(a) = b$);
- f si dice *biiettiva* o *biunivoca*, o anche *corrispondenza biunivoca*, se è iniettiva e suriettiva (quindi, per ogni $b \in B$ esiste *uno e un solo* $a \in A$ tale che $f(a) = b$);
- se $f : A \to B$ è biiettiva, $f^{-1} : B \to A$ è pure una funzione, detta *funzione inversa* di f;
- se $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, la *funzione composta* $g \circ f : A \longrightarrow C$ è definita da
$$g \circ f(a) = g\big(f(a)\big) \ , \quad \forall\, a \in A$$

---

[6] La notazione è qui un po' ambigua. A rigore, si dovrebbe dire che a ogni funzione $f : A \longrightarrow B$ si associano due funzioni:

$$\overrightarrow{f} : \mathscr{P}(A) \longrightarrow \mathscr{P}(B) \ , \qquad \overleftarrow{f} : \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A) \ ,$$

date da

$$\overrightarrow{f}(A') = \big\{ b \in B : \ \exists\, a \in A \text{ tale che } f(a) = b \big\} \ , \qquad \overleftarrow{f}(B') = \big\{ a \in A : \ f(a) \in B' \big\} \ .$$

Tuttavia in genere nel contesto si capisce sempre di quale delle due funzioni si sta parlando.

(più in generale, la composizione ha senso se il dominio di g contiene l'immagine di f);
• la diagonale di A^2 è una funzione, detta *funzione identica* di un insieme A, e indicata con $\iota_A : A \longrightarrow A$.

Osservazioni.
(1) Se una funzione $\mathcal{R}$ non è suriettiva e $B' = \operatorname{im}\mathcal{R}$, allora $\mathcal{R} \subseteq A \times B'$, e dunque $\mathcal{R}$ definisce una funzione suriettiva di A su B'. Tuttavia è bene considerare $\mathcal{R} : A \to B$ e $\mathcal{R} : A \to B'$ come funzioni diverse. Per tener conto di ciò in modo formalmente corretto, bisogna dire più precisamente che una funzione da A a B è *una terna*[7] $(A, B, \mathcal{R})$, con $\mathcal{R}$ soddisfacente la proprietà (6.1).
(2) Se A è l'insieme vuoto e B è un insieme qualsiasi, la relazione $\mathcal{R} = \emptyset \subseteq A \times B$ è, sia pure formalmente, una funzione. Infatti ogni condizione della forma "$\forall\, a \in \emptyset,\ P(a)$" è verificata e qui si prende come P l'enunciato "esiste un unico b tale che $(a, b) \in \emptyset$".
(3) Data $f : A \to B$, la funzione d'insieme $B' \mapsto f^{-1}(B')$ tra $\mathscr{P}(B)$ e $\mathscr{P}(A)$ commuta con tutte le operazioni insiemistiche, vale a dire

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)\ , \quad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)\ , \quad f^{-1}(B' \setminus B'') = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(B'')\ .$$

Per la funzione di insieme $A' \mapsto f(A)$ tra $\mathscr{P}(A)$ e $\mathscr{P}(B)$, invece, in generale si può solo dire che

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \quad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)\ , \quad f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)\ . \tag{6.2}$$

dove la seconda e la terza inclusione possono essere strette. Si hanno però uguaglianze se f è iniettiva. Si noti anche che la validità di

$$f(A' \cap A'') = f(A') \cap f(A'')$$

per ogni coppia di insiemi A' e A'' equivale all'iniettività di f.

7. L'insieme dei numeri naturali

Dato un insieme X, chiamiamo *successore di* X l'insieme

$$S(X) = X \cup \{X\}\ .$$

L'*Assioma di fondazione* (o di *buona fondazione*)[8] ha tra le sue conseguenze la proprietà che un insieme non può essere elemento di se stesso. Possiamo dunque affermare che X è sottoinsieme proprio di $S(X)$.
Un insieme A i cui elementi sono insiemi[9] si dice S–*saturo* se

(i) $\emptyset \in A$;
(ii) se $X \in A$, anche $S(X) \in A$.

È facile verificare che l'insieme intersezione di una famiglia qualsiasi di insiemi S–saturi è S–saturo:

---

[7] In attesa del prossimo paragrafo 9, possiamo definire una terna come una coppia, $(A, B, f) = \big((A, B), f\big)$, in cui la prima componente è a sua volta una coppia.

[8] Più in generale, nel sistema ZF, l'Assioma di buona fondazione afferma ogni insieme non vuoto A ha almeno un elemento disgiunto da A, in formule

$$\forall A \exists y\, (y \in A) \wedge (A \cap y = \emptyset).$$

È facile vedere che questo assioma consente non solo di escludere che $X \in X$ per qualsiasi insieme X (si consideri $A = \{X\}$), ma anche di mostrare che la mappa S è "iniettiva", i.e. $X \neq Y$ implica $S(X) \neq S(Y)$ (se $S(X) = S(Y)$ e $X \neq Y$, si consideri $A = \{X, Y\}$).

[9] Come abbiamo già notato, nella teoria formale questa condizione è superflua.

LEMMA 1.4. *Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ una famiglia di insiemi S–saturi. Allora anche la loro intersezione $A' = \bigcap_{i\in I} A_i$ è S–satura.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\emptyset \in A_i$ per ogni $i \in I$, si ha $\emptyset \in A'$. Dunque A' soddisfa la condizione (i). Inoltre, se $X \in A'$, allora $X \in A_i$ per ogni $i \in I$, e dunque anche $S(X) \in A_i$ per ogni $i \in I$. Quindi $S(X) \in A'$, e A' soddisfa anche la condizione (ii), cioè A' è S–saturo. □

Nel sistema assiomatico ZF, l'*Assioma dell'infinito* afferma che:

Assioma dell'infinito. *Esistono insiemi S–saturi.*

Il nome viene dal fatto che, come vedremo, l'assioma consente di mostrare l'esistenza di insiemi con infiniti elementi. Si noti la differenza tra infinito *potenziale* e *attuale*: nel primo caso è sufficiente considerare teorie degli insiemi in cui tutti gli insiemi sono finiti, ma non vi è alcuna limitazione superiore al loro numero di elementi, nel secondo caso esistono insiemi con infiniti elementi (ma questo, appunto, deve essere garantito da qualche assioma).
Grazie al lemma precedente ha senso pensare all'intersezione di tutti gli insiemi S–saturi come il più piccolo insieme S–saturo possibile; questo sarà per noi l'insieme dei numeri naturali. Tuttavia (come vedremo anche più avanti) la considerazione dell'"insieme di tutti gli insiemi con qualche proprietà" può dar luogo a contraddizioni; per aggirare questo problema adottiamo la seguente costruzione. Sia A un insieme S–saturo. Per il Lemma 1.4, l'intersezione $\mathbb{N}_A$ di tutti i suoi sottoinsiemi S–saturi è un insieme S–saturo. Vogliamo verificare che questo insieme è indipendente dalla scelta di A.

LEMMA 1.5. *Siano A, A' due insiemi S–saturi e siano $\mathbb{N}_A$, $\mathbb{N}_{A'}$ le intersezioni dei loro rispettivi sottoinsiemi S–saturi. Allora $\mathbb{N}_A = \mathbb{N}_{A'}$.*

DIMOSTRAZIONE. Si noti che $A \cap A'$ è non vuoto, perché contiene $\emptyset$, e che è un sottoinsieme S–saturo di A. Per la minimalità di $\mathbb{N}_A$, deve essere $\mathbb{N}_A \subseteq A \cap A'$, quindi concludiamo che $\mathbb{N}_A \subseteq A'$. Ora, la minimalità di $\mathbb{N}_{A'}$ dà $\mathbb{N}_{A'} \subseteq \mathbb{N}_A$. Ma le ipotesi su A e A' sono perfettamente simmetriche, quindi un discorso analogo dà anche l'inclusione opposta $\mathbb{N}_A \subseteq \mathbb{N}_{A'}$. □

L'insieme caratterizzato dal Lemma 1.5 è indicato con $\mathbb{N}$ ed è detto *insieme dei numeri naturali* (la "costruzione" di $\mathbb{N}$ qui presentata è dovuta a von Neumann, di qui il nome di *interi di von Neumann*). Esso è il "più piccolo" insieme S–saturo esistente, rispetto alla relazione d'inclusione. Sono elementi di $\mathbb{N}$ gli insiemi

$$\begin{aligned}
&0 = \emptyset \\
&1 = S(0) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} \\
&2 = S(1) = \{\emptyset\} \cup \big\{\{\emptyset\}\big\} = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \\
&3 = S(2) = \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\} \\
&4 = S(3) = \bigg\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\}\bigg\} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dove $0, 1, 2, \ldots$ sono i simboli convenzionalmente usati. Lo strumento fondamentale per ricavare le proprietà di $\mathbb{N}$ è il *Principio di induzione*.

TEOREMA 1.6 (**Principio di induzione**). *Sia $P(n)$ un predicato*[10] *dipendente da un numero naturale n. Se vale $P(0)$ e, per ogni intero n, vale l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(S(n))$, allora vale $P(n)$*

[10]In logica, un enunciato che dipende da una o più variabili n, x ecc., variabili in dati insiemi, si chiama *predicato*.

per ogni $n \in \mathbb{N}$. In formule

$$P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} \big(P(n) \Rightarrow P(S(n))\big) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\, P(n) \ .$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ vale}\}$. Allora, per ipotesi, A è un sottoinsieme S–saturo di $\mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{N} \subseteq A$. Ma anche $A \subseteq \mathbb{N}$, per cui $A = \mathbb{N}$. □

Si noti che l'ipotesi del principio di induzione non fa riferimento alla validità (o verità) di $P(n)$, ma solo alla validità dell'implicazione $P(n) \Rightarrow P(S(n))$, che a volte si può cercare di dimostrare indipendentemente dal "valore di verità" di $P(n)$; esistono inoltre facili esempi in cui l'implicazione è logicamente corretta ma, dato che $P(0)$ non vale, non possiamo usare il principio di induzione per concludere che $P(n)$ vale per ogni n. Per esempio, se $P(n)$ è il predicato "$S(n) = n$", vale l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(S(n))$ ma $P(n)$ è sempre falsa.

Si incontrano spesso casi in cui, per dedurre la verità di $P\big(S(n)\big)$, è necessario supporre la verità non solo di $P(n)$ ma di tutte le $P(m)$ con $m \leq n$. In tale situazione, sempre che sia vera $P(0)$, si può comunque applicare il Teorema 1.6 al predicato $Q(n) = \big(\forall\, m \leq n \ P(m)\big)$ e concludere che $P(n)$ è vera per ogni n.

Usando il principio di induzione, dimostriamo una serie di proprietà della funzione S sull'insieme $\mathbb{N}$. Esse evidenziano in particolare che le relazioni di inclusione stretta e di appartenenza coincidono, se ristrette a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

PROPOSIZIONE 1.7 (**Proprietà del successore**). *Siano $m, n \in \mathbb{N}$.*

(1) *Per ogni n, $n \subset S(n)$ (inclusione stretta) e $n \in S(n)$. In particolare, per ogni n, $S(n) \neq \emptyset$.*
(2) *Per ogni n non esistono interi m tali che $n \subset m \subset S(n)$.*
(3) *$m \in n \Leftrightarrow m \subset n$ (inclusione stretta).*
(4) *$m \subseteq n \Leftrightarrow m \subset S(n)$.*
(5) *$S(m) = S(n) \Leftrightarrow m = n$.*
(6) *L'applicazione $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è biiettiva, è quindi ben definita l'applicazione "predecessore" S^{-1} da $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $\mathbb{N}$.*

L'ordine in cui i punti sono indicati dipende dalle dipendenze logiche dei successivi da alcuni dei precedenti. Per lo stesso motivo è necessario suddividere il punto (3) in due parti, intercalando il punto (3) tra le due.

DIMOSTRAZIONE.
Punto 1. Segue dall'Assioma di fondazione e dalla definizione di $S(n)$.

Punto 2. Supponiamo per assurdo che esista m tale che $n \subset m \subset S(n)$. Allora

$$\emptyset \subset m \setminus n \subseteq S(n) \setminus n = \{n\} \ .$$

Necessariamente $m \setminus n = \{n\}$, per cui $m = S(n)$ contro l'ipotesi.

Punto 3 $\Rightarrow$. Dimostriamo per induzione su n il predicato $P(n) = (\forall m\,,\ m \in n \Rightarrow m \subset n)$.
Esso è vero per $n = 0$ in quanto l'ipotesi $m \in 0 = \emptyset$ non è verificata per nessun m. Supponendo vero $P(n)$ verifichiamo $P\big(S(n)\big)$.
Se $m \in S(n) = n \cup \{n\}$, si hanno due casi:

- $m = n$, e allora l'inclusione $m \subset S(n)$ si riduce alla proprietà (1);
- $m \in n$, e allora, usando $P(n)$, si ha $m \subset n \subset S(n)$.

Quindi l'implicazione $m \in n \Rightarrow m \subset n$ vale per ogni m, n.

Punto 4. Osserviamo che l'implicazione $m \subseteq n \Rightarrow m \subset S(n)$ segue immediatamente dal punto (1). Dimostriamo l'implicazione inversa, $m \subset S(n) \Rightarrow m \subseteq n$.

Per ipotesi, $m \subset n \cup \{n\}$. Distinguiamo i due casi

- $n \in m$,
- $n \notin m$.

Se $n \in m$, applicando la parte già dimostrata del punto (3), segue che $n \subset m \subset S(n)$. Ma questo è impossibile per il punto (2).
Quindi si ha necessariamente $n \notin m$, per cui $m \subseteq n$.

Punto 3 $\Leftarrow$. Dimostriamo per induzione la rimanente implicazione del punto (3), cioè il predicato $Q(n) = (\forall m\,,\, m \subset n \Rightarrow m \in n)$.
Per $n = 0$ è ovvio. Supponiamo vera $Q(n)$ e supponiamo $m \subset S(n)$. Per il punto (4), $m \subseteq n$ e si hanno due casi:

- $m = n$, da cui segue la tesi;
- $m \subset n$, e allora $Q(n)$ implica che $m \in n \subset S(n)$, che pure dà la tesi.

Punto 5. L'implicazione $m = n \Rightarrow S(m) = S(n)$ è ovvia. Supponiamo viceversa che sia $S(n) = S(m)$. Allora $m \subset S(n)$ e dunque, per la (4), $m \subseteq n$. Analogamente si ottiene che $n \subseteq m$, dunque $m = n$.

Punto 6. L'iniettività di S è l'enunciato (5). Per la suriettività, supponiamo per assurdo che l'immagine di S non contenga un elemento $n \neq 0$. In tal caso l'insieme $\mathbb{N} \setminus \{n\}$ sarebbe S–saturo, in contrasto con la minimalità di $\mathbb{N}$. Quindi, tenendo anche conto del punto (1), $S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. □

Sull'insieme $\mathbb{N}$ introduciamo la relazione d'ordine di inclusione, che indicheremo con il simbolo $\leq$. Dalla Proposizione 1.7 seguono facilmente le seguenti proprietà:

- $0 = \min \mathbb{N}$;
- per ogni n, $n < S(n)$;
- $\mathbb{N}$ non ha massimo;
- dato $n \in \mathbb{N}$, non esistono elementi $m \in \mathbb{N}$ con $n < m < S(n)$.

PROPOSIZIONE 1.8.

(1) *La relazione* $\leq$ *è un ordinamento totale su* $\mathbb{N}$.
(2) *Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *non vuoto ha minimo.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo (1) per induzione su m, studiando la proposizione (ove per "n confrontabile con m" si intende $n \leq m$ o $m \leq n$)

$$P(n): \text{ “ogni } m \in \mathbb{N} \text{ è confrontabile con } n\text{”}.$$

$P(0)$ è vera perché $\emptyset$ è sottoinsieme di ogni insieme. Supponiamo vera $P(n)$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, si hanno allora due casi: (i) $m \leq n$, nel qual caso $m < S(n)$, oppure (ii) $n < m$, cioè $n \subset m$. In questo secondo caso, per la Proposizione 1.7 (3), si hanno le seguenti implicazioni:

$$n \subset m \implies n \in m \implies n \cup \{n\} \subseteq m \implies S(n) \leq m\,.$$

Quindi in entrambi i casi m è confrontabile con $S(n)$ e vale $P\big(S(n)\big)$.
Dimostriamo per prima cosa la (2) per assurdo, ma sotto l'ipotesi aggiuntiva che B sia una "semiretta", vale a dire $n \in B$ e $n \leq n'$ implica $n' \in B$. Sia quindi B una semiretta non vuota e priva di minimo. Mostriamo sotto queste ipotesi, per induzione su n, che $n \notin B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il che ci darà l'assurdo. Evidentemente $0 \notin B$ (altrimenti 0 sarebbe il minimo di B); se $n \notin B$, la proprietà di semiretta implica che, per ogni $m \in B$, $m > n$, e dunque $m \geq S(n)$, essendo $\mathbb{N}$ totalmente ordinato e non essendoci elementi intermedi tra n e $S(n)$. Dunque non può essere $S(n) \in B$ perché altrimenti sarebbe il minimo di B. La (2) è quindi mostrata per semirette.

Per dimostrare la (2) in generale, sia $B \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto e consideriamo la semiretta

$$B' = \{n \in \mathbb{N} : \exists\, m \in B \text{ tale che } m \leq n\}$$

dei naturali che maggiorano un elemento di B, che contiene B e quindi è non vuota. Allora B' ha un elemento minimo n_0. Se mostriamo che n_0 appartiene a B otteniamo che n_0 è anche minimo di B, per l'inclusione $B' \subseteq B$. Dal fatto che $n_0 \in B'$ deduciamo che esiste un elemento m di B tale che $m \leq n_0$; per la minimalità di n_0 deve essere $m = n_0$, quindi $n_0 \in B$. □

Grazie all'ordinamento totale di $\mathbb{N}$ possiamo generalizzare il principio di induzione come segue: chiamiamo una proprietà P *induttiva* se vale l'implicazione $P(n) \Rightarrow P(S(n))$.

Corollario 1.9 (**Induzione generalizzata**). *Sia $P(n)$ una proprietà induttiva. Allora o $P(n)$ non vale per alcun n o esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che*

$$P(n) \quad \textit{vale} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geq n_0 \ .$$

Dimostrazione. Sia $B = \{n \in \mathbb{N} : \ P(n) \text{ è vera}\}$. Se B è vuoto, siamo nel primo caso contemplato nella tesi. Se invece B non è vuoto, esso ha un minimo elemento n_0, da cui deduciamo che vale l'implicazione $\Rightarrow$ nella tesi. L'implicazione $\Leftarrow$ si riduce al principio di induzione se $n_0 = 0$. Se $n_0 > 0$, applichiamo il principio di induzione alla proprietà induttiva

$$Q(n) = (n < n_0) \vee P(n) \ .$$

Per ipotesi $0 < n_0$, per cui $Q(0)$ è vera. Supponiamo allora $Q(n)$ vera, e distinguiamo tra i tre casi $S(n) < n_0$, $S(n) = n_0$ e $S(n) > n_0$.
Nei primi due casi $Q\big(S(n)\big)$ è vera per la definizione di Q (nel primo caso) o per la definizione di n_0 (nel secondo caso). Nel terzo caso si ha $n \geq n_0$, per cui l'ipotesi $Q(n)$ vera equivale a $P(n)$ vera. Dunque anche $Q\big(S(n)\big) = P\big(S(n)\big)$ è vera. □

8. Successioni definite per ricorrenza

Si chiama *successione* di elementi di un insieme X una funzione $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Come d'abitudine, scriveremo a_n in luogo di $a(n)$ per indicare l'immagine secondo a dell'elemento $n \in \mathbb{N}$ e indicheremo la funzione con il simbolo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
E' molto frequente in matematica incontrare successioni *definite per ricorrenza* (o *ricorsione*) nel modo seguente, in termini di una funzione assegnata $f : \mathbb{N} \times X \longrightarrow X$:

(i) si assegna $a_0 \in X$;
(ii) si definisce $a_{S(n)} = f(n, a_n)$.

Intuitivamente, a partire da a_0 si può applicare la formula per ricavare a_1, e quindi a_2, ecc. La validità di questo metodo richiede però una dimostrazione, ovviamente basata sul principio di induzione.

Teorema 1.10. *Assegnati $f : \mathbb{N} \times X \longrightarrow X$ e $a_0 \in X$, esiste una e una sola successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che soddisfi le proprietà* (i) *e* (ii)*.*

Dimostrazione. Poniamo $E_n = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$ e dimostriamo per induzione il seguente predicato $P(n)$:

esiste una e una sola funzione $g_n : E_n \longrightarrow X$ tale che e, per ogni $m < n$

- $g_n(0) = a_0$,
- $\forall m < n \ , \ g_n\big(S(m)\big) = f\big(m, g_n(m)\big)$.

Esso è ovviamente vero per $n = 0$. Supponendo $P(n)$ vero, costruiamo $g_{S(n)} : E_{S(n)} \longrightarrow X$ ponendo

$$g_{S(n)}(m) = \begin{cases} g_n(m) & \text{se } m \in E_n \\ f\big(n, g_n(n)\big) & \text{se } m = S(n) \ . \end{cases}$$

Essendo $E_{S(n)} = E_n \cup \{S(n)\}$, la funzione è ben definita e, per l'ipotesi induttiva, soddisfa le condizioni richieste in $P\big(S(n)\big)$. Per dimostrare l'unicità, sia $h : E_{S(n)} \longrightarrow X$ una qualunque funzione soddisfacente le condizioni richieste in $P\big(S(n)\big)$. Allora $h_{|E_n}$ soddisfa le condizioni richieste in $P(n)$ e dunque, essendo l'unicità di g_n parte dell'ipotesi induttiva, deve essere $h_{|E_n} = g_n$. Di conseguenza,

$$h\big(S(n)\big) = f\big(n, g_n(n)\big) = g_{S(n)}\big(S(n)\big) \ ,$$

per cui $h = g_{S(n)}$.

Abbiamo quindi dimostrato esistenza e unicità di g_n per ogni n. Questo implica che, se $m < n$, $g_{n|E_m} = g_m$, ossia g_n è un *prolungamento* di g_m a E_n. Le g_n, considerate come relazioni

$$g_n \subseteq E_n \times X \subset \mathbb{N} \times X \ ,$$

sono totalmente ordinate per inclusione. Si consideri la relazione

$$a = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} g_n \ .$$

Si verifica facilmente che essa è una funzione su $\mathbb{N}$ e che soddisfa (i) e (ii). Per dimostrare l'unicità, basta osservare che ogni a' che soddisfi (i) e (ii), ristretta a un qualunque E_n, deve coincidere con g_n. □

Esempi di successioni definite per ricorrenza con $X = \mathbb{R}$ sono[11]

- la successione dei *fattoriali*: $0! = 1$, $(n+1)! = n \cdot n!$ (con $f(n,x) = nx$);
- la successione definita da $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}\big(2a_n + \frac{7}{a_n^2}\big)$, che converge a $\sqrt[3]{7}$ (qui $f(n,x) = \frac{1}{3}\big(2x + \frac{7}{x^2}\big)$, dipendente solo da x).

Anche la *successione di Fibonacci*, definita da

$$a_0 = a_1 = 1 \ , \qquad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 1) \tag{8.1}$$

può essere fatta rientrare rientrare nell'ambito del Teorema 1.10 prendendo $X = \mathbb{R}^2$. e definendo la successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con termini $b_n = (b'_n, b''_n) \in \mathbb{R}^2$ attraverso la formula induttiva

$$(b'_0, b''_0) = (1,1) \ , \qquad (b'_{n+1}, b''_{n+1}) = (b''_n, b'_n + b''_n) \ , \tag{8.2}$$

con $f : \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ data da $f\big(n, (x,y)\big) = (y, x+y)$ (i dettagli sono lasciati al lettore).

Il tipo più generale di formula ricorsiva è quello in cui si assegnano i primi termini della successione, $a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$ e la formula ricorsiva

$$a_{S(n)} = f_n(a_0, a_1, \dots, a_n) \ ,$$

in cui le f_n sono, per $n \geq n_0$, funzioni $f_n : X^{E_n} \longrightarrow X$. Con piccole variazioni della dimostrazione del Teorema 1.10, si dimostra che, per ogni scelta di $a_0, a_1, \dots, a_{n_0} \in X$, esiste una e una sola successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ che soddisfa le condizioni

- $a_0, a_1, \dots, a_{n_0}$ sono i valori assegnati,
- per ogni $n \geq n_0$, $a_{S(n)} = f_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

[11] In questi esempi ci concediamo di conoscere già le operazioni su $\mathbb{N}$ e su $\mathbb{R}$!

9. Prodotti cartesiani multipli e assioma della scelta

Dati tre insiemi A, B, C, si possono costruire i prodotti cartesiani $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$, costituiti rispettivamente dagli elementi $\big((a,b),c\big)$ e $\big(a,(b,c)\big)$, al variare di $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Essi sono dunque insiemi diversi tra loro, pur potendo essere canonicamente messi in corrispondenza biunivoca. Peraltro, anche se questa procedura potrebbe essere iterata per definire il prodotto di un numero finito di insiemi, non è semplice adattarla per definire il prodotto di un numero infinito di insiemi.

Mirando a una costruzione più diretta ed estendibile ai prodotti infiniti, vorremmo definire, più semplicemente, il prodotto cartesiano $A \times B \times C$ come l'insieme delle "terne" (a,b,c), con $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$. Ma dobbiamo innanzitutto definire cosa sono le terne. Avendo a disposizione la nozione di funzione, possiamo dare la seguente definizione:

- *Siano A, B, C tre insiemi. Il prodotto cartesiano $A \times B \times C$ è l'insieme delle funzioni*
$$f : \{1,2,3\} \longrightarrow A \cup B \cup C$$
tali che $f(1) \in A$, $f(2) \in B$, $f(3) \in C$.

Una terna è dunque una funzione f con le proprietà suddette.
Come avevamo anticipato, questa costruzione può essere facilmente adattata anche a un numero maggiore di insiemi, finito o infinito[12] nel modo seguente.
Sia I un insieme non vuoto di indici, introdotto per parametrizzare una famiglia di insiemi[13]
$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\} \ .$$

DEFINIZIONE 1.11 (**Prodotto cartesiano di insiemi**). *Il prodotto cartesiano $\prod_{i \in I} A_i$ è l'insieme delle funzioni*
$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$
tali che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in I$.

Se tutti gli A_i sono uguali tra loro a un dato insieme A, il prodotto cartesiano $\prod_{i \in I} A$ è l'insieme di tutte funzioni $f : I \longrightarrow A$. Esso viene indicato con A^I.
Se I è finito, tipicamente $I = \{1,2,\ldots,n\}$, si usa la notazione A^n anziché $A^{\{1,\ldots,n\}}$, e i suoi elementi sono le *n–uple* (ordinate) di elementi di A, indicate abitualmente come $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
È un fatto ovvio che se uno degli insiemi A_i è vuoto, anche il prodotto cartesiano è vuoto, perché la condizione $f(i) \in A_i$ non può essere realizzata per quel particolare i; questo è coerente con la convenzione che avevamo introdotto per il prodotto cartesiano di due insiemi.
Viceversa, non è per nulla ovvio che se nessun A_i è vuoto, allora $\prod_{i \in I} A_i$ è non vuoto. Questa affermazione, certamente dimostrabile per induzione sulla cardinalità dell'insieme degli indici I quando questo è finito[14], è in effetti *indipendente* dagli assiomi di Zermelo–Fraenkel. Pertanto può essere indifferentemente accettato oppure no, dando luogo a due teorie degli insiemi, una più ampia

---

[12] Perché questa definizione non è utilizzabile per introdurre il prodotto di due insiemi? In che relazione è la nozione di prodotto di due insiemi A e B con quella di funzioni $f : \{1,2\} \to A \cup B$ con $f(1) \in A$ e $f(2) \in B$?

[13] Strettamente parlando, anche questa andrebbe intesa come una mappa S a valori insiemi, che associa a ogni $i \in I$ un sottoinsieme A_i di un certo dato insieme X, quindi $A_i = S(i)$ per ogni $i \in I$.

[14] I concetti di cardinalità e di insieme finito verranno precisati in seguito.

(detta ZFC) e l'altra (ZF) più ristretta.[15] Nella matematica moderna essa viene comunemente accettata, come assioma aggiuntivo, detto *Assioma della scelta*. Esistono opzioni intermedie, come richiedere che il prodotto $\prod_{i \in I} A_i$ sia non vuoto quando tutti gli insiemi A_i sono non vuoti e $I = \mathbb{N}$ (o è equipotente a $\mathbb{N}$), questo è il cosiddetto *Assioma della scelta numerabile* (gran parte dell'Analisi Matematica moderna non potrebbe essere possibile se non si accettasse almeno questo assioma, come presto vedremo).

Le seguenti sono formulazioni equivalenti dell'Assioma della scelta.[16]

- *Il prodotto cartesiano di una famiglia non vuota di insiemi non vuoti è non vuoto.*
- *Data una famiglia non vuota $\{A_i : \ i \in I\}$ di insiemi non vuoti a due a due disgiunti, esiste un sottoinsieme B di $\bigcup_{i \in I} A_i$ tale che, per ogni $i \in I$, $B \cap A_i$ contenga un unico elemento.*

Si noti che, accettando la prima formulazione, la seconda segue prendendo $B = f(I)$, ove f è una qualsiasi funzione in $\prod_{i \in I} A_i$.
Accettando invece la seconda formulazione, data una qualunque famiglia $\{A_i : \ i \in I\}$ di insiemi, basta considerare gli insiemi $A'_i = \{i\} \times A_i \subseteq I \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$, osservando che gli A'_i sono a due a due disgiunti e che l'insieme B garantito dalla seconda formulazione fornisce una funzione come richiesto nella prima formulazione.
La seconda formulazione giustifica il nome di "Assioma della scelta": è possibile "scegliere" simultaneamente rispetto al parametro i un elemento da ciascun A_i.
Altre formulazioni equivalenti, ma di natura sostanzialmente diversa, dell'assioma della scelta (Lemma di Zorn e Teorema di Zermelo) saranno presentate più avanti.

10. Cardinalità di insiemi

La teoria che illustreremo in questa sezione è dovuta, nelle sue linee generali, a G. Cantor, intorno al 1870.

- *Si dice che un insieme A ha la stessa* cardinalità*, o* potenza*, di un insieme B se esiste una funzione biiettiva di A in B.*

Si dice anche che A è *equipotente* a B. Si vede facilmente che:

- un insieme A è equipotente a se stesso (perché ι_A è biiettiva);
- se A è equipotente a B, B è equipotente ad A (perché se $f : A \to B$ è biiettiva, anche $f^{-1} : B \to A$ lo è);

[15] L'Assioma della scelta è strettamente necessario in alcune dimostrazioni/costruzioni solo nei casi in cui non si ha un criterio "effettivo" di scelta. In questi casi, l'assioma garantisce l'esistenza di una funzione generata in modo "non costruttivo". Supponiamo per esempio che $A_i \subset \mathbb{N}$: in questo caso si può definire il minimo degli A_i come criterio di scelta, ottenendo una funzione ben definita anche senza usare l'Assioma della scelta, a questo proposito si veda anche il Teorema 1.23. Per quanto possa sembrare "innocuo", l'Assioma della scelta ha conseguenze sorprendenti. Forse la più sorprendente è il cosiddetto paradosso di Banach–Tarski (scoperto da S. Banach e A. Tarski nel 1924): è possibile decomporre una palla (solida) di raggio 1 nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$, in un numero finito di parti (il numero minimo, come poi mostrato da R. M. Robinson, è 5) in modo tale che, con opportune traslazioni e rotazioni, è possibile ricomporre con queste parti *due* palle solide di raggio 1.

[16] Per completezza, si dovrebbe dire qualcosa anche sul prodotto cartesiano di una *famiglia vuota* di insiemi, in cui l'insieme di indici I è vuoto. La domanda si riduce alla seguente: esistono funzioni $f : \emptyset \longrightarrow \emptyset$? Riconducendoci alla definizione di funzione, dobbiamo riconoscere che la relazione $\mathcal{R} = \emptyset \subseteq \emptyset \times \emptyset = \emptyset$ soddisfa le proprietà richieste a una funzione. Dobbiamo dunque concludere che $\emptyset^{\emptyset}$ non è vuoto e consiste di un solo elemento. Lo stesso vale per $A^{\emptyset}$ qualunque sia l'insieme A.

- se A è equipotente a B e B è equipotente a C, allora A è equipotente a C (perché se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ sono biiettive, allora $g \circ f : A \to C$ è biiettiva).

La "relazione" di equipotenza gode dunque delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva che caratterizzano le relazioni di equivalenza. Ma su quale insieme è definita la relazione?
Vorremmo poter prendere "l'insieme di tutti gli insiemi", ma così facendo andremmo in contrasto con gli assiomi del sistema ZF.[17] Accontentiamoci dunque di affermare che su un qualunque insieme Ω, l'equipotenza (che indichiamo con $\sim$) è in effetti una relazione di equivalenza in $\mathscr{P}(\Omega)$, le cui classi di equivalenza chiameremo *cardinalità*.
L'idea intuitiva dietro queste nozioni è che due insiemi sono equipotenti se "sono ugualmente numerosi". Questa intuizione è corretta per insiemi finiti: un insieme con 37 elementi può essere posto in corrispondenza biunivoca solo con un altro insieme di 37 elementi (v. Teorema 1.16). Per insiemi infiniti la questione è molto più delicata, ed è per questo motivo che la trattazione deve essere particolarmente accurata sul piano formale. Trasferire a insiemi infiniti la nostra prima intuizione porta facilmente a errori. Si può ad esempio mostrare che gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sono equipotenti a due a due, così come gli insiemi (molto più numerosi)

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

(qui $\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali, del quale si parlerà più avanti).
Proprio in relazione agli esempi appena illustrati, vogliamo ora dire che certi insiemi sono "meno numerosi di altri". Stabiliamo allora una relazione di "minore numerosità" $\mathcal{R}$ nel modo seguente:

Siano A, A' sottoinsiemi di Ω; diciamo che $A \,\mathcal{R}\, A'$ se esiste $f : A \to A'$ iniettiva.

La nostra intuizione con insiemi finiti ci dice che se A ha n elementi e A' ha n' elementi, esiste una funzione iniettiva di A in A' se e solo se $n \leq n'$. Dunque la validità della relazione $A \,\mathcal{R}\, A'$ dipende (per insiemi finiti) solo dalla cardinalità di A e A'. Il seguente lemma afferma che ciò è vero per insiemi generici.

Lemma 1.12. *Supponiamo che $A \,\mathcal{R}\, A'$, e siano B, $B' \in \mathscr{P}(\Omega)$ con $B \sim A$, $B' \sim A'$. Allora $B \,\mathcal{R}\, B'$.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esistono:
(1) $f : A \longrightarrow A'$ iniettiva;
(2) $g : B \longrightarrow A$ biiettiva;
(3) $h : B' \longrightarrow A'$ biiettiva.

Consideriamo allora la composizione $h^{-1} \circ f \circ g : B \longrightarrow B'$,

$$B \xrightarrow{g} A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{h^{-1}} B' \,.$$

Essendo una composizione di funzioni iniettive, essa è iniettiva. □

Possiamo allora "passare la relazione $\mathcal{R}$ al quoziente modulo $\sim$", per definire una relazione sull'insieme quoziente delle cardinalità.

Siano $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ due cardinalità. Diciamo che $\mathcal{C} \preceq \mathcal{C}'$ se, presi $A \in \mathcal{C}$ e $A' \in \mathcal{C}'$, si ha $A \,\mathcal{R}\, A'$.

Il Lemma 1.12 ci assicura che questa è una *buona definizione*, ossia che la conclusione $A \,\mathcal{R}\, A'$ non dipende dalla scelta di A e A' come rappresentanti di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ rispettivamente.

Vogliamo vedere che $\preceq$ è una relazione d'ordine tra cardinalità. Le proprietà riflessiva e transitiva sono facili da verificare (la transitività, in particolare, si basa sul fatto che la composizione di funzioni iniettive è iniettiva). Dimostrare la proprietà antisimmetrica vuol dire dimostrare il seguente teorema.

[17] L'insieme E di tutti gli insiemi avrebbe la proprietà $E \in E$, in contrasto con l'Assioma di buona fondazione.

Teorema 1.13 (**Cantor–Bernstein**). *Siano A, B insiemi e supponiamo che esistano funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to A$ iniettive. Allora A e B sono equipotenti.*

Prima della dimostrazione formale, vediamone una interpretazione intuitiva.
Possiamo supporre che sia $B \setminus f(A)$ che $A \setminus g(B)$ siano non vuoti, altrimenti una delle due funzioni è anche suriettiva e la tesi è banale.

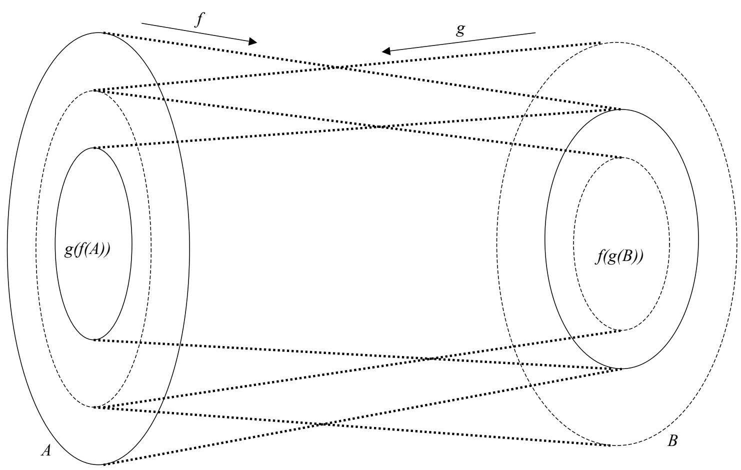


Figura 1

Dato $a \in A$, possiamo generare consecutivamente il suo "figlio" $f(a) \in B$, il suo "nipote" $g(f(a)) \in A$, il "pronipote" $f(g(f(a))) \in B$ e così via (vedi la Figura 1). In maniera analoga ogni elemento $b \in B$ genera successivamente $g(b) \in A$, $f(g(b)) \in B$, $g(f(g(b))) \in A$ e così via. L'idea chiave è che, essendo tutte queste mappe iniettive (e quindi invertibili, se si prende la loro immagine come codominio), possiamo fare il procedimento a ritroso, dividendo A in tre insiemi a due a due disgiunti: l'insieme A_A degli elementi $a \in A$ che o appartengono a $A \setminus g(B)$ o hanno come capostipite un elemento a' di A (che necessariamente dovrà appartenere a $A \setminus g(B)$), l'insieme A_B degli elementi $a \in A$ che hanno come capostipite un elemento b di B (che necessariamente dovrà appartenere a $B \setminus f(A)$), infine l'insieme A_∞ degli elementi di A che non hanno un capostipite, perché per quanto si vada a ritroso si rimane sempre in $f(A)$ o in $g(B)$. Fatta una analoga decomposizione dell'insieme B, in tre insiemi a due a due disgiunti $B_B \supseteq B \setminus f(A)$, B_A e B_∞, è evidente che la mappa f porta biiettivamente non solo A_∞ in B_∞, ma anche A_A in B_A, perché ogni elemento $b \in B_A$ deve essere immagine tramite f di un elemento $a \in A$, che andando a ritroso ha necessariamente lo stesso capostipite in A (a stesso, eventualmente). Tuttavia, f non è suriettiva da A_B in B_B, perché $f(A_B) \subseteq f(A)$ e $B_B \supseteq B \setminus f(A) \neq \emptyset$. Ma, per simmetria rispetto al ragionamento già fatto per f, g applica biiettivamente B_B in A_B, quindi $(g_{|B_B})^{-1}$ applica biiettivamente A_B su B_B. Incollando quindi queste due mappe. Definendo quindi

$$h(a) := \begin{cases} f(a) & \text{se } a \in A_A \cup A_\infty \ ; \\ \\ (g_{|_{B_B}})^{-1}(a) & \text{se } a \in A_B \end{cases} \tag{10.1}$$

otteniamo una biiezione tra A e B.
Vediamo ora la dimostrazione formale.

Dimostrazione del Teorema di Cantor-Bernstein. Escludendo il caso in cui una delle due funzioni è suriettiva, supponiamo $A \setminus g(B) = A_0$ e $B \setminus f(A) = B_0$ non vuoti.
Indicando con $(g \circ f)^{(n)}$ l'n-sima iterata di $g \circ f : A \longrightarrow A$ (con la convenzione $(g \circ f)^{(0)} = \iota_A$), e analogamente con $(f \circ g)^{(n)}$ l'n-sima iterata di $f \circ g : B \longrightarrow B$, definiamo

$$\begin{aligned} A_A &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (g\circ f)^{(n)}(A_0)\ , & B_B &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f\circ g)^{(n)}(B_0)\ , \\ A_B &= g(B_B)\ , & B_A &= f(A_A)\ , \\ A_\infty &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (g\circ f)^{(n)}(A), & B_\infty &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (f\circ g)^{(n)}(B)\ . \end{aligned}$$

Si ha

$$f : \begin{cases} A_A \longrightarrow B_A \\ A_B \longrightarrow B_B \\ A_\infty \longrightarrow B_\infty \end{cases} \quad , \qquad g : \begin{cases} B_A \longrightarrow A_A \\ B_B \longrightarrow A_B \\ B_\infty \longrightarrow A_\infty \end{cases} \quad .$$

Basta evidentemente dimostrare le tre proprietà per una sola delle due funzioni, diciamo per f.
Useremo più volte le seguenti relazioni, verificabili facilmente per induzione su n:

$$f \circ (g \circ f)^{(n)} = (f \circ g)^{(n)} \circ f\ , \qquad (f \circ g)^{(S(n))} = f \circ (g \circ f)^{(n)} \circ g\ . \tag{10.2}$$

La prima proprietà è ovvia dalla definizione di B_A. Per la seconda, si ha per definizione di A_B,

$$f(A_B) = (f \circ g)(B_B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (f \circ g)^{(S(n))}(B_0) \subset B_B\ .$$

Infine, per l'iniettività[18] di f,

$$f(A_\infty) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f \circ (g \circ f)^{(n)}(A)\ .$$

Per la prima uguaglianza in (10.2),

$$f(A_\infty) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (f \circ g)^{(n)} \circ f(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (f \circ g)^{(n)}\big(f(A)\big) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (f \circ g)^{(n)}(B) = B_\infty\ .$$

Osserviamo ora che $f(A_A) = B_A$ (per definizione di B_A) e dimostriamo che $f(A_\infty) = B_\infty$ (analogamente $g(B_B) = A_B$ e $g(B_\infty) = A_\infty$).
Dato $b \in B_\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $b_n \in B$ tale che $b = (f \circ g)^{(S(n))}(b_n)$.

[18] Come già detto a commento della (6.2), se una funzione f definita su un insieme A è iniettiva, per sottoinsiemi A_i di A valgono le uguaglianze

$$f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)\ , \qquad f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)\ .$$

Usando la seconda disuguaglianza in (10.2),

$$b = f \circ (g \circ f)^{(n)}\big(g(b_n)\big) \in f\big((g \circ f)^{(n)}(A)\big) \ .$$

Ma allora

$$b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f\big((g \circ f)^{(n)}(A)\big) = f\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (g \circ f)^{(n)}(A)\Big) = f(A_\infty) \ .$$

Passiamo a dimostrare che $\{A_A, A_B, A_\infty\}$ e $\{B_B, B_A, B_\infty\}$ sono partizioni di A e B rispettivamente.

Dimostrare che $A_A \cap A_\infty = \emptyset$ equivale a dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $(g \circ f)^{(n)}(A_0) \cap A_\infty = \emptyset$. Questo vale per $n = 0$, essendo

$$A_0 \cap A_\infty \subseteq A_0 \cap (g \circ f)(A) \subseteq A_0 \cap g(B) = \emptyset \ .$$

Supponiamo che $(g \circ f)^{(n)}(A_0) \cap A_\infty = \emptyset$ per un dato n e, procedendo per assurdo, che esista $a \in (g \circ f)^{(S(n))}(A_0) \cap A_\infty$. Allora $a = (g \circ f)(a')$ con $a' \in (g \circ f)^{(n)}(A)$, ma al tempo stesso $a = (g \circ f)(a'')$ con $a'' \in A_\infty$, per la suriettività di $g \circ f$ su A_∞. Per l'iniettività di $g \circ f$ dovrebbe allora essere $a' = a''$, assurdo per l'ipotesi induttiva.

In modo analogo si dimostra che $B_B \cap B_\infty = \emptyset$. Per l'iniettività di g si ha allora

$$A_B \cap A_\infty = g(B_B) \cap g(B_\infty) = g(B_B \cap B_\infty) = \emptyset \ .$$

Dimostriamo ora che $A_A \cap A_B = \emptyset$. Per la prima uguaglianza in (10.2),

$$A_B = g\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f \circ g)^{(n)}(B_0)\Big) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (g \circ f)^{(n)}\big(g(B_0)\big) \ .$$

Si tratta dunque di dimostrare che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $(g \circ f)^{(n)}(A_0) \cap (g \circ f)^{(m)}\big(g(B_0)\big) = \emptyset$.
Se $n = 0$, si ha

$$A_0 \cap (g \circ f)^{(m)}\big(g(B_0)\big) \subseteq A_0 \cap g(B) = \emptyset \ .$$

Analogamente, se $m = 0$,

$$(g \circ f)^{(n)}(A_0) \cap g(B_0) \subseteq (g \circ f)(A) \cap g(B_0) = g\Big(f(A) \cap B_0\Big) = \emptyset \ .$$

Procediamo per induzione su $k = \min\{m, n\}$. Supposto vero l'enunciato per un dato k, siano m', n' con minimo $S(k)$. Se m, n sono i predecessori di m', n' rispettivamente, si ha $\min\{m, n\} = k$ e dunque

$$(g \circ f)^{(n')}(A_0) \cap (g \circ f)^{(m')}\big(g(B_0)\big) = (g \circ f)\Big((g \circ f)^{(n)}(A_0) \cap (g \circ f)^{(m)}\big(g(B_0)\big)\Big) = \emptyset \ .$$

Rimane da dimostrare che i tre insiemi ricoprono A. Sia allora $a \in A \setminus A_\infty$. Per definizione di A_∞, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $a \notin (g \circ f)^{(n)}(A)$. Il minimo n per cui vale questa proprietà non può certo essere 0, e possiamo dunque indicarlo con $S(n_0)$. Allora

$$a \in (g \circ f)^{(n_0)}(A) \setminus (g \circ f)^{(S(n_0))}(A) = (g \circ f)^{(n_0)}\big(A \setminus (g \circ f)(A)\big) \ ,$$

da cui $a = (g \circ f)^{(n_0)}(a')$ con $a' \in A \setminus (g \circ f)(A)$. Questa condizione su a' dà luogo a due possibilità:

- $a' \notin g(B)$, cioè $a' \in A_0$,
- $a' \in g(B) \setminus g\big(f(A)\big) = g\big(B \setminus f(A)\big) = g(B_0)$,

cioè rispettivamente

- $a \in (g \circ f)^{(n_0)}(A_0) \subset A_A$,
- $a \in (g \circ f)^{(n_0)} \circ g(B_0) = g \circ (f \circ g)^{(n_0)}(B_0) \subset A_B$.

Possiamo a questo definire la funzione $h : A \longrightarrow B$ come in (10.1) e osservare che essa è biiettiva. $\square$

COROLLARIO 1.14. *La relazione $\preceq$ tra cardinalità è un ordinamento.*

Si noti che per il momento abbiamo solo dimostrato che $\preceq$ è un ordinamento parziale. Come vedremo più avanti, facendo uso dell'Assioma della scelta, si dimostra che si tratta di un ordinamento totale.

11. Cardinalità di $\mathscr{P}(A)$

Ricordiamo che l'insieme $\mathscr{P}(A)$ delle *parti di* A è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, mentre indicheremo con $\mathscr{P}_{\text{fin}}(A)$ l'insieme delle *parti finite* di A. Dimostriamo due proprietà della cardinalità di $\mathscr{P}(A)$:

TEOREMA 1.15. *Valgono le seguenti relazioni:*

(i) $\operatorname{card}\mathscr{P}(A) = \operatorname{card}\{0,1\}^A$;
(ii) $\operatorname{card}\mathscr{P}(A) \succ \operatorname{card} A$.

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare la (i), definiamo per prima cosa la *funzione caratteristica* $\chi_B : A \to \{0,1\}$ di $B \subseteq A$ come segue:

$$\chi_B(a) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in B \\ 0 & \text{se } a \in A \setminus B \ . \end{cases}$$

Definiamo ora la mappa $\Phi : \mathscr{P}(A) \to \{0,1\}^A$ che associa a $B \in \mathscr{P}(A)$ la funzione χ_B. Si verifica facilmente che Φ è iniettiva. Per la suriettività, basta osservare che ogni funzione f da A in $\{0,1\}$ è la funzione caratteristica di $f^{-1}\big(\{1\}\big)$.
Per dimostrare la (ii) bisogna provare che da A a $\mathscr{P}(A)$ esistono applicazioni iniettive, ma nessuna che sia biiettiva. È evidente che la funzione $f(a) = \{a\}$ è iniettiva da A in $\mathscr{P}(A)$. Supponiamo per assurdo che $g : A \to \mathscr{P}(A)$ sia suriettiva. Poniamo

$$A' = \big\{a \in A : a \notin g(a)\big\} \ .$$

Allora esiste a_0 tale che $A' = g(a_0)$. Ci sono due casi, $a_0 \in A'$ e $a_0 \notin A'$. Se $a_0 \in A'$, allora $a_0 \notin g(a_0) = A'$, il che è assurdo. Se $a_0 \notin A'$, allora $a_0 \in g(a) = A'$, che è ancora assurdo.[19] $\square$

Questo teorema mostra che non esistono cardinalità massimali. Come vedremo, questo è particolarmente interessante per insiemi infiniti. Per esempio,

$$\operatorname{card}\mathbb{N} \prec \operatorname{card}\mathscr{P}(\mathbb{N}) \prec \operatorname{card}\mathscr{P}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) \prec \cdots$$

[19] Si noti che questa dimostrazione trae ispirazione dalla famosa antinomia di Russel, dell'insieme $\{x : \ x \notin x\}$ degli insiemi che non appartengono a se stessi. L'esistenza di questa antinomia ha determinato regole più restrittive in ZF per la generazione di insiemi e ha ispirato l'assioma di buona fondazione.

12. Insiemi finiti e infiniti

Vediamo in questo paragrafo come si definiscono rigorosamente gli insiemi finiti e le loro cardinalità.

LEMMA 1.16. *Per $n \in \mathbb{N}$, sia $E_n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$. Se $m < n$, allora* $\operatorname{card} E_m$ *è strettamente minore di* $\operatorname{card} E_n$.

DIMOSTRAZIONE. È evidente che, se $m < n$, $\operatorname{card} E_m \preceq \operatorname{card} E_n$, perché $E_m \subset E_n$ e dunque esiste la funzione iniettiva di inclusione $\iota : E_m \to E_n$. Mostriamo che invece non può esistere un'applicazione biiettiva di E_m su E_n.
Proviamo per induzione su n l'enunciato $P(n) = (\forall\, m < n\,,\ m, n \in \mathbb{N}\,,\ \nexists f : E_m \to E_n$ biiettiva).
Conviene in questo caso dimostrare che sono vere $P(0)$ e $P(1)$ e nel passo induttivo supporre $n \geq 1$.
La $P(0)$ è ovvia perché non esistono $m < 0$. Per $P(1)$ basta osservare che non esiste $f : E_0 = \emptyset \longrightarrow E_1 = \{0\}$ biiettiva.
Supponiamo la tesi vera per $n \geq 1$. Sia $m < S(n)$ e ammettiamo per assurdo che esista $f : E_m \to E_{S(n)}$ biiettiva. Se $m = 0$, questo è ovvio, analogamente al caso $n = 1$ visto sopra. Se $m > 0$, poniamo $m' = S^{-1}(m)$. Allora

$$E_m = \{k \in \mathbb{N} : k \leq m'\}\ , \qquad E_{S(n)} = \{j \in \mathbb{N} : k \leq n\}\ .$$

Possiamo supporre che $f(m') = n$. Infatti, se non fosse così, avremmo $f(m') = j_0 < n$ ed esisterebbe uno e un solo $k_0 < m'$ tale che $f(k_0) = n$. Basta allora sostituire la funzione f con la funzione g che scambia i due valori assunti da f su k_0 e su m":

$$g(k) = f(k) \ \text{ se } k \neq k_0, m'\ , \qquad g(k_0) = j_0\ , \qquad g(m') = n\ ,$$

per ottenere una funzione biiettiva che manda m' in n.
Se dunque $f(m') = n$, $f(E_{m'}) = E_n$ e $f_{|E_{m'}}$ sarebbe biiettiva con $m' < n$, in contrasto con l'ipotesi induttiva. ☐

A questo punto, si definisce *finito* un insieme che sia equipotente a uno (e dunque uno solo) degli E_n. Se $A \sim E_n$, si pone $\operatorname{card} A = n$. Un insieme non equipotente a nessun E_n si dice *infinito*.

TEOREMA 1.17. *Se A è infinito, allora* $\operatorname{card} A \succeq \operatorname{card} \mathbb{N}$. *In particolare,* $\operatorname{card} A \succ n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo l'assioma della scelta come segue:

(a) prendiamo $\mathscr{P}_{\text{fin}}(A)$ come insieme I degli indici;
(b) dato $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(A)$, poniamo $A_F = A \setminus F$.

Siccome A è infinito, A_F è non vuoto per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(A)$. Esiste allora una funzione $\sigma : \mathscr{P}_{\text{fin}}(A) \longrightarrow \bigcup_{F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(A)} A_F = A$ tale che $\sigma(F) \in A \setminus F$. Definiamo dunque $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ ricorsivamente come segue:

(i) scegliamo $f(0)$ in modo arbitrario;
(ii) supponendo definiti $f(0), f(1), \dots, f(n)$, definiamo $f\big(S(n)\big) = \sigma\big(\{f(0), f(1), \dots, f(n)\}\big)$.

Si noti che la (ii) implica che, se $m < n$, $f(n) \neq f(m)$, e dunque f risulta iniettiva. ☐

Un insieme infinito A equipotente a $\mathbb{N}$ si dice *numerabile*. La cardinalità di $\mathbb{N}$ si indica con il simbolo $\aleph_0$ (aleph con zero).

13. Il Lemma di Zorn

Il Lemma di Zorn è un enunciato equivalente all'Assioma della scelta. Di esso viene fatto frequente uso in vari campi della matematica avanzata, per mostrare attraverso l'esistenza di opportuni oggetti in modo non costruttivo (e in genere per tali oggetti una dimostrazione di esistenza per via costruttiva non è possibile). Per poterlo enunciare, dobbiamo premettere alcune nozioni relative a insiemi ordinati.

Il Lemma di Zorn riguarda una classe speciale di insiemi ordinati, detti induttivi, così definiti:

- Un insieme ordinato $(A, \leq)$ si dice *induttivo* se ogni catena C di A (cioè ogni sottoinsieme totalmente ordinato) possiede maggioranti, ovvero esiste $a \in A$ tale che $c \leq a$ per ogni $c \in C$.

Si noti che la definizione stessa implica che un insieme induttivo non è vuoto. Infatti la catena vuota deve avere un maggiorante in A.

Teorema 1.18 (**Lemma di Zorn**). *Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato induttivo. Per ogni $a \in A$ esiste un elemento massimale m tale che $a \leq m$.*

Si noti che per insiemi finiti la dimostrazione è elementare: se a stesso non è massimale, esiste $a_1 \in A$ con $a < a_1$; se neanche a_1 lo è, esiste $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$, e così via. Essendo tutti gli a_i distinti, il processo termina su un elemento massimale. L'assioma della scelta consente di formalizzare questo procedimento anche per insiemi infiniti: la difficoltà deriva dal fatto che, se il processo su descritto non dovesse terminare, potremmo pure prendere un maggiorante m di tutti gli a_i, $i \in \mathbb{N}$, ma nessuno ci assicurerebbe che esso sia massimale (troveremmo quindi m_1 con $m < m_1$...., in una spirale senza fine di iterazioni).
Mostriamo ora alcune applicazioni del Lemma di Zorn, rinviando la dimostrazione di quest'ultimo al paragrafo successivo. La prima applicazione riguarda l'ordinamento tra cardinalità.

Teorema 1.19. *Dati due insiemi A e B, esiste sempre una funzione iniettiva di A in B o di B in A. Quindi l'ordinamento tra cardinalità è totale.*

Dimostrazione. La conclusione è ovvia se A o B è vuoto (se per esempio $A = \emptyset$, si prenda la funzione vuota $\emptyset : \emptyset \to B$). Supponiamo dunque che A e B siano non vuoti.
Indichiamo con X l'insieme delle funzioni biiettive $f : A' \to B'$, dove $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$. Chiaramente X non è vuoto, perché, fissati $a \in A$ e $b \in B$, la funzione $f : \{a\} \to \{b\}$ tale che $f(a) = b$ è biiettiva.
Per dimostrare la tesi, occorre dimostrare l'esistenza di una funzione $f \in X$ che abbia come dominio tutto A, oppure come immagine tutto B. Nel primo caso, allargando il codominio di f da B' a B, otteniamo una funzione iniettiva da A in B; nel secondo caso, facciamo la stessa operazione su $f^{-1} : B \to A'$, ottenendo una funzione iniettiva di B in A.
Su X definiamo il seguente ordinamento:

$$(f : A' \to B') \preceq (g : A'' \to B'') \,, \Longleftrightarrow \; A' \subseteq A'', B' \subseteq B'' \text{ e } f = g_{|_{A'}} \,,$$

(in termini puramente insiemistici, $f \subseteq A' \times B'$, $g \subseteq A'' \times B''$; allora $f \preceq g$ se e solo se $f \subseteq g$).
Si verifica facilmente che $\preceq$ è una relazione d'ordine (parziale a meno che A e B non contengano un unico elemento). Mostriamo che $(X, \preceq)$ è induttivo.
Sia $C = \{f_i : A_i \to B_i : i \in I\}$ una catena di X. Poniamo $\overline{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$, $\overline{B} = \bigcup_{i \in I} B_i$, e sia $\overline{f} : \overline{A} \to \overline{B}$ la funzione il cui grafico è l'unione dei grafici delle f_i.[20] È evidente che $f_i \preceq \overline{f}$ per ogni $i \in I$, e dunque $\overline{f}$ è un maggiorante di C in X.

[20] Si noti che, in generale, l'unione di grafici non è un grafico.

Essendo dunque X induttivo, per il Lemma di Zorn, esso ammette un elemento massimale $f_0 : A' \to B'$. Se A' e B' fossero entrambi sottoinsiemi propri di A e B rispettivamente, potremmo scegliere $\overline{a} \in A \setminus A'$ e $\bar{b} \in B \setminus B'$ e definire $f_1 : A' \cup \{\overline{a}\} \to B' \cup \{\bar{b}\}$ ponendo

$$f_1(a) = \begin{cases} f_0(a) & \text{se } a \in A' \ , \\ \bar{b} & \text{se } a = \overline{a} \ . \end{cases}$$

Avremmo allora $f_1 \in X$ e $f_0 \prec f_1$, in contrasto con l'ipotesi di massimalità di f_0. □

Teorema 1.20 (**Esistenza di ordinamenti totali**). *Ogni insieme ammette un ordinamento totale.*

Dimostrazione. Sia A un insieme, che supponiamo non vuoto[21]. Chiamiamo X l'insieme delle coppie $(A', \leq)$, dove $A' \subseteq A$ e $\leq$ è un ordinamento totale su A'. Su X definiamo la relazione

$$(A', \leq) \preceq (A'', \sqsubseteq) \iff A' \subseteq A'' \text{ e } \sqsubseteq_{|_{A'}} = \leq \ .$$

L'insieme X non è vuoto perché i sottoinsiemi di A contenenti un unico elemento ammettono un ovvio ordinamento totale. In modo analogo al teorema precedente, si dimostra che $(X, \preceq)$ è induttivo. Per il lemma di Zorn, esiste un elemento massimale $(A', \leq)$. Se fosse $A' \neq A$, potremmo prendere $\overline{a} \in A \setminus A'$ e definire un ordinamento totale su $A' \cup \{\overline{a}\}$ che estenda $\leq$, stabilendo, per esempio, che $\overline{a}$ sia l'elemento massimo. Questo contrasterebbe con l'ipotesi di massimalità. □

Come abbiamo anticipato, il Lemma di Zorn è equivalente all'Assioma della scelta. La dimostrazione nel prossimo paragrafo mostrerà che, assumendo vero l'Assioma della scelta, si dimostra il Lemma di Zorn. Mostriamo qui che, viceversa, assumendo vero il Lemma di Zorn, si dimostra l'Assioma della scelta.

Teorema 1.21. *Il Lemma di Zorn implica l'Assioma della scelta.*

Dimostrazione. Sia $\{A_i : i \in I\}$ una famiglia non vuota di insiemi non vuoti a due a due disgiunti. Poniamo

$$X = \left\{ B \subset \bigcup_{i \in I} A_i : \forall\, i \in I\,, B \cap A_i \text{ contiene al più un elemento} \right\} .$$

Chiaramente X è non vuoto ($\emptyset \in X$). Ordinando X per inclusione, mostriamo che $(X, \subseteq)$ è induttivo. Se $C = \{B_j : j \in J\}$ è una catena, prendiamo $\overline{B} = \bigcup_{j \in J} B_j$. Dobbiamo mostrare che $\overline{B} \in X$. Supponiamo per assurdo che esista $i \in I$ tale che $\overline{B} \cap A_i$ contenga due elementi distinti b_1, b_2. Esisteranno allora j_1, j_2 tali che $b_1 \in B_{j_1}$ e $b_2 \in B_{j_2}$. Siccome C è totalmente ordinato, uno dei due è contenuto nell'altro. Supponiamo che $B_2 \subseteq B_1$, per cui $b_1, b_2 \in B_{j_1}$. Ma allora $b_1, b_2 \in B_{j_1} \cap A_i$. Ma poiché $B_{j_1} \in X$, deve essere $b_1 = b_2$, da cui l'assurdo.
Per il Lemma di Zorn, X ammette un elemento massimale B_0. Mostriamo che per ogni $i \in I$, $B_0 \cap A_i$ contiene esattamente un elemento. Se, per assurdo, esistesse i_0 tale che $B_0 \cap A_{i_0} = \emptyset$, scegliendo[22] un elemento $b \in A_{i_0}$, avremmo l'insieme $B_1 = B_0 \cup \{b\} \in X$, strettamente maggiore di B_0, contrariamente all'ipotesi di massimalità. □

[21] Se $A = \emptyset$, la relazione $\emptyset$ è un ordinamento totale.

[22] Si sceglie qui da un unico insieme, quindi non stiamo usando l'assioma di scelta!

14. Il Teorema di Zermelo

Un ordinamento su A si dice un *buon ordinamento* se ogni sottoinsieme non vuoto possiede un elemento minimo. Per esempio, la Proposizione 1.8 dimostra che l'ordinamento standard su $\mathbb{N}$ è un buon ordinamento.
Altri esempi sono:

- $A = \mathbb{N} \cup \{a\}$, con $a \notin \mathbb{N}$, dotato dall'ordinamento $\leq_A$ che, ristretto a $\mathbb{N}$, coincide con quello naturale di $\mathbb{N}$, e in aggiunta $n <_A a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- l'*ordinamento lessicografico* su $\mathbb{N}^2$:
$$(m,n) \leq (m',n') \iff m < m' \text{ oppure } m = m' \text{ e } n \leq n' \ .$$

È chiaro che ogni buon ordinamento su A è totale: per confrontare due suoi elementi a e b basta prendere in esame il sottoinsieme $\{a,b\}$. È anche chiaro che ogni buon ordinamento su A ammette un minimo assoluto: basta prendere in esame il sottoinsieme A. Il seguente teorema, noto anche come *Principio del buon ordinamento*, è invece più delicato; la sua dimostrazione è una variante di quella utilizzata per mostrare il Teorema 1.20.

Teorema 1.22 (**Teorema di Zermelo**). *Ogni insieme ammette un buon ordinamento.*

Nel corso della dimostrazione diremo che un sottoinsieme B di un insieme ordinato $(A, \leq)$ è un *segmento* (iniziale) di A se
$$\forall\, b \in B \ , \ (a \in A \text{ e } a < b) \Longrightarrow a \in B \ .$$

Dimostrazione. Dato un insieme A, sia X l'insieme delle coppie $(B, \leq)$ dove $B \subseteq A$ e $\leq$ è un buon ordinamento su B. L'insieme X non è vuoto. Su X introduciamo la relazione d'ordine
$$(B, \leq) \preceq (B', \sqsubseteq) \iff B \text{ è un segmento di } B' \text{ e } \sqsubseteq|_B = \leq \ .$$
Se $\{(B_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ è una catena in X, si verifica facilmente che $\left(\bigcup_{i \in I} B_i, \bigcup_{i \in I} \leq_i\right)$ è un insieme ordinato, e che ogni B_i ne è un segmento. Mostriamo che è bene ordinato: se $Z \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ è non vuoto, esiste i tale che $Z \cap B_i$ è non vuoto, esiste quindi il minimo z di $Z \cap B_i$. Ogni elemento $z' \in Z$ minore di z appartiene, per la proprietà di segmento di B_i, anche a B_i, quindi la minimalità di z in $Z \cap B_i$ implica la minimalità di z in Z. Quindi $(X, \preceq)$ è induttivo.
Sia allora $(B, \leq)$ un elemento massimale di X. Se B fosse un sottoinsieme proprio di A, potremmo prendere un elemento $a \in A \setminus B$ e introdurre su $B \cup \{a\}$ l'ordinamento che estende $\leq$, ponendo a come massimo di $B \cup \{a\}$. Si vede facilmente che questo sarebbe un buon ordinamento, contro l'ipotesi di massimalità di $(B, \leq)$. □

Come si vede, nella dimostrazione è stato usato il Lemma di Zorn, ossia l'Assioma della scelta. In realtà il Teorema di Zermelo è equivalente all'Assioma della scelta, come ora dimostriamo.

Teorema 1.23. *Il prodotto cartesiano di qualunque famiglia non vuota di insiemi non vuoti contenuti in un insieme bene ordinato è non vuoto. In particolare il Teorema di Zermelo implica l'Assioma della scelta.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ la famiglia di insiemi. Sia $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ la loro unione e supponiamo che A sia bene ordinato. Allora, per ogni $i \in I$, il sottoinsieme A_i di A ammette un minimo a_i. La funzione
$$f : I \to A, \qquad i \mapsto a_i$$
è un elemento del prodotto cartesiano $\Pi_{i \in I} A_i$.
Si noti che la definizione di f non richiede alcuna scelta arbitraria; in particolare questa definizione non richiede l'Assioma della scelta. □

Sugli insiemi bene ordinati $(A, \leq)$ privi di massimo è possibile definire la funzione successore $a \mapsto S(a)$, i.e. un elemento $b > a$ tale che $a < b'$ implica $b \leq b'$:

$$S(a) = \min \{b \in A : \; a < b\} \; .$$

Si noti anche che S è iniettiva: infatti $c < S(c)$ per definizione di S; se $a < b$ allora $a < S(a) \leq b < S(b)$. Tuttavia S non è in generale suriettiva, ad esempio nell'insieme bene ordinato $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}'$, dove $\mathbb{N}' = \{n' : \; n \in \mathbb{N}\}$ è una copia (distinta) di $\mathbb{N}$ come insieme ordinato e tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono minori di tutti gli elementi di $\mathbb{N}'$, l'elemento 0' di $\mathbb{N}'$ non appartiene all'immagine di S. Quindi la funzione "predecessore" S^{-1} non è sempre definita su tutto $A \setminus \{\min A\}$.
Un'altra operazione possibile in insiemi bene ordinati $(A, \leq)$ è quella che associa a un insieme $B \subseteq A$ superiormente limitato il suo estremo superiore, ovvero il minimo dei maggioranti di B.
Vale inoltre la seguente forma estesa del principio di induzione.

Proposizione 1.24 (**Induzione transfinita**). *Sia $(A, \leq)$ un insieme bene ordinato e sia $P(a)$ un enunciato dipendente da $a \in A$. Se per ogni $a \in A$ vale l'implicazione*

$$(\forall a' < a \; P(a')) \Longrightarrow P(a)$$

allora vale $P(a)$ per ogni $a \in A$.

Dimostrazione. Si noti che, se $a_0 = \min A$, allora l'ipotesi della proposizione implica che $P(a_0)$ vale (perché la premessa nell'implicazione, che andrebbe scritta più precisamente nella forma $\forall a'((a' \geq a) \vee P(a'))$, è verificata). Se l'insieme B degli elementi di A tali che P non vale è non vuoto, l'implicazione nell'ipotesi è violata prendendo come $a > a_0$ il minimo di B. $\square$

Si noti anche che la formulazione dell'induzione transfinita non usa la funzione successore, a differenza di quello che abbiamo visto in $\mathbb{N}$. Questo è dovuto al fatto che non è possibile in generale definire, al contrario di quello che abbiamo visto in $\mathbb{N}^*$, una funzione predecessore in $A \setminus \{\min A\}$.

15. *Dimostrazione del Lemma di Zorn

[23]

Per la dimostrazione del lemma di Zorn faremo uso di alcune proprietà elementari degli insiemi bene ordinati, ma non del teorema di Zermelo (che abbiamo mostrato usando il lemma di Zorn).
Sia $(A, \leq)$ un insieme induttivo. Mostreremo che esiste in A un elemento m massimale. Per ottenere la versione originale del lemma di Zorn che stabilisce, dato $a \in A$, l'esistenza di un elemento massimale m tale che $a \leq m$, basterà applicare il risultato all'insieme $A' = \{x \in A : \; a \leq x\}$ che è non vuoto, e induttivo se munito della relazione di ordine indotta da A.
Per l'assioma di scelta, esiste una funzione $f : \mathscr{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tale che $f(B) \in B$ per ogni $B \subseteq A$ non vuoto. Indicheremo con a_* il valore $f(A)$.
Data una tale funzione di scelta f, definiamo f-catena un sottoinsieme non vuoto C di A tale che:

(a) C è bene ordinato (in particolare è una catena);
(b) per ogni $a \in C$ vale

$$a = f\big(\{x \in A : \; b < x \text{ per ogni } b \in C, \, b < a\}\big). \tag{15.1}$$

[23]Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

Si noti che la (15.1) ha senso, perché l'insieme $\{x \in A : \ b < x \text{ per ogni } b \in C,\, b < a\}$ contiene almeno a. Si noti anche che l'insieme delle f-catene è non vuoto. Basta prendere $C = \{a_*\}$: in questo caso l'insieme degli $x \in A$ tali che $b < x$ per ogni $b \in C$, $b < a_*$, coincide con A. Per esprimere la condizione $b \in C$ e $b < a$ useremo nel seguito di questa dimostrazione la notazione suggestiva $b \in C \cap (-\infty, a)$. Possiamo quindi riformulare la (15.1) come segue:

per ogni $a \in C$, vale $a = f(M_a)$, dove M_a è l'insieme dei maggioranti stretti di $C \cap (-\infty, a)$.

Verifichiamo ora che:

(15.2) *date due f-catene C e C', una è sempre un segmento iniziale dell'altra.*

Più precisamente, mostreremo che C e C' hanno lo stesso minimo e che $C \subseteq C'$ o $C' \subseteq C$. Se $c_* = \min C$ abbiamo infatti dalla (15.1) che $c_* = a_*$; lo stesso ragionamento per C' mostra che a_* deve anche essere il minimo di C'. Consideriamo ora la classe $\mathcal{S}$ dei segmenti non vuoti di $C \cup C'$ contenuti in $C \cap C'$, vale a dire $S \in \mathcal{S}$ se e solo se $S \subseteq C \cap C'$ e vale l'implicazione

$$c \in C \cup C',\ x \in S,\ c < x \quad \Longrightarrow \quad c \in S. \tag{15.3}$$

Osserviamo che la classe $\mathcal{S}$ è non vuota, dato che $\{a_*\} \in \mathcal{S}$, e che l'unione di una famiglia qualsiasi di elementi di $\mathcal{S}$ appartiene a $\mathcal{S}$. Grazie a questa stabilità di $\mathcal{S}$, l'elemento massimo S_* di $\mathcal{S}$ esiste. Mostreremo che $S_* = C$ o $S_* = C'$, il che ci darà in particolare che $C \subseteq C'$ o $C' \subseteq C$. A tal fine, supponiamo per assurdo che $C \setminus S_*$ e $C' \setminus S_*$ siano entrambi non vuoti e indichiamo con b e b' i rispettivi elementi minimi (qui usiamo in maniera essenziale il fatto che le f-catene sono insiemi bene ordinati). Mostriamo che

$$C \cap (-\infty, b) = C' \cap (-\infty, b')\ . \tag{15.4}$$

Per simmetria, ci basta mostrare l'inclusione $\subseteq$ nella (15.4). Se $x \in C$ e $x < b$, allora per la minimalità di b deve essere $x \in S_*$, quindi $x \in C'$. Se non fosse $x < b'$ avremmo o $x = b'$, ma questo è escluso dal fatto che $b' \notin S_*$, o $b' < x$. In quest'ultimo caso la proprietà di segmento (15.3) di S_* (con $c = b'$) darebbe $b' \in S_*$, che non può valere. Questo mostra la (15.4). Applicando la (15.1) all'elemento b della f-catena C e all'elemento b' della f-catena C', otteniamo $b = f(L)$ e $b' = f(L)$, ove L è l'insieme dei maggioranti stretti dell'insieme nella (15.4). Ma allora $b = b' \in C \cap C'$. Potremmo allora estendere S_* aggiungendo b; si noti che per minimalità di b in $C \setminus S_*$ e di b' in $C' \setminus S_*$, l'insieme $S_* \cup \{b\} = S_* \cup \{b'\}$ resta ancora un segmento di $C \cup C'$, questo dà l'assurdo cercato e mostra che per ogni coppia di catene una delle due è sempre un segmento iniziale dell'altra.

Ora possiamo concludere la dimostrazione usando (15.2) delle f-catene. Usando questa proprietà, come abbiamo visto nella dimostrazione del teorema di Zermelo, otteniamo subito che l'unione di una famiglia qualsiasi di f-catene è una f-catena. Indichiamo allora con C_* l'unione di tutte le f-catene, i.e. la f-catena massima. Per l'ipotesi di induttività di A, C_* ha un maggiorante m. Se m non fosse massimale, esisterebbe $n \in A$ con $m < n$, quindi l'insieme M dei maggioranti stretti di C_* sarebbe non vuoto. Posto allora

$$C = C_* \cup \{f(M)\}\ ,$$

dato che $f(M)$ è un maggiorante stretto di C_* avremmo che C è ancora un insieme bene ordinato che contiene strettamente C_*.

L'assurdo deriverà allora dalla dimostrazione che C è una f-catena. Per verificarlo, notiamo che la (15.1) ovviamente vale se $a \in C_*$, usando il fatto che C_* è una f-catena e che $C \cap (-\infty, a) = C_* \cap (-\infty, a)$. Se invece $a = f(M)$ abbiamo che $C \cap (-\infty, a) = C_*$ e si usa proprio il fatto che M è l'insieme dei maggioranti stretti di C_*.

16. *Appendice: gli assiomi di Zermelo-Fraenkel

[24]

Occorre prima di tutto chiarire che, nella formulazione assiomatica della teoria degli insiemi, non viene data alcuna definizione di cosa sia un insieme, né della natura della relazione "$\in$" tra di essi, ma solo a stabilire le proprietà di quest'ultima.
E' bene premettere un paio di osservazioni.

- La relazione "$\in$" è *tra insiemi* (un insieme A è elemento di un insieme B), ossia gli elementi di un insieme *sono sempre a loro volta insiemi* e non oggetti di altra natura (che altrimenti andrebbero a loro volta assiomatizzati). Del resto abbiamo già visto che anche gli oggetti più elementari in matematica (i numeri naturali) sono insiemi.
- La relazione "$\in$" è quella fondamentale, mentre la relazione di inclusione "$\subseteq$" è derivata da essa attraverso la formula

$$X \subseteq Y \iff \forall \mathbb{Z} \quad Z \in X \ \Rightarrow \ Z \in Y \ .$$

Suddividiamo il seguito di questo paragrafo in sottoparagrafi, ciascuno dedicato a un assioma, aggiungendo brevi commenti per interpretarli o mostrarne alcune dirette conseguenze.

ZF 1. Assioma dell'estensione. *Due insiemi X e Y sono uguali se e solo se ogni elemento dell'insieme X è elemento dell'insieme Y e ogni elemento dell'insieme Y è elemento dell'insieme X.*

In formule,

$$\forall X, Y \quad (X = Y) \iff \big(Z \in X \ \Rightarrow \ Z \in Y\big) \wedge \big(Z \in Y \ \Rightarrow \ Z \in X\big) \ .$$

L'assioma stabilisce il criterio di uguaglianza tra insiemi.

ZF 2. Assioma dell'insieme vuoto. *Esiste un insieme privo di elementi.*

In formule

$$\exists X : \ \forall Y \quad \neg(Y \in X) \ .$$

Per l'assioma ZF1, questo insieme è unico (l'insieme vuoto $\emptyset$).

ZF 3. Assioma della coppia. *Dati comunque due insiemi X e Y esiste un insieme Z i cui elementi sono solo X e Y.*

$$\forall X, Y \ \exists Z : \ \forall W \quad (W \in Z) \iff (W = X) \vee (W = Y) \ .$$

L'assioma afferma che l'operazione di comporre $Z = \{X, Y\}$ a partire da due insiemi dati è lecita. In particolare, se $X = Y$, è lecito comporre il singoletto $\{X\}$. Inoltre è lecito, in base a questo assioma, definire la *coppia ordinata*

$$(X, Y) = \big\{X, X, Y\big\} \ .$$

ZF 4. Assioma dell'unione. *Per ogni insieme X esiste un insieme Y tale che l'insieme Z è un elemento di Y se e solo se Z è elemento di un elemento di X.*

In formule

$$\forall X \ \exists Y : \ \forall Z \ (Z \in Y) \iff \big(\exists W \in X : \ Z \in W\big) \ .$$

[24] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

L'insieme Y si indica con

$$Y = \bigcup_{W \in X} W \ .$$

E' dunque lecito, data una famiglia X di insiemi, costruire la loro unione.

ZF 5. Assioma dell'insieme potenza. *Per ogni insieme X esiste un insieme Y i cui elementi sono tutti e soli i sottoinsiemi di X.*

$$\forall X \ \exists Y : \ \forall Z \quad (Z \in Y) \iff (Z \subseteq X) \ .$$

E' dunque lecito costruire, dato un insieme X, l'insieme $Y = \mathscr{P}(X)$ *delle parti di X.*

ZF 6. Assioma dell'infinito. *Esiste un insieme X che ha $\emptyset$ come elemento e per ogni $Y \in X$, anche $S(Y) = Y \cup \{Y\} \in X$.*

$$\exists X : \quad (\emptyset \in X) \wedge \Big(\forall Y \ (Y \in X) \implies (Y \cup \{Y\} \in X)\Big) \ .$$

Come già visto, questo assioma consente di costruire l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

ZF 7. Assioma di separazione (o del sottoinsieme). *Dati un insieme X e un predicato $P(A)$ avente come argomento un insieme A, esiste un sottoinsieme Y di X avente come elementi tutti e soli gli elementi $Z \in X$ per cui $P(Z)$ è vera.*

$$\forall X \ \exists Y : \quad (\forall Z \ (Z \in Y) \iff (Z \in X) \wedge P(Z) \ .$$

Questo assioma consente di definire sottoinsiemi di un insieme dato attraverso proprietà: $Y = \big\{Z \in X : P(Z)\big\}$. Per esempio, dati due insiemi X, Y,

$$X \cap Y = \{Z \in X : Z \in Y\} \ , \qquad X \setminus Y = \big\{Z \in X : \neg(Z \in Y)\big\} \ ,$$

ecc.

ZF 8. Assioma di fondazione (o di buona fondazione o di regolarità). *Ogni insieme non vuoto X contiene elementi Y tali che $X \cap Y = \emptyset$.*

$$\forall X \quad \neg(X = \emptyset) \implies \Big(\exists Y \in X : \ \neg(\exists Z \in Y : \ Z \in X \cap Y)\Big) \ .$$

Questo assioma esclude forme di circolarità nella relazione $\in$, per esempio
(i) che esista Y tale che $Y \in Y$ (si prenda $X = \{Y\}$),
(ii) che esistano Y, Z tali che $Y \in Z \in Y$ (posto $X = \{Y, Z\}$, esiste $W \in X$ tale che $W \cap X = \emptyset$; se $W = Y$, allora $Z \notin Y$; se $W = Z$, allora $Y \notin Z$),
oppure che esista una sequenza infinita di insiemi $X = \{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ tali che $Y_{n+1} \in Y_n$ per ogni n.

Si noti che (i) *esclude che esista* "l'insieme di tutti gli insiemi" perché, se esistesse, sarebbe un elemento di se stesso.

ZF 9. Assioma di rimpiazzamento. *Siano X un insieme e $F(A, B)$ un predicato, avente come argomento una coppia ordinata di insiemi, tali che, per ogni $A \in X$, $F(A, B) \wedge F(A, B')$ implica $B = B'$. Allora esiste un insieme Y i cui elementi sono tutti e soli gli insiemi B per cui esiste $A \in X$ tale che $F(A, B)$ sia vera.*

In formule, assegnato il predicato P,

$$\forall\, A \in X \ \forall\, B, B' \quad P(A,B) \wedge P(A,B') \ \Rightarrow \ (B = B')\big)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists\, Y : \ (B \in Y) \ \Leftrightarrow \big(\exists\, A \in X : \ P(A,B)\big) \ .$$

La necessità di questo assioma dipende dal fatto che, per un predicato F che soddisfa la proprietà indicata, ma applicabile a qualunque coppia di insiemi, non possiamo considerare F come una funzione perché questa avrebbe come dominio e codominio "l'insieme di tutti gli insiemi", la cui esistenza è negata dall'assioma di fondazione. L'assioma garantisce tuttavia che, se l'insieme A è limitato a variare tra gli elementi di un insieme X, allora le corrispondenti immagini B formano un insieme Y, e si può dunque considerare F come funzione da X a Y (o a un suo qualunque soprainsieme).

CAPITOLO 2

INSIEMI NUMERICI E OPERAZIONI

In questo capitolo costruiremo, a partire dai numeri naturali, gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. Con le costruzioni qui date sono rispettate le regole generali dell'aritmetica e dell'algebra. Daremo poi una caratterizzazione assiomatica di $\mathbb{R}$, quindi indipendente dalla particolare costruzione che qui viene adottata, basata sulla struttura di campo, di insieme ordinato e sulla proprietà di completezza.

1. Operazioni su $\mathbb{N}$

Definiamo l'operazione di *somma*:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ ,$$

tra numeri naturali definendo ricorsivamente, per $m \in \mathbb{N}$ fissato, l'applicazione $\Sigma_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (somma per m):

$$\begin{cases} \Sigma_m(0) = m \ , \\ \Sigma_m(S(n)) = S(\Sigma_m(n)) \ . \end{cases} \tag{1.1}$$

Risulta quindi definita l'applicazione $+ : (m,n) \longmapsto \Sigma_m(n)$. Rimane inteso che useremo da ora in poi la notazione classica $m+n$, abituale per svolgere operazioni.
Si noti una facile induzione su n mostra che $\Sigma_0 = \iota_{\mathbb{N}}$ e che, posto $1 = S(0)$, si ha

$$S(n) = \Sigma_1(n) = 1 + n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

Più in generale, usando ripetutamente il principio di induzione si possono derivare le proprietà fondamentali della somma.

Proposizione 2.1 (**Proprietà della somma**). *La somma gode delle proprietà*

- commutativa*:* $\forall\, m,n \in \mathbb{N}\,,\ n+m = m+n$*,*
- associativa*:* $\forall\, m,n,k \in \mathbb{N}\,,\ (m+n)+k = m+(n+k)$*.*

Inoltre Σ_m *è biiettiva e strettamente crescente tra* $\mathbb{N}$ *e* $\{n \in \mathbb{N} :\ m \le n\}$*.*

Dimostrazione. Per dimostrare la commutatività, dimostriamo preliminarmente l'identità

$$\Sigma_{S(m)}(n) = S\big(\Sigma_m(n)\big) \ , \tag{1.2}$$

procedendo per induzione su n. Per $n=0$, con m arbitrario,

$$\Sigma_{S(m)}(0) = S(m) = S\big(\Sigma_m(0)\big) \ .$$

Supposta vera la (1.2) per un dato n e m arbitrario, si ha, per ogni m,

$$\Sigma_{S(m)}\big(S(n)\big) = S\big(\Sigma_{S(m)}(n)\big) = (S \circ S)\big(\Sigma_m(n)\big) = S\Big(\Sigma_m\big(S(n)\big)\Big) \ .$$

Esprimiamo ora la proprietà commutativa nella forma

$$\Sigma_n(m) = \Sigma_m(n) \ ,$$

e procediamo anche qui per induzione su n. Per $n = 0$ si ha, per ogni m, $\Sigma_0(m) = m = \Sigma_m(0)$. Il passo induttivo è dimostrato dalla catena di uguaglianze

$$\Sigma_{S(n)}(m) = S\big(\Sigma_n(m)\big) = S\big(\Sigma_m(n)\big) = \Sigma_m\big(S(n)\big) \ ,$$

la prima delle quali è la (1.2).
La dimostrazione della proprietà associativa è simile. Sempre per induzione su n' si mostra che $m + n < m + n'$ se $n < n'$, quindi Σ_m è iniettiva, e sempre per induzione su n si mostra che Σ_m ha valori nell'insieme $\{n \in \mathbb{N} : \ m \leq n\}$. Se l'insieme

$$\big\{n \in \mathbb{N} : \ m \leq n\big\} \setminus \Sigma_m(\mathbb{N})$$

fosse non vuoto, prendendone il minimo n_0 (che, si noti, non può essere uguale a m) e considerando il suo predecessore $m_0 \geq m$, si otterrebbe facilmente una contraddizione dal fatto che, scrivendo $m_0 = \Sigma_m(k)$ per un certo $k \in \mathbb{N}$ (per minimalità di m_0), si otterrebbe $n_0 = S(m_0) = \Sigma_m(S(k)) \in \Sigma_m(\mathbb{N})$.
Con analoghe dimostrazioni induttive si dimostrano biiettività e monotonia di Σ_m da $\mathbb{N}$ a $\{n \in \mathbb{N} : m \leq n\}$. □

Si noti che iniettività di Σ_k e commutatività danno anche

$$m + k = n + k \quad \Longrightarrow \quad m = n. \tag{1.3}$$

Abbiamo già osservato che la somma per m è compatibile con la struttura d'ordine. Analizziamo più a fondo la compatibilità delle due strutture.

Proposizione 2.2 (**Compatibilità di somma e ordinamento**).
(i) *Siano* m, $n \in \mathbb{N}$. *Allora* $m \leq n \iff \exists\, k \in \mathbb{N} \ : \ n = m + k$.
(ii) *Siano* m, n, $k \in \mathbb{N}$. *Allora* $m \leq n \iff m + k \leq n + k$.

Dimostrazione. (i) Per provare l'implicazione $\Rightarrow$, fissato m, dimostriamo per induzione su n che, $\forall\, n \geq m$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $n = m + k$. Se $n = m$ l'implicazione è vera con $k = 0$. Supponiamo che l'implicazione valga per n. Allora

$$S(n) = S(m + k) = m + S(k) \ .$$

Per l'implicazione inversa, basta dimostrare per induzione su $k \in \mathbb{N}$ che $m \leq m + k$. La verifica è semplice e viene lasciata per esercizio.
La dimostrazione di (ii), per induzione su k, è lasciata per esercizio. □

Attraverso un procedimento analogo possiamo definire il prodotto

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \ ,$$

come segue. Fissato $m \in \mathbb{N}$, definiamo ricorsivamente la "moltiplicazione per m" come segue:[1]

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \ , \\ m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m \ . \end{cases}$$

Si verifica facilmente che

- il prodtto soddisfa le proprietà commutativa e associativa;
- per ogni $m \in \mathbb{N}$ $m \cdot 1 = m$;
- vale la *legge di annullamento del prodotto*: $m \cdot n = 0 \iff (m = 0 \ \vee \ n = 0)$;

[1] A questo punto abbandoniamo definitivamente la notazione $S(n)$ a favore di $n + 1$.

- vale la *proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto*[2]

$$(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p \ .$$

Infine, abbiamo anche qui relazioni di compatibilità con la struttura d'ordine, che lasciamo da dimostrare per esercizio:

Proposizione 2.3 (**Compatibilità di prodotto e ordinamento**). *Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$.*[3] *Allora $m \leq n \iff k \cdot m \leq k \cdot n$.*

2. Dai naturali agli interi relativi

Su $\mathbb{N}^2$ introduciamo la relazione di equivalenza[4]

$$(m,n) \sim (m',n') \iff m + n' = n + m' \ . \tag{2.1}$$

Indichiamo con $\big[(m,n)\big]$ la classe di equivalenza dell'elemento (m,n) e indichiamo l'insieme quoziente $\mathbb{N}^2/\!\sim$ con il simbolo $\mathbb{Z}$.
Su $\mathbb{Z}$ introduciamo il seguente ordinamento.

Lemma 2.4 (**Ordinamento di $\mathbb{Z}$**). *La relazione $\leq_{\mathbb{Z}}$*

$$\big[(m,n)\big] \leq_{\mathbb{Z}} \big[(p,q)\big] \iff m + q \leq n + p$$

è ben definita su $\mathbb{Z}$ ed è un ordinamento totale.

Dimostrazione. Per poter dire che $\leq_{\mathbb{Z}}$ è ben definita su $\mathbb{Z}$, bisogna dimostrare che se $(m,n) \sim (m',n')$, $(p,q) \sim (p',q')$ e $m+q \leq n+p$, allora $m'+q' \leq n'+p'$. Usando ripetutamente la Proposizione 2.2(ii) e la (2.1) si ottiene che $m+n'+q \leq n+n'+p$, da cui $m'+n+q \leq n+n'+p$, e quindi $m'+q \leq n'+p$. Aggiungendo p' ad ambo i membri e procedendo allo stesso modo, si conclude che $m'+q' \leq n'+p'$.
Che l'ordinamento su $\mathbb{Z}$ sia totale segue allora dal fatto che quello su $\mathbb{N}$ è totale. □

Per comprendere la struttura delle singole classi di equivalenza, consideriamo una coppia $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Distinguiamo due casi:

- $m \geq n$. Per la Proposizione 2.2 (i), esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $m = n + k$. Se $(m',n') \sim (m,n)$, abbiamo

$$n + m' = m + n' = n + k + n' \ .$$

Per la (1.3), segue che $m' = n' + k$. Si conclude facilmente che

$$\big[(m,n)\big] = \big\{(p+k, p) : p \in \mathbb{N}\big\} \ .$$

- $m < n$. In questo caso esiste $k \in \mathbb{N}^*$ tale che $n = m + k$. Procedendo come nel caso precedente, si ottiene che

$$\big[(m,n)\big] = \big\{(p, p+k) : p \in \mathbb{N}\big\} \ .$$

---

[2] Adottiamo la convenzione standard relativa alla priorità tra somme e prodotti; senza di questa, la formula sotto andrebbe scritta: $(m \cdot p) + (n \cdot p)$.

[3] Ricordiamo che $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

[4] Si verifichi che lo è effettivamente.

Quindi $\mathbb{Z}$ è l'unione disgiunta

$$\mathbb{Z} = \Big\{ \big[(k,0)\big] : k \in \mathbb{N} \Big\} \cup \Big\{ \big[(0,k)\big] : k \in \mathbb{N}^* \Big\} \ .$$

L'ordinamento introdotto su $\mathbb{Z}$ è tale che, se $0 < h < k$,

$$\big[(0,k)\big] <_{\mathbb{Z}} \big[(0,h)\big] <_{\mathbb{Z}} \big[(0,0)\big] <_{\mathbb{Z}} \big[(h,0)\big] <_{\mathbb{Z}} \big[(k,0)\big] \ .$$

Le operazioni di somma e prodotto su $\mathbb{Z}$ si definiscono come segue:

$$\big[(m,n)\big] + \big[(p,q)\big] = \big[(m+p, n+q)\big] \ ,$$
$$\big[(m,n)\big] \cdot \big[(p,q)\big] = \big[(mp+nq, np+mq)\big] \ .$$

Una serie di semplici verifiche mostra che sono ben definite (i.e. indipendenti dalla scelta dei rappresentanti nella classe di equivalenza) e che valgono le seguenti proprietà:

(1) le proprietà associativa e commutativa sia per la somma che per il prodotto;
(2) la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto;
(3) $\big[(0,0)\big]$ è l'*elemento neutro* per la somma, cioè $\big[(m,n)\big] + \big[(0,0)\big] = \big[(m,n)\big]$ per ogni $\big[(m,n)\big] \in \mathbb{Z}$;
(4) $\big[(1,0)\big]$ è l'*elemento neutro* per il prodotto, cioè $\big[(m,n)\big] \cdot \big[(1,0)\big] = \big[(m,n)\big]$ per ogni $\big[(m,n)\big] \in \mathbb{Z}$;
(5) ogni elemento $\big[(m,n)\big]$ ha un *opposto* (l'elemento $\big[(n,m)\big]$), indicato con $-[(m,n)]$, tale cioè che la somma dei due sia $\big[(0,0)\big]$;
(6) se il prodotto di due elementi di $\mathbb{Z}$ è nullo, cioè uguale a $\big[(0,0)\big]$, allora almeno uno dei due è nullo;
(7) per ogni $\big[(p,q)\big]$, $\big[(n,m)\big]$, $\big[(n',m')\big]$, si ha
$$\big[(n,m)\big] \leq_{\mathbb{Z}} \big[(n',m')\big] \iff \big[(n,m)\big] + \big[(p,q)\big] \leq_{\mathbb{Z}} \big[(n',m')\big] + \big[(p,q)\big] \ ;$$
(8) se $\big[(m,n)\big] \geq_{\mathbb{Z}} \big[(0,0)\big]$ e $\big[(p,q)\big] \geq_{\mathbb{Z}} \big[(0,0)\big]$, anche $\big[(m,n)\big] \cdot \big[(p,q)\big] \geq_{\mathbb{Z}} \big[(0,0)\big]$.

Le proprietà (1)–(8) forniscono le abituali regole dell'aritmetica. Le proprietà (1)–(5) si riassumono dicendo che $\mathbb{Z}$ è un *anello commutativo*. Includendo anche la (6), che segue facilmente dalla legge di annullamento del prodotto in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ si dice, più precisamente, che $\mathbb{Z}$ è un *dominio di integrità*.[5] Le proprietà (7) e (8) esprimono le principali relazioni di compatibilità tra ordine e somma e tra ordine e prodotto.

Osservazione 2.5 ($\mathbb{N}$ come sottoinsieme di $\mathbb{Z}$). Si noti che ordinamento e operazioni su $\mathbb{Z}$, ristrette agli elementi della forma $\big[(k,0)\big]$, coincidono con i corrispondenti ordinamento e operazioni su $\mathbb{N}$, attraverso la corrispondenza $\big[(k,0)\big] \in \mathbb{Z} \leftrightarrow k \in \mathbb{N}$.
Alla luce di questi fatti, possiamo a tutti gli effetti considerare $\mathbb{N}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, identificando $n \in \mathbb{N}$ con la classe di equivalenza $[(n,0)]$. Osservando anche che $\big[(0,k)\big] = -\big[(k,0)\big]$ useremo la notazione

$$k \text{ per } \big[(k,0)\big] \ , \qquad -k \text{ per } \big[(0,k)\big] \ .$$

Si osservi allora che

$$\big[(m,n)\big] = m + (-n) = m - n \ .$$

□

[5]Un altro esempio classico, derivato da questo, di anello commutativo è costituito dall'insieme dei polinomi a coefficienti interi:

$$\mathcal{A} = \big\{ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n : \ n \in \mathbb{N}^*, \ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \big\} \ ,$$

con le usuali regole algebriche di somma coefficiente per coefficiente e prodotto.

3. Dagli interi ai razionali

Con un procedimento non molto diverso, si arriva a costruire il *campo* $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali a partire da $\mathbb{Z}$. Sul prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ consideriamo la relazione di equivalenza delle "frazioni equivalenti"

$$(m, n) \approx (m', n') \iff mn' = nm' ,$$

e indichiamo con $\frac{m}{n}$ la classe di equivalenza di (m, n).[6] Con questa convenzione, si verifica facilmente che è ben definita la relazione d'ordine

$$\frac{m}{n} \leq \frac{m'}{n'} \quad \iff \quad mn' \leq nm' ,$$

(i.e. indipendente dalla scelta dei rappresentanti) e che sono ben definite le abituali operazioni di somma e prodotto, con le regole abituali del calcolo con le frazioni:

$$\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + m'n}{nn'} , \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{m'}{n'} = \frac{mm'}{nn'} .$$

In aggiunta alle proprietà (1)–(8) presentate per $\mathbb{Z}$, valgono su $\mathbb{Q}$ le seguenti altre proprietà:

(9) ogni elemento $\frac{m}{n} \neq 0$ ha un *inverso*, ossia un elemento $\frac{p}{q}$ tale che $\frac{m}{n}\frac{p}{q} = 1$ (si prende $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ se $m > 0$, $\frac{p}{q} = \frac{-n}{-m}$ se $m < 0$);

(10) vale la *proprietà archimedea*: dati $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q} > 0$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che[7]

$$k \cdot \frac{m}{n} > \frac{p}{q} .$$

L'insieme delle proprietà (1)–(10) conferisce a $\mathbb{Q}$ la struttura di *campo totalmente ordinato archimedeo*. Si noti che la validità della (6) su $\mathbb{Q}$ segue direttamente dalla (9). Seguendo l'uso comune, ometteremo sovente il simbolo di prodotto, i.e. scrivendo qr per $q \cdot r$.

È importante osservare una forte differenza tra gli ordinamenti su $\mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q}$. Mentre in $\mathbb{Z}$ ogni elemento n ha un "immediato predecessore", $n - 1$, e un "immediato successore", $n + 1$, $\mathbb{Q}$ è *denso in sé*: dati comunque due elementi $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$, esiste un terzo elemento $\frac{p}{q}$ tale che $\frac{m}{n} < \frac{p}{q} < \frac{m'}{n'}$ (basta prendere la media aritmetica dei due).

Osservazione 2.6 (**$\mathbb{Z}$ come sottoinsieme di $\mathbb{Q}$**)**.** Anche in questo caso, possiamo a tutti gli effetti considerare $\mathbb{Z}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$, identificando $n \in \mathbb{Z}$ con $\frac{n}{1}$. Questa identificazione rispetta le operazioni aritmetiche, vale a dire

$$\frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n+m}{1} , \qquad \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{n \cdot m}{1} \qquad \forall n, m \in \mathbb{Z} ,$$

e anche l'ordinamento. □

---

[6] Si noti che la nozione di frazione irriducibile corrisponde alla scelta di un rappresentante nella classe di equivalenza su descritta.

[7] Prendendo $k = np + 1$, vale $k \cdot (m \cdot q) \geq k \cdot 1 = k > np$, da cui segue la disuguaglianza tra le frazioni.

4. Campi

Alcune delle proprietà aritmetiche appena viste su $\mathbb{Q}$ possono essere assiomatizzate, dando luogo alla nozione di campo.

Definizione 2.7. *Si chiama campo un insieme $\mathbb{F}$ dotato di due operazioni, indicate con "$+$" e "$\cdot$" e dette rispettivamente* somma *e* prodotto*, che soddisfino le seguenti proprietà:*

(a) proprietà commutativa *di entrambe:*

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{F}\ , \qquad x + y = y + x\ , \qquad x \cdot y = y \cdot x\ ;$$

(b) proprietà associativa *di entrambe:*

$$\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{F}\ , \qquad (x + y) + z = x + (y + z)\ , \qquad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\ ;$$

(c) proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto*:*

$$\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{F}\ , \qquad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\ ;$$

(d) *le due operazioni ammettono* elementi neutri *distinti (abitualmente indicati con* 0 *e* 1 *rispettivamente) cioè tali che* $0 \neq 1$ *e*

$$\forall\, x \in \mathbb{F}\ , \qquad x + 0 = x\ , \qquad x \cdot 1 = x\ ;$$

(e) *esistenza dell'opposto:*

$$\forall\, x \in \mathbb{F}\ , \exists\, x' \in \mathbb{F}\ : \qquad x + x' = 0\ ;$$

(f) *esistenza dell'inverso per elementi diversi da* 0*:*

$$\forall\, x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\ , \exists\, x'' \in \mathbb{F}\ : \qquad x \cdot x'' = 1\ .$$

Esempi.

- $\mathbb{Q}$ e, come vedremo, il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Un altro esempio importante è il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, che non sarà trattato in questi appunti.
- se p è un numero primo, $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ con le operazioni intese modulo p.
- $\mathbb{F}(x)$, il *campo delle funzioni razionali a coefficienti in* $\mathbb{F}$, cioè delle funzioni $p(x)/q(x)$, dove p e q sono polinomi a coefficienti in un campo $\mathbb{F}$ e q non è il polinomio nullo, con le normali operazioni algebriche tra polinomi e frazioni.
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2} :\ p,\, q \in \mathbb{Q}\}$ con le operazioni indotte da $\mathbb{R}$.
- $\mathbb{Q}(\pi)$, costituito dai numeri reali della forma $p(\pi)/q(\pi)$, con p/q funzione razionale a coefficienti in $\mathbb{Q}$.
- Formano un campo anche i *numeri algebrici*, cioè i numeri reali che sono radici di un'equazione algebrica $p(x) = 0$, con p polinomio a coefficienti razionali.

Dagli assiomi (a)–(f) che definiscono i campi, seguono numerose proprietà generali, di cui elenchiamo le principali:

- dato $x_0 \in \mathbb{F}$, se esiste y tale che $x_0 + y = y$, allora $x_0 = 0$; in particolare $\mathbb{F}$ ammette un unico elemento neutro per la somma;
- dato $x_0 \in \mathbb{F}$, se esiste $y \neq 0$ tale che $x_0 \cdot y = y$, allora $x_0 = 1$; in particolare $\mathbb{F}$ ammette un unico elemento neutro per il prodotto;
- l'opposto di un elemento di $\mathbb{F}$ e l'inverso di un elemento non nullo di $\mathbb{F}$ sono unici; essi vengono indicati rispettivamente con $-x$ e x^{-1} (o anche con $1/x$);
- $-(x + y) = -x + (-y)$, $(xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$;
- $-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$;

- per ogni x, $x \cdot 0 = 0$ e $x \cdot (-1) = -x$;
- $x \cdot y = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ o $y = 0$.

Definizione 2.8 (**Omomorfismo di campi**). *Siano $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}'$ due campi. Si chiama* omomorfismo *di $\mathbb{F}$ in $\mathbb{F}'$ un'applicazione $\varphi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}'$ non identicamente nulla e tale che*

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{F}\ , \qquad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)\ , \qquad \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)\ . \tag{4.1}$$

Un omomorfismo φ di $\mathbb{F}$ in $\mathbb{F}'$ si dice un isomorfismo se è biiettivo. In tal caso anche φ^{-1} è un isomorfismo ed $\mathbb{F}$ e $\mathbb{F}'$ si dicono isomorfi.

Si dimostra facilmente che un omomorfismo soddisfa le condizioni

$$\varphi(0_{\mathbb{F}}) = 0_{\mathbb{F}'}\ , \quad \varphi(1_{\mathbb{F}}) = 1_{\mathbb{F}'}\ , \quad \varphi(-x) = -\varphi(x)\ , \quad \varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}\ ;$$

le relazioni $\varphi(0_{\mathbb{F}}) = 0_{\mathbb{F}'}$ e $\varphi(1_{\mathbb{F}}) = 1_{\mathbb{F}'}$ seguono dal fatto che $\varphi(0_{\mathbb{F}})$ e $\varphi(1_{\mathbb{F}})$ fungono rispettivamente da elemento neutro per la somma e il prodotto per $\mathbb{F}'$.
La relazione di isomorfismo tra campi gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.[8]

5. Costruzione del campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali

Ci sono diversi modi di costruire il campo reale $\mathbb{R}$, una volta analizzata la struttura di $\mathbb{Q}$. Presentiamo il procedimento più elementare (ne vedremo altri, che usano concetti meno elementari ma sono anche molto meno macchinosi), che usa la relazione di ordine su $\mathbb{Q}$, dovuto a R. Dedekind. Ricordiamo la nozione di segmento di un insieme ordinato $(A, \leq)$, già usata nella dimostrazione del teorema di Zermelo e del lemma di Zorn: $B \subseteq A$ è un segmento se $b \in B$ e $a \leq b$ implica $a \in B$.

Definizione 2.9. *Si chiama sezione (di Dedekind) di $\mathbb{Q}$ un sottoinsieme S di $\mathbb{Q}$ che soddisfi le seguenti tre proprietà:*

(i) *S è un segmento non vuoto;*
(ii) *S è superiormente limitato;*
(iii) *S non ha massimo.*

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme delle sezioni di $\mathbb{Q}$.

Esempi. I seguenti esempi illustrano che vi sono due tipi di sezioni (intuitivamente quelle che individuano un numero razionale e quelle che individuano un numero irrazionale).

(1) Sia $p \in \mathbb{Q}$. Allora $S_p = \{q \in \mathbb{Q} :\ q < p\}$ è una sezione. Più in generale, se S è una sezione che ha un estremo superiore (in $\mathbb{Q}$, si intende), allora usando il fatto che S non ha massimo si mostra facilmente che $S = S_{\sup S}$.
(2) L'insieme $S = \big\{q \in \mathbb{Q} : (q < 0) \vee (q^2 < 2)\big\}$ è una sezione e non è del tipo descritto in precedenza, a causa del fatto che non esistono razionali q tali che $q^2 = 2$.[9]

Le sezioni in (1) sono quelle che hanno estremo superiore in $\mathbb{Q}$, quella in (2) è un esempio di sezione senza estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Proposizione 2.10 (**Proprietà delle sezioni**).

(a) *La relazione di inclusione $\subseteq$ tra sezioni di $\mathbb{Q}$ definisce un ordinamento totale su $\mathbb{R}$.*
(b) *Ogni $E \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore (proprietà di completezza).*

---

[8] Come per l'equipotenza tra insiemi, non si può parlare di una relazione di equivalenza sull'"insieme di tutti i campi", ma solo nell'ambito di un qualunque insieme di campi.

[9] Si dimostri che se esistesse $q = \sup S$ in $\mathbb{Q}$, allora sarebbe $q^2 = 2$.

(c) *L'applicazione* $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ *data da* $\varphi(p) = S_p$ *è strettamente crescente* ($p < q \Rightarrow S_p \subset S_q$), *dunque iniettiva.*
(d) *Date* S, $S' \in \mathbb{R}$ *con* $S \subset S'$, *esiste* $r \in \mathbb{Q}$ *tale che* $S \subset S_r \subset S'$ *(densità di* $\mathbb{Q}$ *in* $\mathbb{R}$*).*

DIMOSTRAZIONE. (a) Ovviamente si tratta di un ordinamento. Per verificare che esso è totale, si usa ripetutamente la proprietà di segmento delle sezioni. Siano S, S' sezioni e supponiamo che $S' \not\subseteq S$. Preso $p \in S' \setminus S$, per la proprietà di segmento di S si ha necessariamente $q < p$ per ogni $q \in S$, cioè $S \subseteq S_p$. Ma essendo $p \in S'$, la proprietà di segmento di S' dà $S_p \subseteq S'$. Quindi $S \subseteq S'$.
(b) Sia $E \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato. Esiste quindi una sezione S^* di $\mathbb{Q}$ tale che $S \subseteq S^*$ per ogni $S \in E$. L'unione

$$S' = \bigcup_{S \in E} S \ ,$$

è pure una sezione. Infatti è non vuota ed è superiormente limitata perché contenuta in S^*. Se S' avesse massimo, questo apparterrebbe a una sezione $S \in E$ che dunque avrebbe un massimo, il che è assurdo. Infine, dato $q \in S'$, esiste $S \in E$ tale che $q \in S$. Se $q' < q$, allora $q' \in S$, e dunque $q' \in S'$, quindi S' è un segmento. Chiaramente S' è un maggiorante di E, perché $S \subseteq S'$ per ogni $S \in E$. D'altra parte, ogni maggiorante $\widetilde{S}$ di E contiene ogni $S \in E$, e dunque contiene S'. Quindi S' è il minimo maggiorante di E.
La (c) segue dall'osservazione che, dati $q, q' \in \mathbb{Q}$ con $q < q'$, $q \in S_{q'} \setminus S_q$, per cui $S_q \subset S_{q'}$.
Per dimostrare la (d) è sufficiente migliorare il ragionamento fatto nella dimostrazione del punto (a). Questo dimostra che, nelle presenti ipotesi, esiste $p \in S'$ tale che $S \subseteq S_p$. Siccome S' non ha massimo, esiste un elemento $p' \in S'$ con $p' > p$. Allora $S \subset S_{p'} \subset S'$. □

6. Operazioni su $\mathbb{R}$

Siano S, S' sezioni di $\mathbb{Q}$. Definiamo

$$S + S' = \{q + q' : \ q \in S \, , \, q' \in S'\} \ .$$

LEMMA 2.11. *Valgono le seguenti proprietà:*
(i) $S + S'$ *è una sezione di* $\mathbb{Q}$*;*
(ii) *la somma di sezioni gode delle proprietà commutativa e associativa;*
(iii) *per ogni* p, $p' \in \mathbb{Q}$, *vale* $S_p + S_{p'} = S_{p+p'}$.

DIMOSTRAZIONE. (i) Chiaramente, $S + S'$ è non vuoto. Se m, m' sono maggioranti rispettivamente di S, S' in $\mathbb{Q}$, allora $m + m'$ è un maggiorante di $S + S'$. Quindi $S + S'$ è superiormente limitato.
Supponiamo per assurdo che $S + S'$ abbia massimo m. Allora $m = q + q'$ per qualche $q \in S$ e $q' \in S'$. Siccome q non è massimo di S, esiste $r \in S$ con $r > q$. Ma allora $r + q' \in S + S'$ e $r + q' > m$, da cui l'assurdo.
Per dimostrare che $S + S'$ soddisfa la condizione di segmento, si prendano $q \in S$, $q' \in S'$ e $r \in \mathbb{Q}$ con $r < q + q'$. Allora $r - q < q'$, e dunque $r - q \in S'$. Quindi $r \in S + S'$.
(ii) segue immediatamente dalla definizione.
(iii) L'inclusione $S_p + S_{p'} \subseteq S_{p+p'}$ è ovvia. Per ottenere l'inclusione opposta, si prenda $r \in S_{p+p'}$. Allora $r = p + (r - p)$ e $r - p \in S_{p'}$. Dato che $S_{p'}$ non ha massimo, per $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{Q}$, abbastanza piccolo si ha ancora $r - p' + \epsilon \in S_{p'}$ e si conclude che $r \in S_p + S_{p'}$ osservando che $p - \epsilon \in S_p$. □

Definiamo ora[10]

$$
(6.1) \qquad -S := \begin{cases} S_{-p} & \text{se } S = S_p \text{ con } p \in \mathbb{Q} \ ; \\ \mathbb{Q} \setminus \{-q : \ q \in S\} = \{-q : q \notin S\} & \text{altrimenti} \ . \end{cases}
$$

Lemma 2.12. *Per ogni sezione S si ha $S + S_0 = S$ e $S + (-S) = S_0$.*

Dimostrazione. L'inclusione $S + S_0 \subseteq S$ segue dal fatto che ogni $q \in S_0$ è negativo, per cui, dato $p \in S$, $p + q < p$ e dunque è in S. Viceversa, dato $p \in S$, esiste $p' > p$, $p' \in S$. Allora $p = p' + (p - p') \in S + S_0$.
Se $S = S_p$ con $p \in \mathbb{Q}$, la seconda uguaglianza segue dal Lemma 2.11. Se invece S non è una delle S_p, dobbiamo dimostrare che

$$
S + \{-q : q \notin S\} = S_0 \ .
$$

Se $q \notin S$, allora q è un maggiorante di S e dunque, per ogni $p \in S$, si ha $p < q$, da cui $p + (-q) < 0$. Vale quindi l'inclusione $S + (-S) \subseteq S_0$.
Dimostrare l'inclusione opposta equivale a dimostrare che

$$
\forall\, r \in \mathbb{Q}\,,\ r < 0\,,\ \exists\, p \in S\,,\ q \notin S \ : \ p - q = r \ .
$$

Fissato $a \in S$, consideriamo in numeri della forma $a + k(-r)$ con $k \in \mathbb{N}$. Se $m \in \mathbb{Q}$ è un maggiorante di S, per la proprietà archimedea di $\mathbb{Q}$, esiste k tale che $k(-r) > m - a$. Si ha allora $a + k(-r) > m$, per cui $a + k(-r) \notin S$.
Esiste allora un minimo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a + k_0(-r) \notin S$. Ovviamente $k_0 > 0$ perché $a \in S$. Poniamo

$$
-q = a + k_0(-r) \ , \qquad p = a + (k_0 - 1)(-r) \ .
$$

Allora $q \notin S$ e $p \in S$ e $p - q = r$. □

Definiamo ora il prodotto di sezioni e ne studiamo le proprietà, limitandoci in un primo momento a sezioni "non negative", cioè contenenti S_0.

Definizione 2.13 (**Prodotto di sezioni non negative**). *Per S, $S' \supseteq S_0$, si pone*

$$
SS' = \{qq' : \ q, q' \geq 0\,,\ q \in S\,,\ q' \in S'\} \cup \{q \in \mathbb{Q} : \ q < 0\} \ .
$$

Con verifiche analoghe a quelle viste per la somma, si dimostrano le seguenti proprietà:

- il prodotto di due sezioni non negative è una sezione non negativa;
- per ogni p, $p' \in \mathbb{Q}$, $p, p' \geq 0$,

$$
(6.2) \qquad S_p S_{p'} = S_{pp'} \ .
$$

- il prodotto di sezioni non negative gode delle proprietà commutativa e associativa;
- per ogni sezione S non negativa, $S_1 S = S$ e $S_0 S = S_0$;
- per ogni sezione non negativa $S \neq S_0$ la sezione

$$
(6.3) \qquad S^{-1} = \begin{cases} S_{p^{-1}} & \text{se } S = S_p\,,\ p \in \mathbb{Q}\,, \\ \mathbb{Q} \setminus \{q^{-1} : \ q > 0\,,\ q \in S\} & \text{altrimenti,} \end{cases}
$$

  soddisfa la condizione $S^{-1} S = S_1$.

Esempio 2.14. Se $S = \{q \in \mathbb{Q} : (q < 0) \ \vee \ (q^2 < 2)\}$, allora $S^2 = S_2$.

[10] La complessità della definizione (6.1) è dovuta al fatto che $\mathbb{Q} \setminus \{-q : \ q \in S_p\}$ non è una sezione (perché?).

Se una almeno delle due sezioni S, S', diciamo S, è negativa, il prodotto e l'inverso si definiscono ponendo

$$SS' = S'S = -\big((-S)S'\big) \ , \qquad S^{-1} = -\big((-S)^{-1}\big) \ . \tag{6.4}$$

Si giunge così alla seguente conclusione.

TEOREMA 2.15 ($\mathbb{R}$ **è un campo**). *L'insieme $\mathbb{R}$ delle sezioni di $\mathbb{Q}$, munito della somma e del prodotto sopra definiti, è un campo il cui elemento neutro per la somma è S_0 e quello neutro per il prodotto è S_1. L'opposto e l'inverso sono definiti rispettivamente da (6.1) e (6.3)-(6.4). Infine valgono le proprietà*

$$S \le S' \quad \Longrightarrow \quad S + S'' \le S' + S'' \ \ \forall S'' \in \mathbb{R} \ ; \tag{6.5}$$

$$S,\, S' > 0 \quad \Longrightarrow \quad SS' > 0 \ . \tag{6.6}$$

La dimostrazione non è difficile, ma consiste in una lunga (e noiosa) serie di verifiche.
Nel seguito useremo le notazioni abituali per i numeri reali, facendo riferimento esplicito alle sezioni di Dedekind solo quando sarà conveniente. Attraverso l'identificazione $p \longleftrightarrow S_p$ tra numeri razionali e corrispondenti sezioni di Dedekind, consideriamo $\mathbb{Q}$ come un sottoinsieme (proprio, come abbiamo visto) di $\mathbb{R}$, grazie al fatto che il Lemma 2.11 e la formula (6.2) mostrano che $p \mapsto S_p$ è un omomorfismo di campi (i.e. le operazioni algebriche sui numeri razionali coincidono con quelle sulle corrispondenti sezioni). Inoltre indicheremo con l'abituale simbolo $\le$ la relazione d'ordine su $\mathbb{R}$.
L'enunciato che segue generalizza l'Esempio 2.14.

PROPOSIZIONE 2.16. *Dato un numero reale $x > 0$ e un intero $n \ge 2$ esiste uno e un solo numero reale positivo y, detto radice n-sima di x, tale che $y^n = x$.*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità di y segue dal fatto che, se $0 < a < b$, allora $0 < a^n < b^n$, e quindi due numeri positivi diversi non possono avere la stessa potenza n–esima.
Per dimostrare l'esistenza di y, possiamo supporre $x > 1$ (perché per $x = 1$ la tesi è ovvia e per $x < 1$ si può passare a x^{-1}).
Sia $S \supset S_1$ la sezione di $\mathbb{Q}$ corrispondente a x. Poniamo y uguale al numero corrispondente alla sezione (si verifica facilmente che è effettivamente una sezione)

$$S' = \big\{q \in \mathbb{Q} : \ (q^n \in S) \vee (q < 0)\big\} \ .$$

Poiché ogni $q \le 1$ è in S', si ha $y > 0$. Si vede facilmente che $(S')^n \subseteq S$: infatti se $q_i \in S'$, $1 \le i \le n$, allora

$$q_1 \cdot q_2 \cdots q_{n-1} \cdot q_n \le \big(\max_{1 \le i \le n} q_i\big)^n \in S \ .$$

Per dimostrare l'inclusione opposta basta far vedere che, per ogni $q \in S$, $q > 1$, esiste $r \in S'$ tale che $q < r^n$. Fissiamo $q' \in S$ tale che $q' > q$ e cerchiamo $r \in \mathbb{Q}$ tale che $q < r^n < q'$.
Scegliamo prima $\delta > 0$ sufficientemente piccolo in modo che $(1+\delta)^n < q'/q$. Questo è possibile perché, supponendo $\delta < 1$, si ha $(1+\delta)^n < 1 + \delta\big(n + \binom{n}{2} + \cdots + n + 1\big) < 1 + 2^n\delta$. Basta dunque prendere $\delta < \min\{1, 2^{-n}(\frac{q'}{q} - 1)\}$.
Poniamo quindi

$$r = (1+\delta)^k$$

dove $k \in \mathbb{N}$ è il massimo intero tale che $(1+\delta)^{kn} < q'$.[11] Allora la massimalità di k dà

$$q' \le (1+\delta)^{(k+1)n} = r^n(1+\delta)^n < r^n \frac{q'}{q} \ ,$$

[11] Essendo $(1+\delta)^{kn} \ge 1 + kn\delta$ per $k \ge 0$, un tale massimo esiste per la proprietà archimedea.

da cui segue che $q < r^n$. $\square$

Osservazione 2.17. Questa dimostrazione pone ancora l'enfasi sulla descrizione di $\mathbb{R}$ come insieme di sezioni di Dedekind. Nei capitoli seguenti abbandoneremo il riferimento alle sezioni per usare il molto più agile formalismo abituale, utilizzando fortemente la proprietà di completezza.
Per esempio, la stessa Proposizione 2.16 può essere dimostrata ponendo

$$y = \sup\{t \in \mathbb{R} : t > 0\ ,\ t^n < x\}\ ,$$

(che esiste in $\mathbb{R}$ perché l'insieme è superiormente limitato) e verificando che le due possibilità $y^n < x$ e $y^n > x$ sono entrambe da escludere.
Un altro esempio è il seguente. Avendo a disposizione le radici n-esime positive di numeri reali positivi, possiamo definire la *funzione esponenziale di base* $a > 0$ $\exp_a : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ come segue:

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ .$$

Supponendo ora $a > 1$ (il caso $a < 1$ si deduce, il caso $a = 1$ è ovvio) , definiamo, per $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp_a(x) = \sup\left\{a^{\frac{m}{n}} : \frac{m}{n} < x\right\}\ .$$

Dettagli e verifiche sono lasciati al lettore.

7. Campi ordinati

Accanto alla struttura di campo, abbiamo visto che $\mathbb{R}$ ha anche una struttura di ordine. La compatibilità tra queste due strutture espressa dalle formule (6.5) e (6.6) viene formalizzata in astratto con questa definizione.

Definizione 2.18 (**Campo ordinato**). *Un* campo ordinato *è un campo* $\mathbb{F}$ *dotato di un ordinamento totale* $\leq$ *tale che*

(a) *per ogni* x, y, $z \in \mathbb{F}$, $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$;
(b) x, $y \geq 0_{\mathbb{F}} \Longrightarrow x \cdot y \geq 0_{\mathbb{F}}$.

Abbiamo visto che sia $\mathbb{R}$ che $\mathbb{Q}$ sono campi ordinati. Ci sono tuttavia campi su cui non è possibile definire una relazione di ordine compatibile con la somma e il prodotto (l'esempio più importante è il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi[12]). Dagli assiomi di campo ordinato possono essere dedotte numerose proprietà generali, tra cui (come sempre usiamo $a > b$ e $a \geq b$ come sinonimi di $b < a$ e $b \leq a$ rispettivamente):

- per ogni $x \in \mathbb{F}$, $x^2 \geq 0_{\mathbb{F}}$, in particolare $1_{\mathbb{F}} = (1_{\mathbb{F}})^2 > 0_{\mathbb{F}}$;
- $x \leq y\ ,\ a \geq 0 \Longrightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$;
- $x > 0_{\mathbb{F}} \Longrightarrow -x < 0_{\mathbb{F}}$ e $x^{-1} > 0_{\mathbb{F}}$;
- $x \cdot y > 0_{\mathbb{F}}$ se e solo se x e y sono concordi (cioè o entrambi > 0 o entrambi < 0);
- l'insieme $P = \{x \in \mathbb{F} : x \geq 0\}$ soddisfa le seguenti proprietà:
  $$x, y \in P \ \Longrightarrow x + y\ ,\ x \cdot y \in P\ , \qquad P \cap (-P) = \{0_{\mathbb{F}}\}\ , \qquad P \cup (-P) = \mathbb{F}\ ;$$
  viceversa ogni insieme P che le soddisfi induce un ordinamento ponendo $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$;
- per ogni n, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0_{\mathbb{F}} \Longrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_{\mathbb{F}}$.[13]

[12] Qualunque assegnazione del segno dell'unità immaginaria i implica $\mathrm{i}^2 = -1_{\mathbb{C}} > 0_{\mathbb{C}}$, in contrasto con il fatto che $1_{\mathbb{F}} > 0_{\mathbb{F}}$ in tutti i campi ordinati $\mathbb{F}$. Un altro esempio è dato dai campi $\mathbb{Z}_p$.

[13] Si dimostra che questa è condizione necessaria e sufficiente perché il campo sia ordinabile.

Abbiamo anche visto che $p \mapsto S_p$ è un omomorfismo da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$; più in generale, vale il seguente risultato che mostra come, a meno di isomorfismi, $\mathbb{Q}$ sia il più piccolo campo ordinato.

LEMMA 2.19. *Dato un campo ordinato $\mathbb{F}$, esiste un unico omomorfismo $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{F}$. Tale omomorfismo è strettamente crescente, quindi iniettivo, e stabilisce un isomorfismo tra $\mathbb{Q}$ e il sottocampo $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}} = \varphi(\mathbb{Q})$ di $\mathbb{F}$.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni omomorfismo $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{F}$ deve essere necessariamente $\varphi(0) = 0_{\mathbb{F}}$ e $\varphi(1) = 1_{\mathbb{F}}$, quindi iniziamo col definire φ in questo modo. Induttivamente, si deve anche avere, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = \overbrace{1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}}^{n \text{ volte}} \stackrel{\text{def}}{=} n_{\mathbb{F}} \ .$$

Essendo $(n+1)_{\mathbb{F}} = n_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}} > n_{\mathbb{F}}$, φ è univocamente determinata e strettamente crescente su $\mathbb{N}$. Inoltre ogni omomorfismo φ deve soddisfare

$$\varphi(-n) = -\varphi(n) = -n_{\mathbb{F}} \ ,$$

quindi adottando questa come definizione si vede che φ si prolunga in modo univoco a una funzione strettamente crescente su $\mathbb{Z}$. Si verifica facilmente che le proprietà (4.1) sono soddisfatte per x, $y \in \mathbb{Z}$.
Preso ora $p = m/n \in \mathbb{Q}$, per poter soddisfare alla condizione $\varphi(m) = \varphi(m/n) \cdot \varphi(n)$, deve necessariamente essere

$$\varphi\Big(\frac{m}{n}\Big) = \varphi(m) \cdot \big(\varphi(n)\big)^{-1} = m_{\mathbb{F}} \cdot (n_{\mathbb{F}})^{-1} \ .$$

Questa è una buona definizione, perché sostituendo $(mk)/(nk)$ al posto di m/n si ottiene lo stesso risultato, quindi la adottiamo per estendere φ a $\mathbb{Q}$. Inoltre, prendiamo $m/n < m'/n'$ in $\mathbb{Q}$, supponendo n, $n' > 0$. Allora $\varphi(n)$, $\varphi(n') > 0_{\mathbb{F}}$, e dunque

$$mn' < m'n \Longrightarrow \varphi(m)\varphi(n') < \varphi(m')\varphi(n) \Longrightarrow \varphi(m) \cdot \varphi(n)^{-1} < \varphi(m') \cdot \varphi(n')^{-1} \ .$$

Quindi φ è strettamente crescente. □

Abbiamo visto nel corso della dimostrazione precedente che possiamo individuare dentro un campo $\mathbb{F}$ una copia isomorfa dei numeri naturali $\mathbb{N}_{\mathbb{F}} = \varphi(\mathbb{N})$, i cui elementi continueremo a indicare per semplicità con n (facciamo eccezione solo per $0_{\mathbb{F}}$ e $1_{\mathbb{F}}$). Possiamo usarla per dare la definizione di campo archimedeo.

DEFINIZIONE 2.20 (**Campo archimedeo**). *Un campo ordinato $\mathbb{F}$ si dice* archimedeo *se, dati x, $y > 0$, esiste $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ tale che $n \cdot x > y$.*

Abbiamo visto che $\mathbb{Q}$ è un campo archimedeo. Dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ segue facilmente che anche $\mathbb{R}$ è archimedeo.

PROPOSIZIONE 2.21. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *$\mathbb{F}$ è archimedeo;*
(ii) *$\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ non è superiormente limitato;*
(iii) *$\inf\{n^{-1} : \ n \in \mathbb{N}^*_{\mathbb{F}}\} = 0_{\mathbb{F}}$;*
(iv) *dati x, $y \in \mathbb{F}$ con $x < y$, esiste $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ tale che $x < q < y$.*

La condizione (iv) si esprime dicendo che $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ è *denso in* $\mathbb{F}$.

DIMOSTRAZIONE. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Se $\mathbb{F}$ è archimedeo, dato $x > 0$ e scelto $y = 1_{\mathbb{F}}$, segue che esiste $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ con $n_{\mathbb{F}} > x$. Quindi $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ non ha maggioranti. Viceversa, se vale (ii), dati $x, y > 0$ esiste $n_{\mathbb{F}}$ tale che $n_{\mathbb{F}} > y/x$. Dunque $\mathbb{F}$ è archimedeo.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii). La (iii) vuol dire che

$$\forall\, x > 0_{\mathbb{F}}\ \exists\, n \in \mathbb{N}^*_{\mathbb{F}}\ :\ n^{-1} < x\ .$$

Sostituendo $y = x^{-1}$, questa condizione equivale a dire che per ogni $y > 0_{\mathbb{F}}$ esiste $n \in \mathbb{N}^*_{\mathbb{F}}$ tale che $y < n$, e questa è la (ii).
(iii)$\Rightarrow$(iv). Il caso in cui $x < 0_{\mathbb{F}} < y$ è ovvio. Possiamo dunque supporre che x e y siano concordi. Passando eventualmente agli opposti, ci riconduciamo al caso $0_{\mathbb{F}} < x < y$.
Sia $\delta = y - x > 0_{\mathbb{F}}$. Per la (iii), esiste allora $k \in \mathbb{N}^*_{\mathbb{F}}$ tale che $k^{-1} < \delta$. Consideriamo l'insieme $\{n \cdot k^{-1}\ :\ n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}\}$. Per la (i), esso contiene elementi maggiori di x. Sia $m \in \mathbb{N}^*_{\mathbb{F}}$ il minimo intero tale che $m \cdot k^{-1} > x$. Allora $(m-1) \cdot k^{-1} \leq x$ e quindi

$$m \cdot k^{-1} = (m-1) \cdot k^{-1} + k^{-1} < x + \delta = y\ .$$

Dunque $x < m \cdot k^{-1} < y$.
(iv)$\Rightarrow$(iii). Dato $x > 0_{\mathbb{F}}$ esiste $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ tale che $0_{\mathbb{F}} < \frac{m}{n} < x$. Ma allora anche $\frac{1}{n} < x$. $\square$

Esempio. Su $\mathbb{R}(x)$, il campo delle funzioni razionali a coefficienti reali, consideriamo il seguente ordinamento: $p/q \leq r/s$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x > a$, $q(x), s(x) \neq 0$ e $p(x)/q(x) \leq r(x)/s(x)$.
Si dimostri per esercizio che: (a) $\mathbb{R}(x)$ è un campo ordinato; (b) $\mathbb{R}(x)$ non è archimedeo. Si verifichi con opportuni controesempi che per $\mathbb{R}(x)$ non vale nessuna delle proprietà (ii), (iii), (iv) della Proposizione 2.21.

8. Campi ordinati completi

Definizione 2.22 (**Campo ordinato completo**). *Un campo ordinato si dice* completo *se ogni suo sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato ha estremo superiore.*

Lemma 2.23 (**Completo implica archimedeo**). *Ogni campo ordinato e completo è archimedeo.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{F}$ ordinato e completo, e supponiamo per assurdo che non sia archimedeo. Allora $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ sarebbe superiormente limitato, e dunque ammetterebbe estremo superiore $s \in \mathbb{F}$. Dalla condizione $s \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ segue che anche $s - 1_{\mathbb{F}} \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{F}}$. Ma allora $s - 1_{\mathbb{F}}$ sarebbe un maggiorante di $\mathbb{N}_{\mathbb{F}}$ strettamente minore di s, da cui l'assurdo. $\square$

Abbiamo visto che $\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo. Dimostreremo alla fine di questo paragrafo che questa proprietà identifica $\mathbb{R}$ univocamente, a meno di isomorfismi. Cominciamo con un'analisi delle sezioni di Dedekind di una qualunque campo archimedeo.
Sia dunque $\mathcal{F}$ un campo ordinato archimedeo. Analogamente a quanto fatto con $\mathbb{Q}$ nel paragrafo 5, chiamiamo *sezione di* $\mathbb{F}$ un segmento non vuoto, superiormente limitato e privo di massimo.
Indichiamo con $\overline{\mathbb{F}}$ l'insieme di tali sezioni di Dedekind e definiamo su $\overline{\mathbb{F}}$ un ordinamento e operazioni di somma e prodotto esattamente come nel paragrafo 5.
In modo del tutto analogo si dimostra che

- $\overline{\mathbb{F}}$ è un campo ordinato completo;
- l'applicazione

$$\varphi(x) := S_x = \{y \in \mathbb{F} : y < x\}\ ,$$

da $\mathbb{F}$ in $\overline{\mathbb{F}}$, stabilisce un isomorfismo tra $\mathbb{F}$ e un sottocampo denso di $\overline{\mathbb{F}}$.

Il campo $\overline{\mathbb{F}}$ si chiama il *completamento di* $\mathbb{F}$.
Se $\mathbb{F}$ è già completo, l'applicazione φ è suriettiva e dunque $\overline{\mathbb{F}}$ è isomorfo a $\mathbb{F}$. Si osservi infatti che, per la completezza di $\mathbb{F}$, ogni sezione S ammette un estremo superiore e che, se $x = \sup S$, allora $S = S_x$.

Lemma 2.24. *Per ogni $\mathbb{F}$ archimedeo, $\overline{\mathbb{F}}$ è isomorfo a $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ il sottocampo di $\mathbb{F}$ definito nel Lemma 2.19.
Consideriamo allora l'applicazione ψ che alla sezione $S \in \overline{\mathbb{F}}$ associa $\psi(S) = S \cap \mathbb{Q}_{\mathbb{F}} \subset \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$. Si vede facilmente che $\psi(S)$ è una sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$. Mostriamo che ψ è un isomorfismo tra $\overline{\mathbb{F}}$ e $\overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}}$.
Per la densità di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ in $\mathbb{F}$ (Proposizione 2.21), date due sezioni $S \subset S' \in \overline{\mathbb{F}}$, esiste $q \in \mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ tale che $q \in S' \setminus S$. Allora $\psi(S) \subset \psi(S')$, cioè ψ è strettamente crescente e dunque iniettiva.
Per dimostrare la suriettività, sia $S \in \overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}}$. Allora

$$S' = \{x \in \mathbb{F} : \exists y \in S\,,\ x < y\}$$

è una sezione di Dedekind di $\mathbb{F}$ e, sempre per la densità di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ in $\mathbb{F}$, si verifica che $\psi(S') = S$.
Con considerazioni simili basate sulla densità di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ in $\mathbb{F}$, si dimostra che $\psi(S+S') = \psi(S)+\psi(S')$ e analogamente per il prodotto.
Sia ora φ l'isomorfismo di $\mathbb{Q}$ su $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ l'isomorfismo nel Lemma 2.19. Data una sezione di Dedekind S di $\mathbb{Q}$, $\varphi(S)$ è ovviamente una sezione di Dedekind di $\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}$ e questo consente di estendere φ a un isomorfismo $\bar{\varphi}$ di $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ su $\overline{\mathbb{Q}_{\mathbb{F}}}$. In conclusione

$$\psi^{-1} \circ \bar{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}$$

è un isomorfismo. □

Corollario 2.25. *Ogni campo ordinato completo è isomorfo a $\mathbb{R}$. Ogni campo ordinato archimedeo è isomorfo a un campo $\mathbb{F}$ tale che $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{R}$.*

CAPITOLO 3

COMPLEMENTI SULLE SUCCESSIONI DI NUMERI REALI

Indicheremo nel seguito con (x_n) una successione di numeri reali, i.e. una mappa $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ il cui valore in $n \in \mathbb{N}$ viene indicato con x_n (si noti la distinzione tra la notazione usata per la successione e quella usata per il suo valore n–simo). Useremo anche la notazione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando vogliamo dare maggiore evidenza all'insieme degli indici. Una *sottosuccessione* (detta anche successione estratta) $(x_{n(k)})$ è una successione che si ottiene mediante la composizione $x\circ n$, ove $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente (intuitivamente, la funzione n corrisponde alla scelta di un sottoinsieme di indici e $n(k)$ è il $(k + 1)$–mo indice scelto, da qui l'aggettivo "estratta").
Questo capitolo consiste di tre parti tra loro indipendenti. Nella prima (paragrafo 1) diamo le nozioni di massimo e minimo limite con i teoremi relativi. Nella seconda (paragrafi 2 e 3) diamo un teorema generale per risolvere forme indeterminate nel calcolo dei limiti (teorema di Stolz-Cesaro), e da esso deduciamo i teoremi di Cesaro su medie aritmetiche e geometriche di termini di una successione. Nella terza (paragrafi 4 e 5) introduciamo la terminologia di uso comune nel *confronto asintotico* di successioni.
Diamo per noti nozioni e teoremi principali relativi alle successioni di numeri reali, e in particolare:

- definizione di limite reale per una successione $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ (chiameremo tali successioni *convergenti*)
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \quad\iff\quad \forall\epsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}\, (n \geq m \Rightarrow |x_n - \ell| < \epsilon)$$
e analoghe definizioni per i casi $\ell = \pm\infty$ (chiameremo queste ultime *divergenti* a $\pm\infty$);
- teorema di unicità del limite, finito o infinito;
- permanenza del segno (se $x_n \geq 0$ frequentemente[1], allora $\ell \geq 0$, se $\ell > 0$ allora $x_n > 0$ definitivamente);
- criterio del confronto (se $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, allora $a_n \leq b_n$ frequentemente, implica $a \leq b$, mentre $a > b$ implica, per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ tale che $a > b + \delta$, che $a_n > b_n + \delta$ vale definitivamente);
- criterio "dei due carabinieri" per l'esistenza del limite, finito o infinito (se $\lim_n a_n = \ell = \lim_n c_n$ e $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente allora $\lim_n b_n = \ell$);
- esistenza del limite, finito o infinito, per successioni monotone (in questo enunciato, per il caso delle successioni monotone limitate, è cruciale la completezza di $\mathbb{R}$);
- limitatezza di una successione convergente;
- permanenza del limite per sottosuccessioni di successioni convergenti o divergenti a $\pm\infty$;
- somme e prodotti di successioni convergenti;

[1]Adottiamo la terminologia per cui un predicato $P(n)$ dipendente da $n \in \mathbb{N}$ è vero
– *definitivamente*, se esiste n_0 tale che $P(n)$ sia vero per ogni $n \geq n_0$,
– *frequentemente*, se $P(n)$ è vero per infiniti valori di n (equivalentemente se per ogni n esiste $n' > n$ tale che $P(n')$ sia vero).
Si noti che "$\neg P(n)$ vale definitivamente" equivale a "$\neg\big(P(n)$ vale frequentemente$\big)$".

- criterio di convergenza di Cauchy (se (x_n) soddisfa la proprietà che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x_m| < \epsilon$ per ogni n, $m \geq n_0$, allora (x_n) è convergente). Anche in questo enunciato è cruciale la completezza di $\mathbb{R}$.

1. Massimo e minimo limite

In questa sezione introdurremo le nozioni di massimo e minimo limite, sovente utili per snellire alcune dimostrazioni nelle quali l'esistenza del limite non è nota a priori.
E' opportuno introdurre la nozione di *retta estesa*,

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} ,$$

dove $\pm\infty$ sono due elementi distinti non contenuti in $\mathbb{R}$. Su $\overline{\mathbb{R}}$ introduciamo l'ordinamento $\leq$ che estende quello di $\mathbb{R}$ con l'aggiunta delle relazioni

$$-\infty < +\infty , \qquad -\infty < x , \qquad x < +\infty , \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} ,$$

ed estendere la nozione di limite a successioni a valori in $\overline{\mathbb{R}}$, conservandone la definizione formale sia nel caso di limite finito che di limite infinito.

Definizione 3.1 (**Massimo e minimo limite**). *Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori in $\mathbb{R}$. Il massimo e minimo limite*[2] *di $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono definiti rispettivamente da:*

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} x_n , \qquad \liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} x_n .$$

Si noti che i termini della successione $(\sup_{n\geq k} x_n)_{k\in\mathbb{N}}$ possono assumere il valore $+\infty$, e quelli della successione $(\inf_{n\geq k} x_n)_{k\in\mathbb{N}}$ possono assumere il valore $-\infty$. Si noti anche che se esiste un k per cui $\sup_{n\geq k} x_n = +\infty$, allora lo stesso vale per ogni k. Questo si verifica quando la successione (x_n) non è limitata superiormente. Le stesse considerazioni valgono per la condizione $\inf_{n\geq k} x_n = -\infty$.
La definizione di massimo e minimo limite è ben posta, nel senso che essi esistono *sempre*, finiti o infiniti. Infatti le successioni $k \mapsto \sup\limits_{n\geq k} x_n$ e $k \mapsto \inf\limits_{n\geq k} x_n$ sono monotone; inoltre il criterio di confronto tra successioni dà

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n .$$

È inoltre facile verificare che valgono le seguenti proprietà:

- $\limsup_{n\to\infty} x_n = -\liminf_{n\to\infty} -x_n$,
- $\limsup_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$x_n < \ell + \varepsilon \quad \text{definitivamente} , \qquad x_n > \ell - \varepsilon \quad \text{frequentemente.}$$

- $\liminf_{n\to\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$x_n > \ell - \varepsilon \quad \text{definitivamente} , \qquad x_n < \ell + \varepsilon \quad \text{frequentemente.}$$

- con le convenzioni indicate in parentesi, si hanno le disuguaglianze

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n + \limsup\limits_{n\to\infty} y_n , & \big(+\infty + (-\infty) = +\infty\big) \\ \liminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \geq \liminf\limits_{n\to\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to\infty} y_n . & \big(+\infty + (-\infty) = -\infty\big) \end{cases} \tag{1.1}$$

- tranne che nel caso di forma indeterminata $+\infty - \infty$, le disuguaglianze in (1.1) diventano uguaglianze se uno almeno dei limiti superiori o inferiori è un limite.

[2]Si usano anche le dizioni "limite superiore, inferiore", così come le notazioni maxlim, minlim.

Alcuni dei fatti elencati nella sezione precedente possono essere migliorati o riformulati usando i massimi e minimi limiti, vediamo come:

- (criterio di convergenza) (x_n) ha limite, finito o infinito, se e solo se $\limsup_n x_n \leq \liminf_n x_n$, e in tal caso il valore comune del massimo e minimo limite è il valore del limite;
- (permanenza del segno) se $x_n \geq 0$ frequentemente allora $\limsup_n x_n \geq 0$, se $x_n \geq 0$ definitivamente allora $\liminf_n x_n \geq 0$;[3]
- (criterio "dei due carabinieri") $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e $\limsup_n c_n \leq \liminf_n a_n$ implica che le tre successioni hanno limite, finito o infinito, e che i tre limiti coincidono.

Con riferimento all'ultimo criterio, nelle ipotesi enunciate sulle tre successioni vale infatti

$$\limsup_{n\to\infty} c_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} c_n \ , \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} c_n \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \ ,$$

dalle quali deduciamo che (c_n) e (a_n) convergono, e che i limiti sono gli stessi.
A titolo di esempio, vediamo anche come si dimostra con il massimo e il minimo limite la convergenza delle successioni di Cauchy.

Teorema 3.2. *Ogni successione (x_n) di Cauchy è convergente.*

Dimostrazione. Scegliendo $\epsilon = 1$ e $M = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{n_0}| + 1\}$ si vede facilmente che $|x_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi (x_n) è limitata. Per $\epsilon > 0$ arbitrario, esiste $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_n \leq \epsilon + x_m \qquad \forall n,\, m \geq n_\epsilon \ .$$

Passando al limite superiore in n otteniamo $\limsup_n x_n \leq \epsilon + x_m$ per ogni $m \geq n_\epsilon$. Possiamo allora passare al limite inferiore in m, ottenendo

$$\limsup_{n\to\infty} x_n \leq \epsilon + \liminf_{m\to\infty} x_m \ .$$

Dato che ϵ è arbitrario, è soddisfatto il criterio di convergenza $\limsup \leq \liminf$. □

La seguente proposizione chiarisce l'origine dei termini "massimo e minimo limite". Osserviamo preliminarmente che

$$\limsup_{k\to\infty} x_{n(k)} \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \ , \qquad \liminf_{k\to\infty} x_{n(k)} \geq \liminf_{n\to\infty} x_n \tag{1.2}$$

per ogni successione estratta $(x_{n(k)})$ (la semplice verifica è lasciata per esercizio, si veda anche la (1.3)).

Proposizione 3.3 (Caratterizzazione del massimo e minimo limite). *Sia (x_n) una successione a valori in $\mathbb{R}$ e sia $(x_{n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione avente limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \ell \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \ .$$

Inoltre esistono sottosuccessioni $\big(x_{n'(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ e $\big(x_{n''(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ di (x_n) tali che

$$\lim_{k\to\infty} x_{n'(k)} = \limsup_{n\to\infty} x_n \ , \qquad \lim_{n\to\infty} x_{n''(k)} = \liminf_{n\to\infty} x_n \ .$$

Quindi

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \max\big\{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n(k)} : \ (x_{n(k)}) \text{ successione estratta di } (x_n), \text{ avente limite}\big\} \ , \\ \liminf\limits_{n\to\infty} x_n \ = \min\big\{\lim\limits_{k\to\infty} x_{n(k)} : \ (x_{n(k)}) \text{ successione estratta di } (x_n), \text{ avente limite}\big\} \ . \end{cases}$$

[3] Le contronominali sono rispettivamente: se $\limsup_n x_n < 0$ allora $x_n < 0$ definitivamente, se $\liminf_n x_n < 0$ allora $x_n < 0$ frequentemente.

DIMOSTRAZIONE. Sostituendo eventualmente (x_n) con $(-x_n)$, possiamo limitarci a considerare la prima formula. Per ogni successione estratta $(x_{n(k)})$ vale

$$x_{n(k)} \leq \sup_{i \geq n(k)} x_i \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ . \tag{1.3}$$

Dato che la successione a destra è estratta di una successione il cui limite è $\limsup_n x_n$, se anche la successione a sinistra ha limite si ottiene $\lim_k x_{n(k)} \leq \limsup_n x_n$.
Viceversa, dobbiamo ora costruire una successione estratta $(x_{n(k)})$ il cui limite è proprio $\limsup_n x_n$, che indicheremo con ℓ. Supponiamo che $\ell \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \geq 1$ determiniamo (grazie alla definizione di limite, con $\epsilon = 1/k$) un intero $n(k)$ tale che

$$x_{n(k)} > \ell - \frac{1}{k} \ \ \forall k \geq 1 \quad \text{e} \quad n(k) > n(k-1) \ \ \forall k \geq 2 \ .$$

Si noti che questo è possibile, in quanto a k fissato la disuguaglianza $x_n > \ell - 1/k$ vale per infiniti indici n, grazie alla convergenza di $\sup_{n \geq m} x_n$ a ℓ per $m \to \infty$. Abbiamo allora per costruzione (e per la proprietà archimedea)

$$\liminf_{k \to \infty} x_{n(k)} \geq \ell \ ,$$

mentre la (1.2) dà $\limsup_k x_{n(k)} \leq \ell$. Concludiamo quindi che $(x_{n(k)})$ ha limite e che il limite vale ℓ.
Se $\ell = -\infty$ la tesi è banale, se $\ell = +\infty$ si ripete la dimostrazione precedente sostituendo $\ell - 1/k$ con k. □

Come conseguenza della Proposizione 3.3 otteniamo il teorema di Bolzano–Weierstrass sulla retta reale. Un'altra classica dimostrazione del teorema passa attraverso il metodo di bisezione.[4]

TEOREMA 3.4 (**Bolzano–Weierstrass**). *Ogni successione (x_n) ha una sottosuccessione avente limite. In particolare ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.*

2. Confronti asintotici tra successioni

DEFINIZIONE 3.5 (**I simboli O e o di Landau**). *Siano (a_n) e (b_n) due successioni.*

(a) *Si dice che*

$$a_n = O(b_n) \ ,$$

se esistono un indice n_0 e una costante $M \geq 0$ tali che

$$\forall\, n \geq n_0 \ , \quad |a_n| \leq M|b_n| \ .$$

(b) *Si dice che*

$$a_n = o(b_n) \ ,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice n_0 tale che

$$\forall\, n \geq n_0 \ , \quad |a_n| \leq \varepsilon|b_n| \ .$$

[4] Supponendo ad esempio la successione (x_n) contenuta in $[0, L]$, si divide l'intervallo $[0, L]$ in due intervalli chiusi di lunghezza $L/2$, scegliendone uno nel quale i termini della successione cadono infinite volte; iterando questo procedimento, abbiamo intervalli $I_k \subseteq [0, L]$ di lunghezza $L/2^k$ nei quali i termini della successione cadono infinite volte. Basta allora scegliere ricorsivamente $n(k)$ in modo che $n(k+1) > n(k)$ e $x_{n(k+1)} \in I_{k+1}$ per avere una successione $(x_{n(k)})$ di Cauchy, quindi convergente. Si noti che, scegliendo tutte le volte che è possibile l'intervallo di destra (sinistra) si seleziona proprio una successione convergente al $\limsup$ ($\liminf$).

Si noti che se $b_n \neq 0$ definitivamente, dimodoché il rapporto a_n/b_n abbia senso, allora

$$(2.1) \qquad a_n = O(b_n) \iff \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} < +\infty \ , \qquad a_n = o(b_n) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \ .$$

Le proprietà seguenti, di transitività e stabilità rispetto a somme e prodotti delle relazioni o e O, sono di semplice verifica, che viene lasciata per esercizio:

(1) $a_n = o(b_n) \implies a_n = O(b_n)$;
(2) $a_n = O(b_n)$, $b_n = O(c_n) \Longrightarrow a_n = O(c_n)$;
(3) $a_n = O(b_n)$, $b_n = o(c_n) \Longrightarrow a_n = o(c_n)$;
(4) $a_n = o(b_n)$, $b_n = O(c_n) \Longrightarrow a_n = o(c_n)$;
(5) $a_n = O(b_n)$, $a'_n = O(b_n) \Longrightarrow a_n + a'_n = O(b_n)$;
(6) $a_n = o(b_n)$, $a'_n = o(b_n) \Longrightarrow a_n + a'_n = o(b_n)$;
(7) $a_n = O(b_n)$, $a'_n = O(b'_n) \Longrightarrow a_n a'_n = O(b_n b'_n)$;
(8) $a_n = O(b_n)$, $a'_n = o(b'_n) \Longrightarrow a_n a'_n = o(b_n b'_n)$.

La relazione $a_n = o(b_n)$ si esprime anche dicendo che a_n è *trascurabile rispetto a* b_n. Questa terminologia si riferisce al fatto che nel calcolo dei limiti si applica spesso il:

Teorema 3.6 (**Principio di eliminazione degli infinitesimi di ordine superiore**).

$$(2.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + o(a_n)}{c_n + o(c_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} \ .$$

Più precisamente, se esiste uno dei due limiti, allora esiste l'altro, e sono uguali.

Dimostrazione. Mostriamo il principio nel caso $o(c_n) = 0$, ripetendo due volte il ragionamento poi si arriva alla formula (2.2). Supponiamo quindi che esista $\ell := \lim_n a_n/c_n$ e mostriamo che $\ell = \lim_n (a_n + o(a_n))/c_n$ (l'implicazione inversa si mostra considerando $a'_n = a_n + o(a_n)$). Cambiando se necessario il segno a numeratore e denominatore possiamo supporre che $c_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|o(a_n)| \leq \varepsilon |a_n|$ per ogni $n \geq n_0$; abbiamo allora

$$(a_n + o(a_n)) \leq a_n(1+\varepsilon) \quad \text{se } a_n \geq 0 \ , \qquad (a_n + o(a_n)) \leq a_n(1-\varepsilon) \quad \text{se } a_n \leq 0 \ .$$

Da questo deduciamo, dividendo per c_n, che $\limsup_n (a_n + o(a_n))/c_n \leq \max\{(1+\varepsilon)\ell, (1-\varepsilon)\ell\}$. Essendo ε arbitrario si ottiene $\limsup_n (a_n + o(a_n))/c_n \leq \ell$.
La disuguaglianza $\liminf_n (a_n + o(a_n))/c_n \geq \ell$ si mostra analogamente. □

Definizione 3.7. *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni. Si dice che* $a_n \asymp b_n$ *se* $a_n = O(b_n)$ *e* $b_n = O(a_n)$.

Usando le proprietà (2) e (3), si dimostra facilmente quanto segue.

Proposizione 3.8.

(i) *La relazione* $\asymp$ *è una relazione di equivalenza sull'insieme delle successioni a valori reali.*
(ii) *Se* $a_n \asymp b_n$*, per ogni successione* (c_n) *vale*

$$(2.3) \qquad c_n = O(a_n) \iff c_n = O(b_n) \quad \text{e} \quad c_n = o(a_n) \iff c_n = o(b_n) \ ,$$

$$(2.4) \qquad a_n = O(c_n) \iff b_n = O(c_n) \quad \text{e} \quad a_n = o(c_n) \iff b_n = o(c_n) \ .$$

Le classi di equivalenza modulo $\asymp$ si chiamano *ordini di grandezza* di successioni.

Definizione 3.9. *Siano* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *due ordini di grandezza e siano* $(a_n) \in \mathbf{a}$, $(b_n) \in \mathbf{b}$. *Diciamo che* $\mathbf{a} \preceq \mathbf{b}$ *se* $a_n = O(b_n)$.

Si vede facilmente, grazie alle implicazioni (2.3) e (2.4), che la validità di questa condizione è indipendente dalla scelta degli elementi di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

PROPOSIZIONE 3.10. *La relazione $\preceq$ è ben definita sull'insieme degli ordini di grandezza di successioni, ed è una relazione d'ordine.*

Osserviamo che

- La relazione $\preceq$ non è un ordinamento totale: si prendano, per esempio
$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari }, \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari }; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari }, \\ n & \text{se } n \text{ è dispari }. \end{cases}$$
I rispettivi ordini di grandezza non sono confrontabili (per esercizio, si produca un esempio simile con successioni non decrescenti).
- Se $b_n \neq 0$ definitivamente e esiste, finito o infinito, $\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, allora
$$a_n = O(b_n) \iff \ell \in \mathbb{R}\ , \qquad a_n = o(b_n) \iff \ell = 0\ , \qquad a_n \asymp b_n \iff \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ .$$
- Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ due ordini di grandezza e si scelgano $(a_n) \in \mathbf{a}$, $(b_n) \in \mathbf{b}$. Le due condizioni $a_n = o(b_n)$ e $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ non coincidono. Limitandoci al caso in cui $b_n \neq 0$ definitivamente, si ha infatti
$$a_n = o(b_n) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\ ,$$
$$\mathbf{a} \prec \mathbf{b} \iff 0 = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty\ .$$
Si prendano, ad esempio, le successioni
$$a_n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}, \qquad b_n = n\ .$$
I rispettivi ordini di grandezza $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ soddisfano la condizione $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$, ma $a_n \neq o(b_n)$.

Introduciamo ora una relazione di equivalenza più fine (i.e. con classi di equivalenza più piccole) di $\asymp$.

DEFINIZIONE 3.11 (**Equivalenza asintotica**). *Siano (a_n), (b_n) successioni. Diciamo che sono* asintoticamente equivalenti*, e scriveremo $a_n \sim b_n$, se $a_n - b_n = o(b_n)$.*

Anche in questo caso si può mostrare, usando la proprietà (2.1), che per successioni definitivamente non nulle una formulazione equivalente è $\lim_n a_n/b_n = 1$. In ogni caso, dalla uguaglianza (2.2) deduciamo che vale il principio di sostituzione delle successioni equivalenti
$$a_n \sim b_n,\ c_n \sim d_n \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{d_n}\ ,$$
con la solita convenzione che se esiste uno dei due limiti esiste l'altro, e coincidono. Che $\sim$ sia una relazione di equivalenza è parte del seguente enunciato.

PROPOSIZIONE 3.12.

(i) *Vale l'implicazione $a_n \sim b_n \Longrightarrow a_n \asymp b_n$.*
(ii) *$\sim$ è una relazione di equivalenza tra successioni.*

DIMOSTRAZIONE. Se $a_n \sim b_n$, dato $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - b_n| \le \varepsilon |b_n| \qquad \forall n \ge n_0 \ .$$

Per tali valori di n,

$$|a_n| \le |a_n - b_n| + |b_n| \le (1+\varepsilon)|b_n| \qquad \text{e} \qquad |a_n| \ge |b_n| - |a_n - b_n| \ge (1-\varepsilon)|b_n| \ .$$

Questo dimostra il punto (i). Per dimostrare il punto (ii) osserviamo innanzitutto che la proprietà riflessiva di $\sim$ è ovvia, mentre la proprietà simmetrica segue dalla seconda equivalenza nella formula (2.3) con $c_n = a_n - b_n$. Assumendo poi che $a_n \sim b_n$ e $b_n \sim c_n$, si ha, per la proprietà (5),

$$a_n - c_n = (a_n - b_n) + (b_n - c_n) = o(b_n) + o(c_n) = o(c_n) + o(c_n) = o(c_n) \ .$$

□

3. Ordini di infinito e di infinitesimo

Sia α un numero reale positivo. Una successione (a_n) si dice un *infinito di ordine* α, rispettivamente un *infinitesimo di ordine* α, se $a_n \asymp n^\alpha$, rispettivamente $a_n \asymp n^{-\alpha}$.

In modo analogo si definiscono infiniti e infinitesimi di ordine α rispetto a una successione "campione" (b_n) positiva e infinita, scelta in sostituzione della successione $b_n = n$ (per es., $b_n = e^n$, oppure $b_n = \log n$). Nel seguito ci limitiamo ad assumere $b_n = n$ come infinito campione, ma quello che diremo ha evidenti estensioni al caso generale.

Se, per un dato $\alpha > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^\alpha} = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ ,$$

e quindi (a_n) è infinita di ordine α, si ha

$$a_n \sim cn^\alpha \ , \qquad \text{ossia } a_n = cn^\alpha + o(n^\alpha) \ ,$$

e cn^α si chiama la *parte principale* di a_n. In modo analogo si definisce, se esiste, la parte principale di un infinitesimo di ordine α.

Esempio. Si prenda la successione

$$a_n = \sqrt{n^2 - n} \ .$$

Siccome

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 - n}}{n} = 1 \ ,$$

a_n è infinita di ordine 1 con parte principale n. Quindi

$$\sqrt{n^2 - n} = n + o(n) \ .$$

Il "resto" $r_n = \sqrt{n^2 - n} - n$, che sappiamo essere $o(n)$ può essere a sua volta analizzato, osservando che

$$\lim_{n\to\infty} r_n = -\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 - n} + n} = -\frac{1}{2} \ .$$

Quindi

$$a_n = n + r_n = n - \frac{1}{2} + o(1) \ ,$$

dove $o(1) = o(n^0)$ indica ovviamente un generico infinitesimo. Analizziamo dunque il nuovo resto

$$r_n' = \sqrt{n^2 - n} - n + \frac{1}{2} = -\frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2 - n} + n - \frac{1}{2}} \ .$$

Questo è infinitesimo di ordine 1 con parte principale $-\dfrac{1}{8}$. Quindi

$$a_n = n - \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + o(n^{-1}) \ .$$

Ripetendo questo procedimento, è possibile, calcolando iterativamente i coefficienti c_k, giungere per ogni k a una formula

$$a_n = n - \frac{1}{2} - \frac{1}{8n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_k}{n^k} + o(n^{-k}) \ .$$

Questo tipo di formula costituisce lo *sviluppo asintotico* dei termini a_n della successione data.[5]

Osservazione 3.13. Le definizioni e notazioni introdotte in questi due paragrafi vengono utilizzate anche per funzioni di variabile reale. Siccome esse possono riguardare sia il comportamento asintotico di una funzione per $x \to \pm\infty$, sia quello per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, è necessario accompagnare le espressioni $f(x) = O\big(g(x)\big)$, $f(x) \sim g(x)$, ecc. dall'indicazione del punto, finito o infinito, verso cui si intendono i limiti o nel cui intorno devono valere le maggiorazioni. Per esempio, si scrive

$$\sin x \sim x \quad (x \to 0) \ , \quad \text{oppure} \quad \sin x \sim_{x\to 0} x \ ,$$

per esprimere il fatto che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. □

4. *Teorema di Stolz–Cesaro

[6]

Il Teorema di Stolz–Cesaro può essere visto come una forma "discretizzata" della regola di de l'Hôpital.

La "discretizzazione" si riferisce, in una analogia tra funzioni della variabile "continua" $x \in \mathbb{R}$ e funzioni (successioni) della variabile intera $n \in \mathbb{N}$, a una corrispondenza tra operazioni del calcolo differenziale e integrale da un lato e operazioni aritmetiche dall'altro, come quelle indicate in tabella:

Teorema 3.14 (**Teorema di Stolz–Cesaro**). *Siano (a_n), (b_n) successioni. Si supponga che*

(i) *(b_n) sia strettamente monotona;*

(ii) *valga una delle seguenti condizioni:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \ , \tag{4.1}$$

oppure

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \ (\text{oppure } -\infty) \ ; \tag{4.2}$$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell$, *finito o infinito.*

---

[5] Con gli strumenti del calcolo differenziale è poi possibile determinare una formula esplicita per i coefficienti c_k: studiare $r_n = \sqrt{n^2 - n} - n$ per $n \to \infty$ è come studiare

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$$

per $x \to 0^+$ (si pone $x = 1/n$). Lo sviluppo di Taylor di $\sqrt{1-x} - 1$ nell'intorno di 0 è

$$\sqrt{1-x} - 1 = -\frac{1}{2}\frac{x}{1!} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{3!} - \frac{3\cdot 5}{16}\frac{x^4}{4!} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{32}\frac{x^5}{5!} - \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{64}\frac{x^6}{6!} + \cdots$$

da cui si ricava, dopo aver diviso per x, che $c_k = (-1)^k 2^{-k-1}(1\cdot 3\cdots(2k-1))/(k+1)!$ per $k \geq 1$.

[6] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

Continuo	Discreto
derivata: $f'(x)$	differenza: $a_{n+1} - a_n$
integrale: $\int_0^T f(x)\,dx$	somma: $s_n = a_0 + \cdots + a_n$
media integrale: $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$	media di Cesaro: $\frac{a_0+\cdots+a_{n-1}}{n}$
integrale improprio: $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$	somma della serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \ . \tag{4.3}$$

Si noti che nel caso (4.1), il limite (4.3) si presenta nella forma indeterminata $0/0$, mentre il caso (4.2) comprende quello di limiti nella forma indeterminata ∞/∞.
Si noti anche che non vale l'implicazione $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \implies \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \ell$, come mostra il seguente esempio: $a_n = n + (-1)^n$, $b_n = n$.

Dimostrazione. Consideriamo separatamente i quattro casi, secondo che valga l'uguaglianza (4.1) o l'uguaglianza (4.2) e secondo che ℓ sia finito o infinito.

Forma indeterminata $0/0$ *e* ℓ *infinito.* A meno di cambiar segno ai termini di una o di entrambe le successioni, possiamo supporre che la successione (b_n) sia strettamente decrescente, e dunque $b_n > 0$ per ogni n, e inoltre che $\ell = +\infty$.
Fissato $M > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$,

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > M \ , \quad \text{ossia} \quad a_n - a_{n+1} > M(b_n - b_{n+1}) \ .$$

Per ogni $p > 0$ si ha

$$\begin{aligned} a_n - a_{n+p} &= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) \\ &> M\big((b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2}) + \cdots + (b_{n+p-1} - b_{n+p})\big) \\ &= M(b_n - b_{n+p}) \ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Passando al limite per $p \to \infty$, si ha $a_n \geq M b_n$ per ogni $n \geq n_0$. Si ha così la tesi.

Forma indeterminata $0/0$ *e* ℓ *finito.* Come sopra, possiamo supporre che la successione (b_n) sia strettamente decrescente, e dunque $b_n > 0$ per ogni n. Sostituendo, se necessario, a_n con $a_n - \ell b_n$, possiamo anche supporre che $\ell = 0$.
Fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$,

$$|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon(b_n - b_{n+1}) \ .$$

Per ogni $p > 0$, ragionando come in (4.4), si ha allora che

$$|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon(b_n - b_{n+p}) \ .$$

Passando al limite per $p \to \infty$, si ha $|a_n| \le \varepsilon b_n$ per ogni $n \ge n_0$, e dunque la tesi.

Caso $b_n \to \pm\infty$ e ℓ infinito. Possiamo supporre che sia ℓ che $\lim_n b_n$ siano $+\infty$, e dunque che la successione (b_n) sia strettamente crescente.
Fissato $M > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \ge n_0$, $a_n > 0$ e inoltre

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > M \ , \quad \text{ossia} \quad a_{n+1} - a_n > M(b_{n+1} - b_n) \ .$$

Per $n > n_0$ si ha

$$\begin{aligned} a_n - a_{n_0} &= (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_{n_0+1} - a_{n_0}) \\ &> M\big((b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_{n_0+1} - b_{n_0})\big) \\ &= M(b_n - b_{n_0}) \ . \end{aligned}$$

Dividendo per b_n, si deduce che, per $n > n_0$,

$$\frac{a_n}{b_n} > M\Big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\Big) + \frac{a_{n_0}}{a_n} > M\Big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\Big) \ .$$

Ma

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\Big) = 1 \ ,$$

per cui si ha definitivamente $\dfrac{a_n}{b_n} > \dfrac{M}{2}$.

Caso $b_n \to \pm\infty$ e ℓ finito. Come sopra, possiamo supporre che $\lim_n b_n = +\infty$, e dunque che (b_n) sia strettamente crescente, e inoltre che $\ell = 0$.
Fissato $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che, per ogni $n \ge n_0$, $b_n > 0$ e

$$|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon(b_n - b_{n+1}) \ .$$

Si ha allora, per $n > n_0$,

$$\begin{aligned} |a_n| &\le |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \cdots + |a_{n_0+1} - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \\ &< \varepsilon\big((b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_{n_0+1} - b_{n_0})\big) + |a_{n_0}| \\ &= \varepsilon(b_n - b_{n_0}) + |a_{n_0}| \ . \end{aligned}$$

Dividendo per b_n, si ha, per $n > n_0$,

$$\Big|\frac{a_n}{b_n}\Big| < \varepsilon\Big(1 - \frac{b_{n_0}}{b_n}\Big) + \frac{|a_{n_0}|}{b_n} < \varepsilon + \frac{|a_{n_0}|}{b_n} \ .$$

Essendo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n_0}|}{b_n} = 0$, definitivamente si ha $\Big|\dfrac{a_n}{b_n}\Big| < 2\varepsilon$. □

5. *Teoremi di Cesaro

[7]

La *media di Cesaro n–esima* σ_n, $n \geq 1$, di una successione (a_n) di numeri reali è la media aritmetica σ_n dei primi n termini $a_0, \ldots, a_{n-1}$:

$$\sigma_n = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \ . \tag{5.1}$$

Il seguente teorema segue direttamente dal teorema di Cesaro-Stolz.

Teorema 3.15 (**Primo teorema di Cesaro**). *Se la successione (a_n) tende al limite ℓ (finito o infinito), anche la successione (σ_n) tende a ℓ.*

Prima dimostrazione. Ponendo $A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$, $b_n = n$, si ha $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \ .$$

Quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{b_n} = \ell$. □

E' tuttavia utile vedere una dimostrazione diretta, basata sulla seguente osservazione.
All'aumentare di n, i termini "iniziali" della successione hanno un peso sempre minore nel calcolo della media aritmetica σ_n, mentre sono i termini con indice grande, dunque quelli "vicini a ℓ", a prevalere.
La dimotrazione che segue traduce questa idea in una dimostrazione rigorosa.

Seconda dimostrazione. Consideriamo per primo il caso in cui $\ell = +\infty$. Dato un numero $M > 0$, esiste un intero n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, $a_n > M$. Se $n \geq n_0$ si ha dunque

$$\sigma_n > \frac{a_0 + \cdots + a_{n_0-1}}{n} + M\frac{n - n_0}{n} \ .$$

Prendendo il limite inferiore in n e usando la superadditività del $\liminf$ otteniamo

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma_n \geq M \ .$$

Dato che M è arbitrario, $\liminf_n \sigma_n = +\infty$ quindi $\lim_n \sigma_n = +\infty$.
Per il caso $\ell = -\infty$ basta sostituire alla successione degli a_n la successione dei $-a_n$.
Supponiamo ora che ℓ sia finito. Sostituendo alla successione degli a_n la successione dei $b_n = a_n - \ell$, e osservando che le medie di Cesaro τ_n dei b_n sono $\tau_n = \sigma_n - \ell$, possiamo ridurci al caso $\ell = 0$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste un intero n_0 tale che, per ogni $\geq n_0$, $|b_n| < \varepsilon$. Allora, per $n \geq n_0$,

$$|\tau_n| \leq \frac{|b_0| + \cdots + |b_{n_0-1}|}{n} + \varepsilon\frac{n - n_0}{n} \ .$$

Prendendo il limite superiore in n e usando la subadditività del $\limsup$ otteniamo $\limsup_n |\tau_n| \leq \varepsilon$, quindi l'arbitrarietà di ε dà che $\lim_n |\tau_n| = \limsup_n |\tau_n| = 0$. □

L'implicazione inversa a quella dimostrata nel teorema, $\lim_n \sigma_n = \ell \Rightarrow \lim_n a_n = \ell$ non è vera. È possibile infatti che le medie σ_n abbiano limite e che gli a_n non lo abbiano. Per esempio, si prenda $a_n = (-1)^n$, le cui medie di Cesaro, uguali a

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \ , \end{cases}$$

[7] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

tendono a 0.

COROLLARIO 3.16. *Sia* (a_n) *una successione di numeri reali, e si supponga che* $\lim_n(a_{n+1}-a_n)=\ell$ *(finito o infinito). Allora* $\lim_n a_n/n=\ell$.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la successione (b_n), dove $b_0=a_0$ e, per $n\geq 1$, $b_n=a_{n+1}-a_n$. Le medie di Cesaro dei b_n sono

$$\sigma_n=\frac{b_0+\cdots+b_{n-1}}{n}=\frac{a_n}{n}\ .$$

Quindi $\lim_n a_n/n=\lim_n\sigma_n=\ell$, per il Teorema 3.15. □

Si noti che in realtà il Corollario 3.16 è *equivalente* al primo teorema di Cesaro. Basta osservare che la (5.1) è equivalente all'identità

$$a_{n-1}=n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}\ .$$

Quindi, applicando il Corollario 3.16 alla successione $(n\sigma_n)$, si ottiene il Teorema 3.15.

TEOREMA 3.17 (**Secondo teorema di Cesaro**). *Sia* (a_n) *una successione di numeri reali strettamente positivi. Se* $\lim_n a_n=\ell$ *(finito o infinito), anche la successione delle medie geometriche*

$$\gamma_n=\sqrt[n]{a_0a_1\cdots a_{n-1}}$$

tende a ℓ.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, essendo $a_n>0$ per ogni n, si ha necessariamente $\ell\geq 0$.
Supponiamo $\ell=+\infty$. Dato un numero $M>0$, esiste un intero n_0 tale che, per ogni $n\geq n_0$, $a_n>2M$. Se $n\geq n_0$ si ha dunque

$$\gamma_n>(a_0a_1\cdots a_{n_0-1})^{\frac{1}{n}}(2M)^{\frac{n-n_0}{n}}=2M\sqrt[n]{a_0a_1\cdots a_{n_0-1}(2M)^{-n_0}}\ .$$

Poiché $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$ per ogni $b>0$, esiste $n_1\geq n_0$ tale che $\gamma_n>M$ per ogni $n\geq n_1$.
Per il caso $\ell=0$, basta sostituire agli a_n i loro reciproci $1/a_n$.
Consideriamo dunque il caso $0<\ell<+\infty$. Sostituendo gli a_n con a_n/ℓ, possiamo supporre che $\ell=1$. Dato $\varepsilon>0$, esiste un intero n_0 tale che, per ogni $n\geq n_0$, $1-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<1+\frac{\varepsilon}{2}$. Allora, se $n\geq n_0$,

$$(a_0a_1\cdots a_{n_0-1})^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-n_0}{n}}<\gamma_n<(a_0a_1\cdots a_{n_0-1})^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-n_0}{n}}\ .$$

Il limite del primo termine è $1-\frac{\varepsilon}{2}$, mentre il limite del terzo termine è $1+\frac{\varepsilon}{2}$. Quindi esiste un indice $n_1\geq n_0$ tale che, per $n\geq n_1$, $1-\varepsilon<\gamma_n<1+\varepsilon$. □

Usando la continuità delle funzioni logaritmo ed esponenziale (che qui non diamo ancora per note), il Teorema 3.17 si ottiene più semplicemente applicando il Teorema 3.15 alla successione $(\log a_n)$.
È fondamentale, per la validità del Teorema 3.17, che gli a_n siano *tutti* strettamente positivi. Se uno solo di essi è nullo, da quell'indice in poi tutte le medie geometriche γ_n sono nulle, e tendono quindi a 0 indipendentemente dal limite degli a_n.

COROLLARIO 3.18. *Sia* (a_n) *una successione di numeri reali strettamente positivi, tale che* $\lim_n a_{n+1}/a_n=\ell$ *(finito o infinito). Allora* $\lim_n\sqrt[n]{a_n}=\ell$.

Come prima, questo enunciato è equivalente al Teorema 3.17, e si dimostra in modo del tutto analogo al Corollario 3.16 (anche qui, una dimostrazione alternativa si basa sulla funzione logaritmo).

CAPITOLO 4

SOMMATORIE SU INSIEMI INFINITI

In questo capitolo diamo per noti nozioni e teoremi principali relativi alle serie numeriche, e in particolare:

- definizione di somma di una serie (come limite delle somme finite, dei primi n termini);
- condizione necessaria per la convergenza (termine n–esimo infinitesimo);
- criteri di convergenza per serie con termini non negativi: confronto (se $a_n \le b_n$ definitivamente allora la convergenza della serie $\sum_n b_n$ implica quella della serie $\sum_n a_n$, quindi la divergenza della serie $\sum_n a_n$ implica quella della serie $\sum_n b_n$), radice (se $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge se $\ell < 1$, diverge se $\ell > 1$), rapporto[1] (se $a_{n+1}/a_n \to \ell$, allora la serie $\sum_n a_n$ converge se $\ell < 1$, diverge se $\ell > 1$), infine condensazione di Cauchy (se $0 \le a_{n+1} \le a_n$, la serie $\sum_n a_n$ converge se e solo se $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converge, più precisamente $\sum_1^\infty a_n \le \sum_0^\infty 2^k a_{2^k} \le 2\sum_1^\infty a_n$);
- criterio di convergenza assoluta per serie di segno variabile (se la serie $\sum_n |a_n|$ converge, allora anche la serie $\sum_n a_n$ converge);
- criterio di convergenza di Leibniz per serie di segno alternante (se $(a_n) \subset [0, +\infty)$ è infinitesima e decrescente, allora $\sum_n (-1)^n a_n$ converge).

1. Somme di termini non negativi

Dato un insieme I, indichiamo con $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ l'insieme dei sottoinsiemi finiti di I. Data $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, conveniamo di indicare con a_i il valore $a(i)$ e, come per le successioni, con (a_i) la funzione a.

Definizione 4.1 (**Somma su insiemi arbitrari di indici**). *Sia $a_i \ge 0$ per ogni $i \in I$. Si chiama* sommatoria su I degli a_i *il valore*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup_{F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)} \sum_{i \in F} a_i \in [0, +\infty] \ .$$

Si dice che la sommatoria converge se tale valore è finito.

Vediamo alcune proprietà generali.

Proposizione 4.2. *Se la sommatoria $\sum_{i\in I} a_i$ converge, allora l'insieme $\{i \in I : \ a_i > 0\}$ è al massimo numerabile.*

Dimostrazione. Sia S il valore della sommatoria. Se $S = 0$, allora necessariamente $a_i = 0$ per ogni $i \in I$. Supponiamo allora $0 < S < +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, sia $E_n = \{i \in I : \ a_i \ge S/n\}$. Ovviamente E_n non può contenere più di n elementi. Quindi $\bigcup_{n>0} E_n = \{i \in I : \ a_i > 0\}$ è al massimo numerabile. $\square$

[1] Applicando il secondo teorema di Cesaro a a_{n+1}/a_n si deduce il criterio del rapporto da quello della radice.

Per determinare il comportamento di una sommatoria a termini non negativi, è possibile limitarsi a considerare le somme finite su particolari sottofamiglie $\mathcal{F}$ di $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, come ora vedremo.

Definizione 4.3 (**Famiglia cofinale in $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$**). *Una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi finiti di I si dice* cofinale *se, per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, esiste $F' \in \mathcal{F}$ tale che $F \subseteq F'$.*

Proposizione 4.4. *Sia $\mathcal{F}$ una sottofamiglia cofinale di $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$. Allora*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_{i \in F} a_i \ .$$

Dimostrazione. La disuguaglianza

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_{i \in F} a_i \leq \sup_{F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)} \sum_{i \in F} a_i = \sum_{i \in I} a_i$$

è ovvia. D'altra parte, dato $G \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ sia $F \in \mathcal{F}$ tale che $G \subseteq F$. Allora

$$\sum_{i \in G} a_i \leq \sum_{i \in F} a_i \leq \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_{i \in F} a_i \ .$$

Prendendo l'estremo superiore delle somme a primo membro al variare di G in $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, si conclude che

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sup_{F \in \mathcal{F}} \sum_{i \in F} a_i \ .$$

□

Corollario 4.5. *Sia $I = \mathbb{N}$ e sia (a_n) una successione a termini non negativi. La definizione di sommatoria secondo la Definizione 4.1 coincide con quella di somma della serie (cioè come limite delle somme parziali).*

Dimostrazione. Basta osservare che $\mathcal{F} = \big\{\{0, 1, \dots, n\} : \ n \in \mathbb{N}\big\}$ soddisfa le ipotesi della Proposizione 4.4. □

Come vedremo al Paragrafo 4, la stessa equivalenza non varrà più per successioni di segno generico.

2. Limiti lungo insiemi ordinati filtranti

La nozione di sommatoria di termini (a_i) non negativi è stata data come un estremo superiore di somme finite, e questo ha consentito di definirla per un insieme generico I infinito. Tuttavia, per estendere la nozione di sommatoria a termini di segno qualunque, è necessario esprimerla come limite. Per far questo, occorre introdurre la nozione di *insieme ordinato filtrante* e di limite di una funzione definita su un insieme filtrante. È anche utile estendere la definizione di insieme cofinale a un qualsiasi insieme ordinato.

Definizione 4.6 (**Insieme ordinato filtrante**). *Un insieme ordinato $(X, \preceq)$ si dice* filtrante *se, dati comunque x, $y \in X$, esiste $z \in X$ tale che $x \prec z$ e $y \prec z$.*

L'insieme filtrante a cui saremo interessati è $X = \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, con I infinito, ordinato per inclusione. È inoltre filtrante un qualunque insieme non vuoto, totalmente ordinato e privo di massimo.

DEFINIZIONE 4.7. *Sia $(X, \preceq)$ un insieme ordinato filtrante e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Si dice che $\ell \in \mathbb{R}$ è limite di f lungo X, e si scrive*

$$\ell = \lim_{x \in X} f(x) ,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{x} \in X$ tale che

$$\forall\, x \succeq \overline{x} , \qquad |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$

In modo analogo si definiscono i limiti a $\pm\infty$.

DEFINIZIONE 4.8 (**Insiemi cofinali**). *Un sottoinsieme Y di un insieme ordinato $(X, \preceq)$ si dice cofinale se per ogni $x \in X$ esiste $y \in Y$ tale che $x \preceq y$.*

Se $(X, \preceq)$ è filtrante, ogni suo sottoinsieme cofinale è filtrante con l'ordinamento indotto. Il seguente enunciato è di facile dimostrazione.

PROPOSIZIONE 4.9. *Sia $(X, \preceq)$ filtrante e sia ℓ limite di una funzione f lungo X. Se $Y \subset X$ è cofinale, allora ℓ è limite lungo Y di $f_{|Y}$.*

Osservazione 4.10. La dimostrazione dei seguenti teoremi per limiti lungo insiemi filtranti è lasciata per esercizio. Si noti che nell'enunciato (6) gli insiemi cofinali svolgono il ruolo delle sottosuccessioni e che l'ipotesi che l'insieme sia filtrante è essenziale per avere l'unicità del limite.

(1) unicità del limite;
(2) esistenza del limite di funzioni crescenti, cioè tali che $x \prec y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, e uguaglianza $\lim_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(x)$;
(3) esistenza del limite di funzioni decrescenti, cioè tali che $x \prec y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, e uguaglianza $\lim_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} f(x)$;
(4) teoremi di confronto;
(5) limiti di somme e prodotti;
(6) se $\ell \in \mathbb{R}$ non è il limite di f lungo X, esiste un intervallo $J = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ tale che l'insieme$\{x : f(x) \notin J\}$ è cofinale in X (analogo enunciato se $\ell = \pm\infty$);
(7) esistenza di $\limsup_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} \sup_{y \succeq x} f(x)$ e di $\liminf_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} \inf_{y \succeq x} f(x)$;
(8) criterio di convergenza di Cauchy: f ha limite finito lungo X se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste x_0 tale che, $\forall\, x, \, y \succeq x_0$, vale $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.[2]

□

3. Sommatorie con termini di segno generico

Sia I un insieme infinito e $\mathscr{P}_{\rm fin}(I)$ ordinato per inclusione.

DEFINIZIONE 4.11. *Sia (a_i) definita su I e a valori reali. Si chiama sommatoria degli a_i il limite*

$$\sum_{i \in I} a_i = \lim_{F \in \mathscr{P}_{\rm fin}(I)} \sum_{i \in F} a_i ,$$

se tale limite esiste. La sommatoria si dice convergente, divergente o indeterminata secondo che il limite esista finito, esista infinito o non esista rispettivamente.

[2]A differenza del caso $I = \mathbb{N}$, non è detto che le successioni di Cauchy (o, il che è lo stesso, convergenti) siano limitate. Ad esempio, se $I = \mathbb{Z}$ munito della usuale struttura d'ordine, allora la successione (2^{-n}) ha limite uguale a 0, ma non è limitata.

Per $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, poniamo
$$s(F) = \sum_{i \in F} a_i \ .$$
Dimostriamo subito, per funzioni a termini non negativi, l'equivalenza di questa definizione con la Definizione 4.1.

Proposizione 4.12. *Se $a_i \geq 0$ per ogni $i \in I$, allora*
$$\lim_{F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)} s(F) = \sup_{F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)} s(F) \ .$$

Dimostrazione. Se gli a_i sono non negativi, la funzione $s(F)$ è crescente su $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$. La tesi segue allora dall'Osservazione 4.10(2). $\square$

Nel resto di questo paragrafo, dimostreremo che una sommatoria converge *se e solo se* converge la sommatoria dei suoi valori assoluti. Per cominciare, diamo un'apposita formulazione del criterio di convergenza di Cauchy adattata alle sommatorie su insiemi infiniti.

Lemma 4.13 (**Criterio di convergenza di Cauchy per sommatorie infinite**). *La sommatoria $\sum_{i \in I} a_i$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $F_0 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ tale che, per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ disgiunto da F_0, si abbia $|s(F)| < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la sommatoria converga a $s \in \mathbb{R}$. Allora, dato $\varepsilon > 0$ esiste $F_0 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ tale che $|s(F') - s| < \varepsilon$ per ogni $F' \supseteq F_0$ finito. Dato F finito e disgiunto da F_0, si consideri $F' = F \cup F_0$. Allora
$$|s(F)| = |s(F') - s(F_0)| \leq |s(F') - s| + |s - s(F_0)| < 2\varepsilon \ .$$
Viceversa, si supponga che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista un insieme $F_0 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ tale che, per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ disgiunto da F_0, si abbia $|s(F)| < \varepsilon$. Si considerino due sottoinsiemi finiti di I, F' e F'', entrambi contenenti F_0. Allora le due differenze $F' \setminus F''$ e $F'' \setminus F'$ sono entrambe disgiunte da F_0. Quindi $|s(F' \setminus F'')| < \varepsilon$ e analogamente per $|s(F'' \setminus F')|$. Osservando che
$$s(F') - s(F'') = s(F' \setminus F'') - s(F'' \setminus F') \ ,$$
si ottiene che
$$|s(F') - s(F'')| \leq |s(F' \setminus F'')| + |s(F'' \setminus F')| < 2\varepsilon \ .$$
Per il criterio di convergenza di Cauchy, vedi l'Osservazione 4.10(9), la sommatoria converge. $\square$

Teorema 4.14. *La sommatoria $\sum_i a_i$ converge se e solo se converge la sommatoria $\sum_i |a_i|$. In tal caso,*
$$\Big|\sum_{i \in I} a_i\Big| \leq \sum_{i \in I} |a_i| \ . \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, poniamo
$$s(F) = \sum_{i \in F} a_i \ , \qquad \sigma(F) = \sum_{i \in F} |a_i| \ .$$
Ovviamente, per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$,
$$\big|s(F)\big| \leq \sigma(F) \ . \tag{3.2}$$
Supponiamo che converga la sommatoria dei valori assoluti degli a_i. Allora, per il Lemma 4.13, dato $\varepsilon > 0$, esiste $F_0 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ tale che, per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ disgiunto da F_0, $\sigma(F) < \varepsilon$. Per la (3.2) e il criterio di convergenza di Cauchy, anche la sommatoria degli a_i converge.

Viceversa, supponiamo che converga la sommatoria degli a_i. Allora, dato $\varepsilon > 0$, esiste $F_0 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ tale che, per ogni $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$ disgiunto da F_0, $|s(F)| < \varepsilon$. Fissato un tale F, lo si scomponga nell'unione disgiunta di

$$F_+ = \left\{i \in F : \ a_i \geq 0\right\} , \qquad F_- = \left\{i \in F : \ a_i < 0\right\} .$$

Allora anche F_+ e F_- sono disgiunti da F_0, per cui

$$\sigma(F_+) = s(F_+) < \varepsilon , \qquad \sigma(F_-) = -s(F_-) < \varepsilon .$$

Pertanto,

$$\sigma(F) = \sigma(F_+) + \sigma(F_-) < 2\varepsilon ,$$

e, per il criterio di convergenza di Cauchy, anche la sommatoria $\sum_i |a_i|$ converge.
La (3.1) segue dal criterio del confronto per limiti. □

4. Il caso $I = \mathbb{N}$: confronto con la nozione di "somma di una serie"

Se $I = \mathbb{N}$, occorre dunque distinguere tra la nozione di "sommatoria di una successione" (a_n) secondo la Definizione 4.11 e quella di "somma della serie",

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n .$$

Siccome la famiglia $\mathcal{F}$ degli insiemi $E_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ è cofinale, vale l'implicazione

$$\lim_{F\in\mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})} s(F) = s \Longrightarrow \lim_{F\in\mathcal{F}} s(F) = \lim_{n\to\infty} s(E_n) = s .$$

Mantenendo la distinzione simbolica tra $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ per la sommatoria secondo la Definizione 4.11, e $\sum_0^\infty a_n$ per la somma della serie[3], si ha dunque che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = s \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = s .$$

L'implicazione inversa non vale, basta considerare una qualsiasi serie convergente, non assolutamente (il classico esempio è $\sum_1^\infty (-1)^n/n$). Riprendendo l'analogia sottosuccessioni-insiemi cofinali fatta in precedenza, la nozione di serie $\sum_0^\infty a_n$ corrisponde al limite "lungo la sottosuccessione delle parti finite $\{0, \ldots, n\}$", mentre la nozione di sommatoria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ corrisponde al limite pieno nell'insieme filtrante delle parti finite.
In relazione all'implicazione inversa, si ha la seguente caratterizzazione della convergenza della sommatoria.

Teorema 4.15. *Per una successione (a_n) le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *La sommatoria $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge;*
(2) *la serie $\sum_0^\infty a_n$ converge assolutamente.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.14, la condizione (1) equivale alla convergenza della sommatoria $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$. Per il Corollario 4.5, questo equivale alla convergenza della serie $\sum_0^\infty |a_n|$. □

[3] Si faccia attenzione al fatto che questa distinzione terminologica e notazionale tra "sommatoria" e "serie" è stata introdotta perché funzionale alla presente trattazione, ma non è del tutto standard.

5. Convergenza incondizionata di serie

Data una successione (a_n), si consideri un suo *riordinamento*,

$$b_n = a_{\sigma_n} \ ,$$

dove $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ è una funzione biiettiva.
È facile verificare che le due *sommatorie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \ , \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma_n}$$

hanno lo stesso comportamento e, se convergenti, la stessa somma. Infatti, supponiamo che $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converga a s. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $F_0 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ tale che

$$\Big| \sum_{n\in F} a_n - s \Big| < \varepsilon$$

per ogni $F \supseteq F_0$. Allora

$$\Big| \sum_{n\in F'} a_{\sigma_n} - s \Big| < \varepsilon$$

per ogni $F' \supseteq \sigma^{-1}(F_0)$. Quindi anche $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma_n} = s$. L'implicazione inversa si dimostra allo stesso modo. Si noti che quanto detto fin qui si estende a sommatorie su generici insiemi di indici.

La proprietà che esistenza e valore di una sommatoria (o di una serie) non dipendano dal riordinamento si chiama *convergenza incondizionata*.

Per quanto riguarda invece il confronto tra le due *serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_n} \ ,$$

si deve considerare che le rispettive somme parziali sono difficilmente confrontabili tra loro. Vediamo prima il caso più semplice.

Teorema 4.16. *Se la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *è assolutamente convergente, per ogni riordinamento* σ *dei suoi termini si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

Dimostrazione. Per il Teorema 4.15 converge la sommatoria $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ che, per quanto detto sopra, è uguale a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{\sigma_n}|$. Quindi, per gli stessi motivi, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ .$$

□

Se invece una serie converge, ma non assolutamente, vedremo che si ha una situazione molto diversa. Premettiamo due utili osservazioni:

- se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, ma non assolutamente, allora[4] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- = +\infty$ (se una delle due convergesse, convergerebbe anche l'altra e si avrebbe quindi convergenza assoluta);

[4]Per $x \in \mathbb{R}$ si definisce $x^+ = x \vee 0$ e $x^- = (-x)^+$, di modo che $x^+ + x^- = |x|$ e $x^+ - x^- = x$.

- se σ è un riordinamento di $\mathbb{N}$, allora[5] $\lim_{n\to\infty}\sigma(n) = +\infty$ e dunque la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implica che $\lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = 0$.

Teorema 4.17. *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *una serie convergente, ma non assolutamente. Allora, per ogni* $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$*, esiste un riordinamento* σ *di* $\mathbb{N}$ *tale che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_n} = \ell \ .$$

Più in generale, la stessa conclusione vale se $\lim_n a_n = 0$ *e* $\sum_n a_n^+ = \sum_n a_n^- = +\infty$.

Dimostrazione. In questa dimostrazione conviene, per comodità di notazioni, iniziare le numerazioni da 1 anziché da 0. Gli indici di sommazione saranno dunque in $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e considereremo riordinamenti di $\mathbb{N}^*$.
Gli insiemi

$$E^+ = \{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n \geq 0\} \ , \qquad E^- = \{n \in \mathbb{N}^* : \ a_n < 0\} \ ,$$

formano una partizione di $\mathbb{N}^*$. La divergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ implica che E_+, E_- sono entrambi infiniti. Possiamo allora porre

$$E^+ = \{n_k^+ : k \geq 1\} \ , \qquad E^- = \{n_k^- : k \geq 1\} \ ,$$

con $n_k^+ < n_{k+1}^+$, $n_k^- < n_{k+1}^-$ per ogni k.
Fissiamo ora $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \geq 0$.[6] La costruzione del riordinamento σ sarà basata su una suddivisione di $\mathbb{N}^*$ in segmenti opportunamente scelti

$$[1, m_1] \ , \ [m_1+1, m_2] \ , \ [m_2+1, m_3] \qquad \text{ecc.} \tag{5.1}$$

e sceglieremo $\sigma(n) \in E_+$ (seguendo la numerazione crescente) se n è in un segmento pari, cioè $[1, m_1]$, $[m_2+1, m_3]$, ecc., $\sigma(n) \in E_-$ se n è in un segmento dispari. Di conseguenza le somme parziali del riordinamento,

$$s'_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \ ,$$

saranno crescenti da $n = 1$ a $n = m_1$, e poi alternativamente decrescenti da $n = m_{2j-1}$ a $n = m_{2j}$ e crescenti da $n = m_{2j}$ a $n = m_{2j+1}$.
Siccome le due serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^+$ e $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^-$ divergono, la prima positivamente e la seconda negativamente, possiamo definire

$$\begin{aligned}
m_1 &= \min\Big\{m : \sum_{k=1}^{m} a_{n_k^+} > \ell\Big\} \ , \\
\sigma(k) &= n_k^+ \ , \qquad k = 1, \dots, m_1 \ , \\
m_2 &= m_1 + \min\Big\{m : s'_{m_1} + \sum_{k=1}^{m} a_{n_k^-} < \ell\Big\} \ , \\
\sigma(m_1+k) &= n_k^- \ , \qquad k = 1, \dots, m_2 - m_1 \ .
\end{aligned}$$

[5] Per ogni $M > 0$, il numero di n per cui $\sigma(n) < M$ è finito.

[6] Il caso $\ell < 0$ seguirà con modifiche che appariranno ovvie una volta risolto il caso $\ell \geq 0$.

Procediamo quindi induttivamente per coppie di indici interi $2j-1, 2j$, applicando lo stesso criterio sui rimanenti elementi di E_+ ed E_-. In formule, definiamo

$$\begin{aligned}\nu_j^+ &= m_1 + (m_3 - m_2) + (m_5 - m_4) + \cdots + (m_{2j-1} - m_{2j-2}) \ , \\ \nu_j^- &= (m_2 - m_1) + (m_4 - m_3) + \cdots + (m_{2j} - m_{2j-1}) \ ,\end{aligned}$$

(ossia il numero di elementi di E_+ ed E_- rispettivamente già utilizzati ai passi precedenti) e poniamo

$$\begin{aligned}& m_{2j+1} = \min\Big\{ m > \nu_j^+ : \sum_{k=\nu_j^+ + 1}^{m} a_{n_k^+} > \ell \Big\} \ , \\ & \sigma(m_{2j} + k) = n_k^+ \ , \qquad k = 0, \dots, m_{2j+1} - m_{2j} \ , \\ & m_{2j+2} = \min\Big\{ m > \nu_j^- : s'_{m_{2j+1}} + \sum_{k=\nu_j^- + 1}^{m} a_{n_k^-} < \ell \Big\} \ , \\ & \sigma(m_{2j+1} + k) = n_k^- \ , \qquad k = 1, \dots, m_{2j+2} - m_{2j+1} \ .\end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{n\to\infty} s'_n = \ell$. Come abbiamo già osservato, le somme s'_n sono alternativamente crescenti e decrescenti sui singoli segmenti compresi tra due m_j consecutivi, per cui basta dimostrare che $\lim_{j\to\infty} s'_{m_j} = \ell$.
Ma questo segue dalle seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned} s'_{m_{2j}} &< \ell \ , \qquad \ell - s'_{m_{2j}} \le |a_{\sigma(m_{2j})}| \\ s'_{m_{2j+1}} &> \ell \ , \qquad s'_{m_{2j+1}} - \ell \le a_{\sigma(m_{2j+1})} \ ,\end{aligned}$$

conseguenze dirette della definizione degli indici m_j.
Infine, costruiamo un riordinamento che fornisca il limite $+\infty$. Si suddivida $\mathbb{N}$ in segmenti E_j della forma (5.1) tali che $\sum_{k\in E_j} a_{n_k^+} > 2^j$, e si definisca σ alternando consecutivamente gli n_k^+ con $k \in E_j$ con il singolo $n_j^- \in E_-$. I dettagli sono lasciati per esercizio. □

6. Scomposizione di sommatorie convergenti

Dimostriamo che una sommatoria convergente su un insieme I si può scomporre in una sommatoria (finita o infinita, su sottoinsiemi finiti o infiniti di indici) di sommatorie parziali.

TEOREMA 4.18. *Sia $\{I_k\}_{k\in K}$ una partizione*[7] *dell'insieme I, e sia (a_i) una funzione da I a $\mathbb{R}$. Allora la sommatoria $\sum_{i\in I} a_i$ converge se e solo se valgono le seguenti proprietà:*

(i) *per ogni $k \in K$, la sommatoria $\sum_{i\in I_k} |a_i|$ converge;*
(ii) *posto $s_k = \sum\limits_{i\in I_k} |a_i|$, la sommatoria $\sum\limits_{k\in K} s_k$ converge.*

In tal caso convergono anche $\sum_{i\in I_k} a_i$ e $\sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in I_k} a_i\Big)$ e vale

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k\in K}\Big(\sum_{i\in I_k} a_i\Big) \ . \tag{6.1}$$

[7] Si noti che se l'insieme K, o uno o più degli insiemi I_k sono finiti, la condizione di convergenza della corrispondente sommatoria è automaticamente verificata. La dimostrazione è modellata sul caso generale, in cui tutti questi insiemi sono infiniti. Laddove alcuni di essi fossero finiti, alcuni passi della dimostrazione sarebbero superflui.

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui $a_i \geq 0$ per ogni $i \in I$.
Supponiamo che

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)} s(F) = s$$

sia finito. Fissiamo $E \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(K)$ e, per ogni $k \in E$, $F_k \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I_k)$. Posto $F = \bigcup_{k \in E} F_k \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, si ha

$$\sum_{k \in E} s(F_k) = s(F) \leq s \ .$$

Dall'insieme E isoliamo un suo singolo elemento k_0 e teniamo a primo membro il termine corrispondente:

$$s(F_{k_0}) \leq s - \sum_{k \in E \setminus \{k_0\}} s(F_k) \ .$$

Mantenendo fissati gli F_k a secondo membro, prendiamo l'estremo superiore al variare di F_{k_0} in $\mathscr{P}_{\text{fin}}(I_{k_0})$. Si ottiene che

$$\sum_{i \in I_{k_0}} a_i \leq s - \sum_{k \in E \setminus \{k_0\}} s(F_k) \ .$$

In particolare, la sommatoria $\sum_{i \in I_{k_0}} a_i$ converge, e la proprietà (i) è soddisfatta. Chiamiamo s_{k_0} la sua somma. Abbiamo allora la disuguaglianza

$$s_{k_0} + \sum_{k \in E \setminus \{k_0\}} s(F_k) \leq s \ .$$

Ripetendo lo stesso procedimento iterativamente per ognuno degli altri elementi di E, si ottiene che

$$\sum_{k \in E} s_k \leq s \ .$$

Passando all'estremo superiore rispetto a $E \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(K)$, si ottiene la condizione (ii), e inoltre che

$$\sum_{k \in K} s_k \leq \sum_{i \in I} a_i \ . \tag{6.2}$$

Supponiamo viceversa che siano soddisfatte le condizioni (i) e (ii). Dato $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, poniamo, per $k \in K$, $F_k = F \cap I_k$, e inoltre chiamiamo $E \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(K)$ l'insieme dei k per cui $F_k \neq \emptyset$. Essendo F l'unione disgiunta degli F_k con $k \in E$, si ha allora

$$s(F) = \sum_{k \in E} s(F_k) \leq \sum_{k \in E} s_k \leq \sum_{k \in K} s_k \ .$$

Passando all'estremo superiore rispetto a $F \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(I)$, si ottiene la disuguaglianza

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{k \in K} s_k \ . \tag{6.3}$$

Abbiamo dunque dimostrato, nel caso $a_i \geq 0$ per ogni i, l'equivalenza tra la convergenza della sommatoria su I da un lato, e le condizioni (i) e (ii) dall'altro. Inoltre, le due disuguaglianze (6.2) e (6.3) forniscono l'uguaglianza (6.1).

Consideriamo ora il caso generale. Supponiamo che la sommatoria $\sum_i a_i$ converga. Allora, per il Teorema 4.14, $\sum_i |a_i|$ converge. Essendo

$$0 \leq a_i^{\pm} \leq |a_i| \ ,$$

anche le due sommatorie $\sum_{i\in I} a_i^{\pm}$ convergono. Inoltre, essendo $a_i = a_i^+ - a_i^-$,

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- \ .$$

Applicando quanto dimostrato per sommatorie a termini positivi, possiamo allora affermare che

- per ogni $k \in K$, le due sommatorie $\sum_{i\in I_k} a_i^+$, $\sum_{i\in I_k} a_i^-$ convergono,
- chiamate s'_k, s''_k le rispettive somme, le sommatorie $\sum_{k\in K} s'_k$, $\sum_{k\in K} s''_k$ convergono,
- $\sum_{k\in K} s'_k = \sum_{i\in I} a_i^+$, $\sum_{k\in K} s''_k = \sum_{i\in I} a_i^-$.

Da questo si deduce che

- per ogni $k \in K$, $s_k = \sum_{i\in I_k} |a_i| = s'_k + s''_k$, e dunque vale la conclusione al punto (i),
- $\sum_{k\in K} s_k = \sum_{i\in I} |a_i|$, e dunque vale la conclusione al punto (ii),
- $\sum_{i\in I_k} a_i = s'_k - s''_k$,
- $\sum_{k\in K} (s'_k - s''_k) = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- = \sum_{i\in I} a_i$, cioè vale la formula (6.1).

Rimane da dimostrare l'implicazione inversa. Supponiamo che valgano (i) e (ii). Per confronto, le stesse due condizioni valgono con a_i^+, oppure a_i^-, al posto di $|a_i|$. Quindi, per la prima parte della dimostrazione, possiamo dire che convergono le due sommatorie $\sum_{i\in I} a_i^{\pm}$ e che

$$\sum_{i\in I} a_i^{\pm} = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{i\in I_k} a_i^{\pm} \Big) \ .$$

Ma allora la sommatoria $\sum_i a_i$ converge e

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{i\in I_k} a_i^+ \Big) - \sum_{k\in K} \Big(\sum_{i\in I_k} a_i^- \Big) = \sum_{k\in K} \Big(\sum_{i\in I_k} a_i \Big) \ .$$

□

7. Sommatorie a più indici

La differenza tra sommatoria e serie va tenuta ancora maggiormente in considerazione quando si prendono in esame "serie multiple", ossia con indici variabili in $\mathbb{N}^k$ con $k \geq 2$.
Supponiamo che l'insieme I degli indici di una sommatoria sia il prodotto cartesiano di k insiemi,

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k \ ,$$

di modo che la sommatoria assume la forma "a più indici"

$$\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)\in I_1\times I_2\times\cdots\times I_k} a_{i_1,i_2,\ldots,i_k} \ .$$

Per semplicità di notazioni ci limiteremo a considerare il caso $k = 2$, denotando con I e J, anziché I_1 e I_2, i due insiemi di indici. I risultati che dimostreremo hanno naturali estensioni al caso generale, che vengono lasciate per esercizio.
Ci interessa discutere la validità di alcune proprietà che sono ovvie per somme finite, in particolare:

- la sommazione "per orizzontali" o "per verticali":

$$(7.1) \qquad \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{j\in J} \Big(\sum_{i\in I} a_{i,j} \Big) = \sum_{i\in I} \Big(\sum_{j\in J} a_{i,j} \Big) \ ;$$

- la "proprietà distributiva":

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big)\ . \tag{7.2}$$

Il teorema che segue è una diretta conseguenza del Teorema 4.18.

TEOREMA 4.19. *Si consideri una successione a due indici $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ a valori reali. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) *$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ converge;*
(b) *per ogni j fissato, la sommatoria $\sum_{i\in I}|a_{i,j}|$ converge e, chiamata s_j la sua somma, converge anche $\sum_{j\in J} s_j$;*
(c) *per ogni i fissato, la sommatoria $\sum_{j\in J}|a_{i,j}|$ converge e, chiamata s'_i la sua somma, converge anche $\sum_{i\in I} s'_i$.*

Se queste condizioni sono verificate, hanno senso tutti i termini e le uguaglianze in (7.1).

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 4.18 alle due partizioni $\big\{I\times\{j\}\big\}_{j\in J}$ e $\big\{\{i\}\times J\big\}_{i\in I}$ di $I\times J$. □

A questo punto, si ottiene facilmente il seguente risultato sulla proprietà distributiva.

TEOREMA 4.20. *Date due sommatorie convergenti, $\sum_{i\in I} a_i$ e $\sum_{j\in J} b_j$, la sommatoria $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$ è pure convergente e vale l'uguaglianza (7.2).*

DIMOSTRAZIONE. Posto $A=\sum_{i\in I} a_i$, per j fissato, la sommatoria $\sum_{i\in I} a_i b_j$ converge a $s_j = b_j A$. Inoltre converge la sommatoria

$$\sum_{j\in J} s_j = A\sum_{j\in J} b_j\ .$$

La conclusione segue dunque dall'implicazione (b)⇒(a) del Teorema 4.19 e dalla (7.1) con $a_{i,j} = a_i b_j$. □

- Data una "successione doppia" $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, la *formulazione per serie* della seconda uguaglianza nella formula (7.1) diventa:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\Big)\ . \tag{7.3}$$

  È facile vedere che in generale questa identità non vale in generale: se si prende ad esempio

$$a_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{se } m=n \\ -1 & \text{se } m=n+1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

  si verifica che il primo membro dell'uguaglianza dà 1 e il secondo 0.

- Siccome $\mathbb{N}^2$ non ha un ordinamento naturale, non è univocamente definibile cosa sia una "serie doppia". Si ricorre allora a opportune famiglie cofinali $\mathcal{F}=\{F_N : N\in\mathbb{N}\}$ di $\mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}^2)$, a ciascuna delle quali si collega una diversa nozione di "somma della serie doppia".

Per esempio, si ha la *sommazione per quadrati* se si utilizza il limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m,\,n\le N} a_{m,n} \ ,$$

o la *sommazione per cerchi*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m^2+n^2\le N^2} a_{m,n} \ ,$$

oppure *per triangoli*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{m+n\le N} a_{m,n} \ ,$$

ecc. L'esempio che segue mostra che diversi metodi di sommazione danno luogo a diverse nozioni di convergenza.

Esempio. Si prenda

$$a_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{se } m = 0 \ , \ n > 0 \\ -\dfrac{1}{n} & \text{se } m = n > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sommando per quadrati, si ha

$$\sum_{m,\,n\le N} a_{m,n} = 0 \ ,$$

qualunque sia N. Sommando invece per triangoli, si ha, per $N = 2k$ pari,

$$\sum_{m+n\le 2k} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{k} -\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} = \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \ .$$

Tuttavia, i problemi citati sopra non si presentano in situazioni di assoluta convergenza, ossia quando le serie in questione coincidono con le sommatorie studiate nei paragrafi precedenti. Per esempio, riguardo all'inversione dell'ordine di sommazione nella (7.3), il Teorema 4.19 con $I = J = \mathbb{N}$ implica:

Corollario 4.21. *Sia $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ una funzione a valori reali definita su $\mathbb{N}^2$. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) $\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n}$ *converge;*

(b) *per ogni m fissato, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ converge e, chiamata s_m la somma di questa serie, converge anche la serie $\sum_{m=0}^{\infty} s_m$;*

(c) *per ogni n fissato, la serie $\sum_{m=0}^{\infty} |a_{m,n}|$ converge e, chiamata s'_n la somma di questa serie, converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} s'_n$.*

Se queste condizioni sono verificate, vale l'uguaglianza

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\Big) .$$

8. Prodotto secondo Cauchy di successioni

DEFINIZIONE 4.22 (**Prodotto di Cauchy**). *Date due successioni* (a_n) *e* (b_n)*, si chiama* prodotto secondo Cauchy *delle due successioni la successione* (c_n) *il cui termine* n*–esimo è*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{j+k=n} a_j b_k .$$

Si dice anche che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *è il prodotto secondo Cauchy delle due serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$*.*

Si vede facilmente che, se i termini a_n e b_n sono definitivamente nulli, e dunque si ha a che fare solo con somme finite, vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) .$$

Per discutere la validità di questa uguaglianza in generale, cominciamo dal caso in cui i termini a_n e b_n sono non negativi.

PROPOSIZIONE 4.23. *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni a termini non negativi, e sia* (c_n) *il loro prodotto secondo Cauchy. Allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) ,$$

con la convenzione che " $0\cdot\infty = 0$ *".*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che valgono le disuguaglianze

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n} b_i\Big) \le \sum_{i=0}^{2n} c_i \le \Big(\sum_{i=0}^{2n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=0}^{2n} b_i\Big)$$

e passare al limite per $n \to \infty$. □

Per il prodotto secondo Cauchy di successioni a valori di segno qualunque, spezzando come nella dimostrazione del Teorema 4.18 in parte positiva e negativa, si deduce facilmente il seguente corollario.

COROLLARIO 4.24. *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni le cui serie sono assolutamente convergenti, e sia* (c_n) *il loro prodotto secondo Cauchy. Allora la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *converge assolutamente e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) . \tag{8.1}$$

Osservazione 4.25. L'uguaglianza (8.1) non vale in generale in assenza di convergenza assoluta. Si dimostri, per esempio, che il prodotto secondo Cauchy della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (convergente per il criterio di Leibniz) con se stessa è una serie il cui termine n–simo c_n non tende a zero, e dunque non converge.
Tuttavia è possibile dimostrare che, se due serie convergono e almeno una delle due converge assolutamente, si ha la convergenza (ma non necessariamente assoluta) del loro prodotto di Cauchy e vale l'uguaglianza (8.1) (Teorema di Mertens).[8] □

Il prodotto secondo Cauchy interviene in vari problemi riguardanti serie di funzioni. Uno di questi riguarda la convergenza di *serie di potenze* (che saranno studiate ampiamente più avanti). Si supponga di avere due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ ,$$

entrambe dipendenti da una variabile x (i coefficienti a_n e b_n sono numeri reali assegnati). Si supponga di sapere che entrambe le serie convergono quando a x vengono assegnati valori in un dato insieme $E \subseteq \mathbb{R}$. Esse allora definiscono due funzioni definite su E a valori in $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ .$$

Moltiplicando i termini delle due serie a due a due, risulta naturale raggruppare insieme i prodotti contenenti la stessa potenza di x. Si ottiene così una nuova serie di potenze,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j+k=n} a_j b_k \Big) x^n \ ,$$

che non è altro, per x fissato, che il prodotto secondo Cauchy delle due serie date. Si vuole sapere se essa converge a $f(x)g(x)$ quando $x \in E$ e la (8.1) dà risposta positiva, in presenza di convergenza assoluta (per almeno una delle due serie).

[8] Detta (a_n) la successione la cui serie converge assolutamente, la dimostrazione si basa sulla scrittura $C_n = \sum_0^n a_{n-i} B_i = \sum_0^n a_{n-i}(B_i - B) + A_n B$, ove A_n, B_n, C_n sono le somme parziali delle tre serie.

CAPITOLO 5

SPAZIO EUCLIDEO $\mathbb{R}^n$, SPAZI TOPOLOGICI E METRICI

Da questo punto in poi diamo per noti:

(1) la struttura di $\mathbb{R}^n$ come spazio vettoriale;
(2) i fatti di base della teoria dei limiti di funzioni a valori reali in una variabile reale;
(3) la caratterizzazione del limite in un punto tramite successioni;
(4) il teorema della permanenza del segno.

Nel seguito chiameremo *intervallo* di $\mathbb{R}$ ogni sottoinsieme non vuoto della forma (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ e $[a, b]$, ammettendo nei casi in cui gli estremi non sono inclusi anche i valori $a = -\infty$ e $b = +\infty$ (in questo modo tutte le semirette e anche lo stesso insieme $\mathbb{R}$ sono intervalli). Daremo anche per noti i risultati di base della teoria delle funzioni continue, e in particolare:

(1) il teorema dei valori intermedi (l'immagine tramite una funzione continua di un intervallo è un intervallo);
(2) la nozione di continuità uniforme;
(3) il teorema di Heine–Cantor (ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua);
(4) le relazioni tra monotonia e invertibilità per funzioni continue su un intervallo: (a) ogni funzione continua e iniettiva su un intervallo è monotona,[1] (b) se una funzione monotona g definita su un intervallo ha come immagine un intervallo, allora è continua,[2] (c) se I, J sono intervalli e $f : I \to J$ è continua e biiettiva, allora $f^{-1} : J \to I$ è continua.[3]

1. Struttura euclidea di $\mathbb{R}^n$: prodotto scalare, modulo e distanza

Nello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$, ma vedremo anche in altri spazi, è possibile dedurre dal prodotto scalare una nozione di lunghezza (modulo di un vettore) e, da questa, una nozione di distanza. Non sempre, come vedremo, questo percorso si può invertire: esistono nozioni di lunghezza non associate a prodotti scalari e distanze non associate a nozioni di lunghezza.
Siano

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \ , \qquad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

due elementi, o *punti* o *vettori*, di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 5.1 (**Prodotto scalare**). *Si chiama prodotto scalare tra x e y il numero reale*

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \ .$$

[1] Se ad esempio $x < y < z$, $f(x) < f(y)$ e $f(y) > f(z)$, basta scegliere ℓ compreso tra $\max\{(x), f(z)\}$ e $f(y)$ e applicare il teorema dei valori intermedi in $[x, y]$ e $[y, z]$ per avere una contraddizione.

[2] Se avesse una discontinuità, necessariamente a salto, in un punto t, allora l'intervallo aperto avente come estremi i limiti destri e sinistri in t non sarebbe contenuto nell'immagine, che quindi non sarebbe un intervallo.

[3] Basta applicare (b) all'inversa di f, che è monotona per (a).

Si chiama modulo *di x il numero non negativo*

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\ .$$

Le proprietà fondamentali del prodotto scalare sono le seguenti:

- per ogni x, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = y \cdot x$;
- per ogni x, x', $y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x + \lambda x') \cdot y = x \cdot y + \lambda x' \cdot y$;
- per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot x \geq 0$ ed è uguale a 0 se e solo se $x = 0$.

La seconda proprietà è la *linearità nella prima componente*. Per la prima proprietà, di *simmetria*, si ha anche linearità nella seconda componente. Una conseguenza importante e non ovvia di queste proprietà è la seguente disuguaglianza.

TEOREMA 5.2 (**Disuguaglianza di Cauchy–Schwarz**). *Per ogni x, $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$|x \cdot y| \leq |x|\,|y|\ ,$$

con uguaglianza se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Si noti che a primo membro compare il modulo (valore assoluto) di un numero reale, mentre i moduli a secondo membro sono moduli di vettori.

DIMOSTRAZIONE. Se almeno uno tra x e y è il vettore nullo, si hanno l'uguaglianza $0 = 0$ e la lineare dipendenza, in coerenza con quanto enunciato. Supponiamo allora che x e y siano entrambi diversi da 0. Si consideri, al variare di λ in $\mathbb{R}$, il prodotto scalare

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (x + \lambda y) \cdot (x + \lambda y) \\ &= x \cdot (x + \lambda y) + \lambda\big(y \cdot (x + \lambda y)\big) \\ &= (x + \lambda y) \cdot x + \lambda\big((x + \lambda y) \cdot y\big) \\ &= |x|^2 + 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 |y|^2\ . \end{aligned}$$

Si osservi che $p(\lambda)$ è un polinomio di secondo grado in λ, sempre non negativo su $\mathbb{R}$. Quindi il suo discriminante, $\Delta = 4\big((x \cdot y)^2 - |x|^2|y|^2\big)$ deve essere minore o uguale a 0, cioè

$$(x \cdot y)^2 \leq |x|^2 |y|^2\ .$$

Estraendo le radici quadrate positive di ambo i membri, si ottiene la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz. Si noti poi che vale l'uguaglianza se e solo se $\Delta = 0$, e dunque se e solo se esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ per cui $p(\lambda_0) = 0$. Ma questo equivale a dire che $x + \lambda_0 y = 0$, e dunque che x e y sono linearmente dipendenti. □

COROLLARIO 5.3. *Il modulo in $\mathbb{R}^n$ soddisfa la* disuguaglianza triangolare

$$|x + y| \leq |x| + |y|\ ,$$

con uguaglianza se e solo se esiste $\lambda \geq 0$ per cui $x = \lambda y$ oppure $y = \lambda x$.

DIMOSTRAZIONE. Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz si ha

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y) \cdot (x + y) \\ &= |x|^2 + 2x \cdot y + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x \cdot y| + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 \\ &= \big(|x| + |y|\big)^2\ . \end{aligned}$$

Questo dimostra la disuguaglianza. Per avere l'uguaglianza, devono valere le due condizioni $x \cdot y \geq 0$ e $|x \cdot y| = |x|\,|y|$. Per il Teorema 5.2, x e y devono essere linearmente dipendenti, e inoltre la condizione $x \cdot y \geq 0$ implica che la costante di proporzionalità tra le loro componenti deve essere non negativa. $\square$

Siano x, y elementi non nulli di $\mathbb{R}^n$. Essendo

$$-1 \leq \frac{x \cdot y}{|x||y|} \leq 1 \ ,$$

esiste uno e uno solo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$x \cdot y = |x||y| \cos\theta \ .$$

Si dice che θ è l'*angolo compreso tra x e y*. Due elementi x, y di $\mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $x \cdot y = 0$.
A questo punto elenchiamo le proprietà fondamentali del modulo:

- per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| \geq 0$, e $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda x| = |\lambda||x|$;
- per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Definizione 5.4. *Si chiama* distanza euclidea *su $\mathbb{R}^n$ la funzione*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty)$$

data da

$$d(x, y) = |x - y| \ .$$

Dalle proprietà del modulo si deducono le seguenti proprietà della distanza:

- per ogni x, $y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
- per ogni x, $y \in \mathbb{R}^n$, $d(y, x) = d(x, y)$;
- per ogni x, $y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$;
- per ogni x, y, $z \in \mathbb{R}^n$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Dalla proprietà triangolare si deduce facilmente che

$$\forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{R}^n \ , \qquad \big| d(x, z) - d(y, z) \big| \leq d(x, y) \ . \tag{1.1}$$

Dati tre punti x, y, z nel piano $\mathbb{R}^2$, le tre distanze $d(x, y)$, $d(x, z)$, $d(y, z)$ rappresentano le lunghezze dei lati del triangolo (possibilmente degenere) di vertici x, y, z. La disuguaglianza triangolare dice che la lunghezza di un lato è minore o uguale della somma delle altre due, mentre la disuguaglianza (1.1) dice che la lunghezza di un lato è maggiore o uguale della differenza delle altre due. Questa proprietà si estende dunque a triangoli in spazi di dimensione superiore.

2. Insiemi aperti e chiusi di $\mathbb{R}^n$, parte interna, chiusura, frontiera

In questo paragrafo e nei due seguenti elenchiamo le nozioni principali relative alla *topologia*[4] di $\mathbb{R}^n$, presentando le principali relazioni tra di esse.
Si chiama *palla aperta di centro x_0 e raggio $r > 0$* in $\mathbb{R}^n$ l'insieme

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, x_0) < r\} \ .$$

[4] Il significato di questo termine verrà chiarito nell'Osservazione **??**.

Indicheremo anche con $\overline{B}_r(x_0)$ la *palla chiusa* $\{x \in \mathbb{R}^n : \; d(x, x_0) \le r\}$. Notiamo che la proprietà triangolare della distanza ha delle conseguenze in termini di inclusioni di palle (si veda la formula (2.2) più avanti) e di intersezioni: se due palle aperte (risp. chiuse) hanno intersezione non vuota allora la distanza dei centri è strettamente minore (risp. minore o uguale) della somma dei raggi.

2.1. Insiemi aperti e chiusi.

DEFINIZIONE 5.5 (**Insiemi aperti**). *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^n$ si dice aperto se è unione di una famiglia (possibilmente vuota) di palle aperte.*

Si noti che, in particolare, l'insieme vuoto è aperto, così come le palle aperte (si prendere la famiglia costituita da un solo elemento).
Questa definizione si può formulare, in modo equivalente, come segue:

$$\forall\, x_0 \in A \;\exists\, r > 0 : B_r(x_0) \subseteq A \;. \tag{2.1}$$

Infatti, se vale la (2.1) è evidente che A è unione di una famiglia di palle aperte. Viceversa, possiamo verificare che per ogni punto x contenuto in una palla aperta B esiste una palla B' centrata in x e contenuta in B, per la disuguaglianza triangolare vale infatti

$$B_{r-d(x,x_0)}(x) \subseteq B_r(x_0) \quad \text{per ogni } x \in B_r(x_0) \;. \tag{2.2}$$

Grazie a questa considerazione possiamo verificare che ogni insieme aperto soddisfa la condizione (2.1), visto che questa è soddisfatta dalle palle aperte.
Non tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono aperti. Per esempio, un insieme costituito da un unico punto x_0 non può contenere nessuna palla di centro x_0. Per esercizio, si dimostri che la palla chiusa $\overline{B}_1(0)$ non è aperta.
La seguente proposizione segue subito dalla formula (2.1).

PROPOSIZIONE 5.6 (**Stabilità degli insiemi aperti**). *La famiglia degli insieme aperti di $\mathbb{R}^n$ gode delle seguenti proprietà:*

(i) *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono aperti;*
(ii) *l'unione di una qualsiasi famiglia di aperti è aperta;*
(iii) *l'intersezione di una famiglia finita di aperti è aperta.*

DEFINIZIONE 5.7 (**Insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$**). *Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto.*

Usando le formule di De Morgan, si dimostra facilmente il seguente enunciato.

PROPOSIZIONE 5.8 (**Stabilità degli insiemi chiusi**). *La famiglia degli insiemi chiusi di $\mathbb{R}^n$ gode delle seguenti proprietà:*

(i) *$\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono chiusi;*
(ii) *l'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi chiusi è chiusa;*
(iii) *l'unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è chiusa.*

Si mostri per esercizio che le palle chiuse $\overline{B}_r(x_0)$ sono, per l'appunto, chiuse. Si noti anche che $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi, mentre esistono insiemi che non sono né aperti né chiusi: per esempio, in $\mathbb{R}$, gli intervalli semiaperti $[a, b)$, $(a, b]$ con $a < b$.

2.2. Parte interna, chiusura e frontiera di un insieme.

DEFINIZIONE 5.9 (**Parte interna**). *Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, indicheremo con $\mathring{E}$ la parte interna di E, ovvero il più grande aperto contenuto in E.*

Per le proprietà di stabilità degli insiemi aperti, la definizione di parte interna è ben posta e un insieme E è aperto se e solo se $\mathring{E} = E$. La seguente proposizione dà una caratterizzazione più operativa della parte interna.

PROPOSIZIONE 5.10. *Per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto vale*

$$\mathring{E} = \left\{x \in E : \ \textit{esiste } r > 0 \textit{ tale che } B_r(x) \subseteq E\right\} . \tag{2.3}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $x_0 \in \mathring{E}$, dato che $\mathring{E}$ è aperto esiste una palla $B_r(x_0)$ tale che $B_r(x_0) \subseteq \mathring{E}$. Quindi a maggior ragione $B_r(x_0) \subseteq E$ e abbiamo stabilito l'inclusione $\subseteq$ nell'uguaglianza (2.3). Viceversa, l'insieme A a destra nella (2.3) è contenuto in E ed è aperto. Infatti, se $x \in A$ e $B_r(x) \subseteq E$ allora $B_{r/2}(y) \subseteq B_r(x) \subseteq E$ per ogni $y \in B_{r/2}(x)$, quindi $B_{r/2}(x) \subset A$. Quindi la massimalità di $\mathring{E}$ implica l'uguaglianza cercata. □

DEFINIZIONE 5.11 (**Chiusura**). *Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$, indicheremo con $\overline{E}$ il più piccolo chiuso contenente E.*

Per le proprietà degli insiemi chiusi, la definizione è ben posta. Inoltre, per passaggio al complementare abbiamo le relazioni

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathring{E} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus E} \,, \qquad \overset{\circ}{\overline{\mathbb{R}^n \setminus E}} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{E} \,.$$

Con la formula (2.3), si verifichi per esercizio che la parte interna della palla chiusa è la palla aperta. Si mostri anche che per A aperto e E chiuso valgono rispettivamente le inclusioni

$$\mathring{\overline{A}} \supseteq A \,, \qquad \overline{\mathring{E}} \subseteq E \,,$$

e che, in generale, non sono uguaglianze.
Per poter dare una caratterizzazione più operativa della chiusura, chiameremo un punto $x_0 \in E$ *aderente* a E se vale

$$\forall\, r > 0 \,, \quad E \cap B_r(x_0) \neq \emptyset \,.$$

Ovviamente gli elementi di E sono tutti aderenti a E, ma potrebbero essercene altri. Per esempio, un qualunque punto della palla chiusa $\overline{B}_r(x_0)$ è aderente all'insieme $E = B_r(x_0)$.
Sempre per passaggio al complementare, dalla uguaglianza (2.3) deduciamo la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 5.12. *Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $\overline{E}$ è l'insieme dei punti aderenti ad E.*

Con questo criterio, si verifichi per esercizio che la chiusura della palla aperta è la palla chiusa. Più in generale possiamo dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 5.13 (**Insieme denso**). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme, e sia E' un suo sottoinsieme. Si dice che E' è denso in E se $\overline{E'} \supseteq E$, equivalentemente se per ogni $x \in E$ e per ogni $r > 0$ l'intersezione $B_r(x) \cap E'$ non è vuota.*

Esempio. $\mathbb{Q}^n$ è denso in $\mathbb{R}^n$, basta infatti scegliere per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ razionali q_i tali che $|x_i - q_i| < \epsilon/n$, ottenendo cosí $|x - q| < \epsilon$ per $q = (q_1, \ldots, q_n)$.

Definizione 5.14 (**Frontiera**). *L'insieme*

$$\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus E}$$

si chiama frontiera *di E.*

Osserviamo che $\partial E = \partial(\mathbb{R}^n \setminus E)$. Ad esempio, la frontiera della palla aperta (o anche della palla chiusa) è la *sfera*

$$S_r(x_0) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, x_0) = r\right\} .$$

Tuttavia, la frontiera di un insieme piccolo può anche essere molto grande: ad esempio la frontiera di $\mathbb{Q}^n$ è $\mathbb{R}^n$.

2.3. Punti di accumulazione, punti isolati e derivato di un insieme.

Definizione 5.15 (**Punti di accumulazione e isolati**). *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è* di accumulazione *per l'insieme E se*

$$\forall\, r > 0 \ , \quad E \cap \big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \neq \emptyset \ .$$

L'insieme dei punti di accumulazione per E si chiama insieme derivato *di E e si indica con $D(E)$. Un punto x_0 di E si dice* isolato *in E se*

$$\exists\, r > 0 \ : \ E \cap \big(B_r(x_0) \setminus \{x_0\}\big) = \emptyset \ .$$

Si noti, nella definizione di $D(E)$, la differenza con la nozione di punto aderente, a causa del fatto che x_0 viene escluso nell'intersezione. Chiaramente valgono le seguenti proprietà:

- i punti di accumulazione per E sono aderenti a E, i.e. $D(E) \subseteq \overline{E}$;
- i punti aderenti a E che non siano in E sono di accumulazione per E, i.e. $\overline{E} = E \cup D(E)$;
- ogni punto di E è di accumulazione per E o isolato in E.

Esempio. In $\mathbb{R}$, sia $E = \left\{\frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Tutti i punti di E sono isolati in E, ed E ha un unico punto di accumulazione, l'origine, che non appartiene a E. Si noti che $\emptyset = D(D(E)) \subsetneq D(E) \subsetneq E$.

Proposizione 5.16. *L'insieme derivato di un insieme E è un sottoinsieme chiuso di $\overline{E}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $\mathbb{R}^n \setminus D(E)$ è aperto. Se $x_0 \notin D(E)$, esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ è disgiunto da E. Se $x_0 \notin E$ deduciamo che $B_r(x_0) \cap E = \emptyset$ e quindi che nessun punto di $B_r(x_0)$ può essere di accumulazione per E, i.e. $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus D(E)$. Se $x_0 \in E$ allora x_0 è un punto isolato in E e vale la stessa conclusione. □

3. Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$

Sia $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una successione di punti di $\mathbb{R}^n$, che indicheremo con l'abituale simbolo (a_k). D'ora in poi, con lieve abuso di notazione, scriveremo anche $(a_k) \subseteq E$ per dire che la successione prende i suoi valori nell'insieme E.

Definizione 5.17. *Si dice che $\ell \in \mathbb{R}^n$ è limite della successione (a_k) se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $k \geq k_0$, $d(a_k, \ell) < \varepsilon$.*

È immediato verificare che il limite, se esiste, è unico. Infatti $d(a_k, \ell) < \varepsilon$ e $d(a_k, \ell') < \varepsilon$ con $2\varepsilon \in (0, d(\ell, \ell'))$ contraddice la disuguaglianza triangolare

$$d(\ell, \ell') \leq d(\ell, a_k) + d(a_k, \ell') < \varepsilon + \varepsilon < d(\ell, \ell') \ .$$

Sempre usando la disuguaglianza triangolare, si mostra subito che ogni successione convergente è limitata, i.e. contenuta in una palla (e, sempre per la disuguaglianza triangolare, il centro della palla può essere scelto arbitrariamente, pur di aumentare il raggio).
Altre formulazioni equivalenti della convergenza sono: *ℓ è limite della successione se, per ogni $\varepsilon > 0$, i punti a_k sono definitivamente contenuti nella palla $B_\varepsilon(\ell)$*, o anche

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \ell \iff \lim_{k\to\infty} d(a_k, \ell) = 0 \ , \tag{3.1}$$

dove il limite a secondo membro riguarda una successione di numeri reali. Da questo (o anche da una verifica diretta) si può dedurre che anche questa nozione di limite è stabile per passaggio a sottosuccessioni.
Vediamo ora due proprietà importanti dei limiti in $\mathbb{R}^n$.

Proposizione 5.18 (**Convergenza dei moduli e delle distanze**). *Se $\lim_k a_k = \ell$, allora $\lim_k |a_k| = |\ell|$. Più in generale, $\lim_k d(a_k, b) = d(\ell, b)$ per ogni $b \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza (1.1) si ha

$$0 \leq \big||a_k| - |\ell|\big| = \big|d(a_k, 0) - d(\ell, 0)\big| \leq d(a_k, \ell) \ .$$

Per la (3.1), $\lim_k \big(|a_k| - |\ell|\big) = 0$, da cui la tesi. Lo stesso ragionamento, sostituendo l'origine con un qualsiasi altro punto b fissato, dà l'enunciato più generale. $\square$

D'ora in poi useremo spesso le disuguaglianze elementari $\max_i |x_i| \leq |x| \leq \sum_i |x_i|$.

Proposizione 5.19 (**Convergenza componente per componente**). *Posto $a_k = (a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n)$ e $\ell = (\ell^1, \ell^2, \ldots, \ell^n)$, si ha l'equivalenza*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \ell \quad \iff \quad \forall\, j = 1, \ldots, n \ , \quad \lim_{k\to\infty} a_k^j = \ell^j \ .$$

Dimostrazione. Se $\lim_k a_k = \ell$, dato che $|a_k^j - \ell^j| \leq |a_k - \ell|$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, per confronto deduciamo la convergenza delle componenti. Per l'altra implicazione, osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 \leq \sum_{j,k=1}^n |x_j||x_k| = \Big(\sum_{j=1}^n |x_j|\Big)^2 \ ,$$

per cui

$$|a - \ell| \leq \sum_{j=1}^n |a^j - \ell^j|$$

con $a = a_k$. La tesi segue facilmente. $\square$

La Proposizione 5.19 consente di ridurre lo studio di una successione di punti di $\mathbb{R}^n$ allo studio di n successioni numeriche. Questo è utile per estendere a questa classe di successioni il criterio di convergenza di Cauchy e il teorema di Bolzano–Weierstrass.[5]

[5] È un utile esercizio cercare di dimostrare il teorema di Bolzano–Weierstrass attraverso un metodo di bisezione, senza ragionare componente per componente.

Proposizione 5.20 (**Criterio di convergenza di Cauchy**). *Una successione (a_k) in $\mathbb{R}^n$ converge se e solo se è di Cauchy, vale a dire per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $d(a_k, a_{k'}) < \varepsilon$ per ogni k, $k' \geq k_0$.*

Teorema 5.21 (**Bolzano–Weierstrass**). *Ogni successione limitata (a_k) in $\mathbb{R}^n$ ha una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Estraiamo una prima sottosuccessione $s_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo tale che $(a^1_{s_1(k)})$ converga a un limite ℓ^1. Dalla successione $(a_{s_1(k)})$ possiamo estrarre un'altra sottosuccessione $s_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in modo tale che $(a^2_{s_1(s_2(k))})$ converga a un limite ℓ^2. Si noti che, essendo $(a^1_{s_1(s_2(k))})$ una sottosuccessione di $(a^1_{s_1(k)})$, questa continua a convergere a ℓ^1. In sostanza, la prima e la seconda componente di $(a_{s_1(s_2(k))})$ convergono. Se $n > 2$, proseguendo così per altri $n-2$ passi si guadagna la convergenza di tutte le componenti. Posto $\ell = (\ell^1, \dots, \ell^n)$, la sottosuccessione

$$\big(a_{s_1(s_2(s_3(\cdots s_n(k)\cdots)))}\big)$$

converge a ℓ grazie alla Proposizione 5.19. □

Sempre ragionando componente per componente, non è difficile mostrare le seguenti proprietà:

(1) se due successioni (a_k), (b_k) a valori in $\mathbb{R}^n$ sono convergenti, rispettivamente a ℓ e ℓ', allora

$$\lim_{k\to\infty} (a_k + b_k) = \ell + \ell' \ ;$$

(2) se due successioni (a_k) a valori in $\mathbb{R}^n$ e (λ_k) a valori in $\mathbb{R}$ sono convergenti, rispettivamente a ℓ e λ, allora

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k a_k = \lambda\ell \ ;$$

(3) se due successioni (a_k), (b_k) a valori in $\mathbb{C}$ sono convergenti[6], rispettivamente a ℓ e ℓ', allora

$$\lim_{k\to\infty} a_k b_k = \ell\ell' \ ;$$

(4) vale il teorema di convergenza assoluta per serie di elementi di $\mathbb{R}^n$:[7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ converge } \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge } ,$$

e in questo caso

$$|\sum_{k=0}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|. \tag{3.2}$$

La disuguaglianza (3.2) si dimostra partendo dalla disuguaglianza triangolare sulle ridotte:

$$|\sum_{k=0}^{p} a_k| \leq \sum_{k=0}^{p} |a_k| \ ,$$

e passando al limite utilizzando a primo membro la Proposizione 5.18.

[6] Le successioni di numeri complessi vengono considerate come a valori in $\mathbb{R}^2$, con componenti $(\Re\mathrm{e}\, a_k, \Im\mathrm{m}\, a_k)$.

[7] Per serie di vettori di $\mathbb{R}^n$ la convergenza va intesa componente per componente o, equivalentemente, come convergenza in $\mathbb{R}^n$ delle somme parziali da 0 a N.

Osservazione 5.22. In dimensione $n \geq 2$ il "limite infinito" si intende come segue:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \iff \lim_{k\to\infty} |a_k| = +\infty \ .$$

Ovviamente, relativamente a successioni di punti di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, i simboli $\pm\infty$ non hanno senso. La distinzione tra un "infinito positivo" e un "infinito negativo" è strettamente legata all'ordinamento di $\mathbb{R}$. □

4. Caratterizzazione per successioni della chiusura e del derivato di un insieme

Il seguente teorema mostra che possiamo caratterizzare mediante successioni la chiusura di un insieme e l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

TEOREMA 5.23.

(i) *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è aderente a un insieme E se e solo se esiste una successione (a_k) tale che $a_k \in E$ per ogni k e $\lim_k a_k = x_0$.*
(ii) *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è di accumulazione per un insieme E se e solo se esiste una successione (a_k) tale che $a_k \in E \setminus \{x_0\}$ per ogni k e $\lim_k a_k = x_0$.*
(iii) *Un insieme E è chiuso se e solo se è chiuso per successioni, vale a dire, per ogni successione (a_k) di elementi di E convergente a un limite ℓ, anche $\ell \in E$.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo solo l'enunciato (i), le altre dimostrazioni essendo analoghe o facilmente deducibili da questa. Se $x_0 \in \overline{E}$, per ogni $k \geq 1$, esiste un punto $a_k \in B_{1/k}(x_0) \cap E$. Essendo $|a_k - x_0| < 1/k$, la successione (a_k) converge a x_0.
Viceversa, se $x_0 = \lim_k a_k$, con $a_k \in E$ per ogni k, dato $r > 0$, gli a_k sono definitivamente in $B_r(x_0)$. Quindi $E \cap B_{x_0,r}$ non è vuoto, e dunque x_0 è aderente a E. □

5. Punti limite di una successione

DEFINIZIONE 5.24. *Sia (a_k) una successione a valori in $\mathbb{R}^n$. Si dice che $x \in \mathbb{R}^n$ è un* punto limite *della successione se esiste una sottosuccessione $(a_{k(p)})$ convergente a x.*

Le seguenti proprietà sono evidenti o di facile verifica:
• una successione (a_k) non ha punti limite se e solo se $\lim_k |a_k| = +\infty$ (Teorema di Bolzano–Weierstrass), equivalentemente una successione (a_k) ha punti limite se e solo se $\liminf_k |a_k| < +\infty$;
• una successione limitata (a_k) ha un unico punto limite x se e solo se $\lim_k a_k = x$. Infatti una implicazione è ovvia, per la stabilità del limite rispetto a sottosuccessioni. Viceversa, se (a_k) ha un unico punto limite x, se supponiamo per assurdo che (a_k) non tenda a x troviamo $\varepsilon > 0$ tale che $|a_k - x| > \epsilon$ per infiniti indici k. Usando questi indici per costruire una sottosuccessione convergence, troviamo un punto limite necessariamente diverso da x.

PROPOSIZIONE 5.25. *Data una successione (a_k), sia $E_k = \{a_{k'} : \ k' \geq k\}$. Allora l'insieme L dei punti limite della successione è uguale a*

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{E}_k \ .$$

In particolare, L è chiuso.

Si noti che $E_{k+1} \subseteq E_k$ per ogni k e che la stessa relazione vale per le chiusure.

Dimostrazione. Sia x un punto limite, $x = \lim_p a_{k(p)}$. Dato che $k(p) \geq k$ definitivamente, x è limite di una successione di elementi di E_k, da cui segue che $x \in \overline{E}_k$. Abbiamo quindi mostrato che $L \subseteq \bigcap_k \overline{E}_k$.
Viceversa, se $x \in \cap_k \overline{E}_k$, per ogni $m \in \mathbb{N}$ e ogni $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esiste $k > m$ tale che $a_k \in B_{1/p}(x)$. Si scelga allora induttivamente

$$k_0 \text{ tale che } x_{k(0)} \in B_1(x) \ , \qquad k(p+1) > k(p) \text{ tale che } a_{k(p+1)} \in B_{1/(p+1)}(x) \ .$$

La sottosuccessione $(a_{k(p)})$ converge allora a x. □

La Proposizione 5.25 mostra che per ogni successione a valori in un insieme E l'insieme dei punti limite è un sottoinsieme chiuso di E. Mostriamo ora che l'insieme E può essere un chiuso arbitrario. Tralasciamo il caso $E = \emptyset$, corrispondente a una successione tendente all'infinito.[8]

Teorema 5.26. *Sia E un sottoinsieme chiuso non vuoto di $\mathbb{R}^n$. Esiste allora una successione (a_k) di elementi di E avente E come insieme dei suoi punti limite.*

Dimostrazione. Sia $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^n$ una numerazione dei punti a coordinate razionali di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ scegliamo un elemento $x_k \in E$ che quasi minimizza la distanza in E da q_k, i.e. tale che[9]

$$|x_k - q_k| < \inf_{y \in E} |y - q_k| + \frac{1}{k}$$

(se $q_k \in E$ si può prendere $x_k = q_k$). Mostriamo che la successione (x_k) ha la proprietà richiesta. Dato $x \in E$, per la densità di $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ esiste una successione $(q_{k(p)}) \subseteq \mathbb{Q}^n$ convergente a x. La corrispondente successione $(x_{k(p)})$ è costituita da elementi di E e, per come sono stati scelti x_k, soddisfa

$$|x_{k(p)} - q_{k(p)}| < \inf_{y \in E} |y - q_{k(p)}| + \frac{1}{k(p)} \leq |x - q_{k(p)}| + \frac{1}{k(p)} \ .$$

Dunque anche $(x_{k(p)})$ converge a x. □

6. Spazi topologici

La topologia fornisce una definizione assiomatica di "sottoinsiemi aperti" di un insieme qualsiasi. A partire da questa, si giunge a nozioni di convergenza di successioni di elementi dell'insieme e di continuità di funzioni tra insiemi dotati di topologie.
Un esempio di topologia è quella su $\mathbb{R}^n$ descritta nei paragrafi precedenti, detta *topologia euclidea.* Bisogna però tener presente che la nozione generale di spazio topologico è molto ampia e comprende topologie con proprietà molto diverse da quella euclidea.
Questo paragrafo contiene una presentazione delle principali nozioni di topologia, finalizzate a inquadrare il contesto generale.

Definizione 5.27. *Si chiama* topologia *su un insieme X una famiglia $\tau \subseteq \mathscr{P}(X)$ di sottoinsiemi di X, detti* aperti*, che soddisfi le seguenti proprietà:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$;
(ii) *Se* $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, *allora* $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$;

[8] In realtà l'insieme dei punti limite andrebbe definito in $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, in modo da includere il caso in cui vi siano sia sottosuccessioni convergenti, sia sottosuccessioni divergenti in modulo. Questo richiede però di introdurre una topologia su $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, cosa che faremo nel prossimo paragrafo 6.

[9] In effetti si potrebbe anche mostrare che l'inf è raggiunto, usando il teorema di Bolzano-Weierstrass. Lo si mostri per esercizio.

(iii) *Se* $A_1, \dots, A_n \in \tau$, *allora* $A_1 \cap \dots \cap A_n \in \tau$.

Si chiama spazio topologico una coppia (X, τ), *dove* τ *è una topologia su* X.

Ovviamente uno stesso insieme X che abbia almeno due elementi ammette più topologie.

Esempi.

1. Su $\mathbb{R}^n$, oltre alla topologia euclidea, indichiamo le seguenti topologie:

(1) la *topologia discreta* $\tau = \mathscr{P}(X)$ su un qualunque insieme X;
(2) la *topologia indiscreta* $\tau = \{\emptyset, X\}$ su un qualunque insieme X;
(3) su $\mathbb{R}$, le famiglie $\tau_+ = \big\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\big\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ e $\tau_- = \big\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\big\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ sono topologie.

2. ($\mathbb{N}$ *esteso*)
Sull'insieme $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ si consideri la topologia

$$\tau = \mathscr{P}(\mathbb{N}) \cup \big\{E \cup [n, \infty] : E \in \mathscr{P}(\mathbb{N}),\, n \in \mathbb{N}\big\} ,$$

dove $[n, \infty] = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \cup \{\infty\}$.

3. (*La retta estesa*) Si consideri l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$ ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due elementi, che indichiamo con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} .$$

Su $\overline{\mathbb{R}}$ si definisce la topologia τ i cui aperti sono le unioni dei seguenti insiemi:

- aperti della topologia euclidea di $\mathbb{R}$;
- gli insiemi
$$(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\} ,$$
con $a \in \mathbb{R}$;
- gli insiemi
$$[-\infty, a) = (-\infty, a) \cup \{-\infty\} ,$$
con $a \in \mathbb{R}$.

4. ($\mathbb{R}^n$ *esteso*) Su $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ si definisce la topologia i cui aperti sono le unioni di

- aperti di $\mathbb{R}^n$,
- insiemi della forma $(\overline{B})^c \cup \{\infty\}$ dove B è una palla di $\mathbb{R}^n$.

5. (*Topologia prodotto*) Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici. La topologia prodotto su $X \times Y$ è definita come

$$\tau \times \sigma = \Big\{ \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i : I \text{ arbitrario, } A_i \in \tau\,,\, B_i \in \sigma \Big\} .$$

In modo analogo si definisce la topologia prodotto sul prodotto cartesiano di un numero finito di spazi topologici. Nel caso di prodotto di infiniti spazi (X_j, τ_j) con $j \in J$, si definiscono aperti le unioni $\bigcup_{i \in I} C_i$ di *cilindri*, chiamando cilindro un insieme

$$C = \prod_{j \in J} A_j ,$$

dove $A_j \in \tau_j$ per ogni j e $A_j = X_j$ tranne che per un numero finito di indici j.

6. (*Topologia indotta su un sottoinsieme*) Sia (X, τ) uno spazio topologico, e sia $Y \subset X$. Si chiama *topologia indotta* da τ su Y la famiglia di insiemi

$$\tau_{|_Y} = \{A \cap Y : A \in \tau\} .$$

Per esercizio si verifichi che

- quelle definite negli esempi 1-5 sono effettivamente topologie;
- detta τ_{eu}^n la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$, vale l'identità
$$\tau_{\text{eu}}^n \times \tau_{\text{eu}}^m = \tau_{\text{eu}}^{n+m} .$$

Una proprietà importante della topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ è la seguente: dati due punti distinti $x, y \in \mathbb{R}^n$, esistono due aperti disgiunti A, B tali che $x \in A$ e $y \in B$. Questa proprietà viene usata in molte dimostrazioni, per es. per dimostrare l'unicità del limite di una successione.
Essa però non vale in tutte le topologie, per es. non vale per le topologie τ_+ e τ_- del punto (3) nell'Esempio 1, oppure per la topologia indiscreta su un insieme X con almeno due elementi.

Definizione 5.28. *Si dice che una topologia τ su un insieme X è* di Haudsorff*, o anche* separata *o T_2, se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ con $x \neq y$ esistono due aperti disgiunti A_1, A_2 con $x \in A_1$ e $y \in A_2$.*

Definizione 5.29. *Si chiama* base *di una topologia τ una sottofamiglia $\mathcal{B} \subseteq \tau$ con la proprietà che ogni elemento di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.*

Nella topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$, l'insieme $\mathcal{B} = \{B_{x,r} : x \in \mathbb{R}^n , r > 0\}$ è una base. Ci sono basi ancora più ristrette, per esempio[10] $\mathcal{B}' = \left\{B_{x,\frac{1}{k}} : x \in \mathbb{Q}^n , k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$.

Definizione 5.30. *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $x_0 \in X$.*
(i) *Si chiama* intorno *di x_0 un qualunque soprainsieme di un aperto contenente x_0.*
(ii) *Si chiama* sistema fondamentale di intorni *di x_0 una famiglia $\{U_i\}_{i \in I}$ di intorni di x_0 con la proprietà che ogni intorno di x_0 contenga almeno uno degli U_i.*

Se $\mathcal{B}$ è una base di τ, la famiglia $\{A \in \mathcal{B} : x_0 \in A\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x_0.
Nella topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$, le palle $B_{x_0,r}$ (o anche solo le palle $B_{x_0,\frac{1}{k}}$ con k intero positivo) formano un sistema fondamentale di intorni di x_0.
Elenchiamo brevemente come si formulano in spazi topologici generali le altre nozioni introdotte per $\mathbb{R}^n$;

- un insieme si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto;
- un punto $x_0 \in X$ si dice *aderente* a E se ogni intorno di x_0 ha intersezione non vuota con E;
- un punto $x_0 \in X$ si dice *di accumulazione* per E se ogni intorno di x_0 ha intersezione non vuota con $E \setminus \{x_0\}$;
- un punto $x_0 \in E$ si dice *isolato* in E se esiste un intorno U di x_0 tale che $E \cap U = \{x_0\}$;
- un sottoinsieme E di X si dice *denso* in X se ogni elemento di X è aderente a E.

Le nozioni di *parte interna, chiusura, frontiera, derivato* di un insieme E si danno come in $\mathbb{R}^n$ e si estendono al caso generale le seguenti proprietà:

- la parte interna di E è il più grande aperto contenuto in E;
- la chiusura di E è il più piccolo chiuso contenente E;
- ${}^c(\overline{E}) = ({}^cE)^\circ$;
- $\overline{E}$ è l'unione disgiunta di $D(E)$ con l'insieme dei punti isolati di E.
- $\overline{E} = E \cup \partial(E) = E \cup D(E)$;
- X è l'unione disgiunta di $\overset{\circ}{E}$, $\partial(E)$, $({}^cE)^\circ$.

[10] Lo si verifichi per esercizio.

7. Funzioni continue tra spazi topologici

7.1. Continuità in un punto e limiti.

DEFINIZIONE 5.31. *Siano* (X,τ) *e* (Y,σ) *due spazi topologici. Si dice che* $f : X \longrightarrow Y$ *è continua in* $x_0 \in X$ *se, per ogni intorno* U *di* $f(x_0)$ *in* Y*, esiste* V *intorno di* x_0 *in* X *tale che* $f(V) \subseteq U$*.*

La nozione di *limite* di una funzione tra due spazi topologici viene data di conseguenza come segue.

DEFINIZIONE 5.32. *Siano* (X,τ) *e* (Y,σ) *due spazi topologici,* $E \subseteq X$ *e* $f : E \longrightarrow Y$*. Sia inoltre* x_0 *un punto di accumulazione di* E *in* X*. Si pone* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in Y$ *se la funzione*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \setminus \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

è continua in x_0*. In modo equivalente,* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in Y$ *se e solo se, per ogni intorno* U *di* ℓ *in* Y*, esiste* V *intorno di* x_0 *in* X *tale che* $f\big((V \cap E) \setminus \{x_0\}\big) \subseteq U$*.*

Si noti che, per verificare la continuità di f in x_0, o la condizione di limite per $x \to x_0$, è sufficiente prendere U in un sistema fondamentale di intorni di $f(x_0)$, o di ℓ. Per esempio, questo consente, nel caso di funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, di ritrovare le abituali definizioni "con ε e δ".
Valgono le seguenti proprietà.

PROPOSIZIONE 5.33. *Siano* $(X,\tau), (Y,\sigma), (Z,\rho)$ *spazi topologici.*

(i) *Se* $f : X \longrightarrow Y$ *è continua in* x_0 *e* $g : Y \longrightarrow Z$ *è continua in* $f(x_0)$*, allora* $g \circ f$ *è continua in* x_0*.*

(ii) *Se* (Y,σ) *è* T_2 *e* $f : E \longrightarrow Y$*, con* $E \subseteq X$*, ammette limite per* $x \to x_0$*, punto di accumulazione di* E*, allora tale limite è unico.*

7.2. Funzioni continue sull'intero dominio.

TEOREMA 5.34. *Siano* (X,τ) *e* (Y,σ) *due spazi topologici, e sia* $f : X \longrightarrow Y$*. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) f *è continua in ogni* $x \in X$*;*

(ii) *per ogni aperto* A *di* Y*,* $f^{-1}(A)$ *è aperto in* X*;*

(iii) *per ogni chiuso* C *di* Y*,* $f^{-1}(C)$ *è chiuso in* X*.*

Si dice in questo caso che f è continua su X*.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che (i)⇒(ii). Dato $A \in \sigma$, mostriamo che $f^{-1}(A)$ è aperto. Si prenda $x \in f^{-1}(A)$. Siccome A è un intorno di $f(x)$, esiste un intorno V_x di x, che possiamo prendere aperto, tale che $f(V_x) \subset A$. Allora

$$f^{-1}(A) \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(A)} V_x \subseteq f^{-1}(A)\ .$$

Dunque $f^{-1}(A) = \bigcup_{x\in f^{-1}(A)} V_x$ è aperto.
Mostriamo ora che (ii)⇒(i). Siano $x_0 \in X$ e U intorno di $f(x_0)$. Allora esiste A aperto in Y con $x_0 \in A \subseteq U$. Ne segue che $V = f^{-1}(A)$ è aperto in X. Siccome $x_0 \in V$, V è un intorno di x_0 e $f(V) \subseteq U$.

Infine l'equivalenza (ii)$\Leftrightarrow$(iii) segue dall'indentità

$$f^{-1}({}^cY') = {}^c\big(f^{-1}(Y')\big)$$

valida per ogni sottoinsieme Y' di Y. $\square$

Si noti che, dati un sottoinsieme E di X e una funzione $f : X \longrightarrow Y$, le due condizioni

- f è continua su E (cioè in ogni punto di E),
- $f_{|_E}$ è continua (con E dotato della topologia indotta da X),

non sono equivalenti[11]. Si prenda ad esempio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uguale alla *funzione caratteristica* $\chi_{[a,b]}$ di un intervallo chiuso $[a, b]$,

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a, b] \ . \end{cases}$$

Allora $f_{|_{[a,b]}} = 1$ è continua, ma f non è continua nei punti a, b.

Definizione 5.35. *Una funzione biiettiva $f : X \longrightarrow Y$ tra due spazi topologici (X, τ) e (Y, σ) si dice un* omeomorfismo *se f e f^{-1} sono entrambe continue.*
Si dice che (X, τ) e (Y, σ) sono omeomorfi *se tra di loro esiste un omeomorfismo.*

Proposizione 5.36.

(i) *Siano (X, τ), (Y, σ), (Z, ρ) spazi topologici, e siano $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ funzioni continue. Allora anche $g \circ f : X \longrightarrow Z$ è continua.*
(ii) *La relazione di omeomorfismo tra spazi topologici è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. [12] Dato un aperto A in Z, $g^{-1}(A)$ è aperto in Y, e dunque $f^{-1}\big(g^{-1}(A)\big) = (g \circ f)^{-1}(A)$ è aperto in X. Questo dimostra (i); (ii) ne è un'ovvia conseguenza. $\square$

Esempi.
1. La funzione $f(x) = \arctan x$ è un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $(-\pi/2.\pi/2)$. Inoltre $\mathbb{R}$ è anche omeomorfo a ogni intervallo aperto (a, b) e a ogni semiretta aperta.

2. $\overline{\mathbb{N}}$ è omeomorfo all'insieme $\{0\} \cup \big\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\big\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

3. Ogni funzione tra spazi topologici è continua in un punto isolato del dominio. Ogni funzione tra spazi topologici il cui dominio abbia la topologia discreta è continua, così come ogni funzione il cui codominio abbia la topologia indiscreta.

4. Una funzione $f : \overline{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua se e solo se la successione $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite uguale a $f(\infty)$.

5. Sia (X, σ) uno spazio topologico. Una funzione $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice semicontinua inferiormente in x_0 se

$$f(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x) \ ,$$

e semicontinua superiormente in x_0 se

$$f(x_0) \geq \limsup_{x\to x_0} f(x) \ .$$

[11]Precisamente, la prima implica la seconda (esercizio), ma non viceversa.

[12]L'enunciato (i) è conseguenza del punto (i) della Proposizione 5.33. Ne diamo una dimostrazione diretta per mostrarne la maggiore semplicità.

Una funzione è semicontinua inferiormente in x_0 se e solo se, dotando il codominio $\mathbb{R}$ della topologia τ^+, essa è continua in x_0. Analogamente, f è semicontinua superiormente in x_0 se e solo se, dotando $\mathbb{R}$ della topologia τ^-, essa è continua in x_0.

7.3. Test di continuità con successioni.

Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $a : \mathbb{N} \longrightarrow X$ una successione di elementi di X.

Definizione 5.37. *Si dice che $\ell \in X$ è limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, per ogni intorno U di ℓ, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, $a_n \in U$.*

Proposizione 5.38. *Se (X, τ) è uno spazio di Hausdorff, il limite di una successione a valori in X, se esiste, è unico.*

Questo enunciato è un caso particolare del punto (i) nella Proposizione 5.33. Si noti cosa può succedere con topologie che non sono T_2: nella topologia τ_+ dell'esempio (3), ogni numero $\ell \leq 0$ è limite della successione costante $a_n = 0$.

Il Teorema 5.23 mostra, per la topologia euclidea, come le successioni possono essere impiegate per caratterizzare la proprietà di un punto di essere aderente o di accumulazione per un insieme, oppure la proprietà di un insieme di essere chiuso.
In spazi topologici generali, queste equivalenze non valgono più. Dei punti (i) e (ii) del Teorema 5.23 si mantiene solo la parte "se", e del punto (iii) solo la parte "solo se". Il problema è che, nella dimostrazione su $\mathbb{R}^n$, è stata usata una proprietà che non vale in generale: l'esistenza, per ogni punto di $\mathbb{R}^n$, di un sistema fondamentale di intorni *numerabile*.

Definizione 5.39. *Si dice che uno spazio topologico (X, τ) soddisfa il* primo assioma di numerabilità[13] *se ogni elemento di X ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.*

Proposizione 5.40. *Sia (X, τ) uno spazio topologico che soddisfi il primo assioma di numerabilità. Allora l'enunciato del Teorema 5.23 vale per (X, τ).*

Dimostrazione. Sia $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una numerazione degli elementi di un sistema fondamentale di intorni di un punto $x \in X$. Poniamo

$$V_k = U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_k \ .$$

Allora anche i V_k formano un sistema fondamentale di intorni di x e in più $V_0 \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_k \supseteq \cdots$. Si può allora adattare la dimostrazione del Teorema 5.23 sostituendo le palle $B_{x,\frac{1}{k}}$ con i V_k. □

Il teorema che segue mette in relazione la continuità di una funzione con la convergenza di successioni nel dominio e delle loro immagini nel codominio.

Teorema 5.41. *Siano (X, τ) e (Y, σ) due spazi topologici.*

(i) *Se una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di elementi di X converge a $\bar{x} \in X$ e $f : X \longrightarrow Y$ è continua in $\bar{x}$, allora la successione $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$.*
(ii) *Se (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità, una funzione $f : X \longrightarrow Y$ è continua in $\bar{x}$ se e solo se, per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $\bar{x}$, la successione $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$.*

[13] Esiste anche un *secondo assioma di numerabilità*, soddisfatto da uno spazio quando la sua topologia ha una base numerabile. Il secondo assioma implica il primo, ma non viceversa (basta considerare un insieme più che numerabile dotato della topologia discreta).

Dimostrazione. Nelle ipotesi di (i), si prenda un intorno U di $f(\bar{x})$ in Y. Esiste allora V intorno di $\bar{x}$ in X tale che $f(V) \subseteq U$. Preso $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in V$ per ogni $n \geq n_0$, si ha, per tali n, che $f(x_n) \in U$. Questo dimostra la tesi.
Si supponga ora che (X, τ) soddisfi il primo assioma di numerabilità. Assumendo come ipotesi che $f : X \longrightarrow Y$ sia continua in $\bar{x}$, la (i) fornisce la tesi di una delle due implicazioni da dimostrare.
Assumiamo ora come ipotesi che, per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a $\bar{x}$, la successione $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$. Supponiamo per assurdo che f non sia continua in $\bar{x}$. Esiste allora un intorno U di $f(\bar{x})$ tale che, comunque scelto un intorno V di $\bar{x}$, si abbia $f(V) \not\subseteq U$.
Fissato $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni di $\bar{x}$ con $V_{n+1} \subseteq V_n$ per ogni n, si prenda, per ogni n, $x_n \in V_n$ tale che $f(x_n) \notin U$. Allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x}$, perché i suoi termini sono definitivamente contenuti in ogni V_n, e dunque in ogni intorno di $\bar{x}$. Ma le loro immagini $f(x_n)$ sono tutte fuori di U, e dunque la successione $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $f(\bar{x})$, in contrasto con l'ipotesi. □

8. Spazi metrici

8.1. Distanze, spazi metrici, esempi.

Definizione 5.42 (**Distanza e spazio metrico**). *Si chiama* distanza[14] *su un insieme X una funzione $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ che soddisfi le seguenti proprietà:*

(i) (non degenerazione) $d(x, y) = 0$ *se e solo se* $x = y$*;*
(ii) (simmetria) *per ogni* x, $y \in X$ *vale* $d(x, y) = d(y, x)$*;*
(iii) (disuguaglianza triangolare) *per ogni* x, y, $z \in X$ *vale* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Uno spazio metrico è una coppia (X, d), dove d è una distanza sull'insieme X.

Esempi 5.43.

(1) Oltre alla distanza euclidea, su $\mathbb{R}^n$ sono interessanti le seguenti distanze:
$$d_p(x, y) = \big(|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p\big)^{1/p}$$
dove $1 \leq p < +\infty$ e
$$d_\infty(x, y) = \max_{1\leq k\leq n} |x_k - y_k| \ .$$
Le proprietà (i) e (ii) sono ovvie. La proprietà triangolare (iii) è di semplice verifica per d_1 e d_∞, ed è stata dimostrata per la distanza euclidea d_2. Per p generico, la verifica è più complessa e viene qui tralasciata.

(2) Su un qualunque insieme X,
$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \ , \end{cases}$$
è una distanza, nota come *distanza discreta* (le cui palle aperte sono punti o tutto lo spazio, a seconda che $r \leq 1$ o $r > 1$).

[14] Le distanze sono a volte anche chiamate metriche, ma in Geometria Riemanniana la parola metrica ha un significato diverso, quindi non useremo mai questo termine. Nonostante questo, la terminologia "spazi metrici" è troppo consolidata per non doverla adottare, anche se alcuni puristi chiamano questi spazi "spazi di distanza".

(3) (*distanza p–adica* su $\mathbb{Q}$) Ogni numero razionale $x \neq 0$ si scompone in modo unico come prodotto

$$x = \pm p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k} \ , \tag{8.1}$$

dove $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ sono numeri primi e gli m_j interi relativi. Fissato un numero primo p, si definisce il *valore assoluto p–adico* di $x \in \mathbb{Q}$ come

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ p^{-m} & \text{se } p^m \text{ è il fattore con base } p \text{ nella scomposizione (8.1)} \ . \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$ per ogni $x,\, y \in \mathbb{Q}$. Da questo segue che $d_p(x,y) = |x-y|_p$ è una distanza su $\mathbb{Q}$. In realtà vale una proprietà più forte della disuguaglianza triangolare, cioè[15]

$$d_p(x,z) \leq \max\left\{d_p(x,y), d_p(y,z)\right\} \ , \qquad \forall\, x,\, y,\, z \in \mathbb{Q} \ .$$

(4) Si consideri l'insieme $\overline{\mathbb{R}}$, detto *retta reale estesa*, ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due elementi, che indichiamo con $-\infty$ e $+\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \ .$$

Su $\overline{\mathbb{R}}$ è possibile definire la distanza (con le convenzioni $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$):

$$\delta(x,y) := \left|\arctan x - \arctan y\right| \qquad x,\, y \in \overline{\mathbb{R}} \ . \tag{8.2}$$

Si verifichi per esercizio che le successioni di $\mathbb{R}$ aventi limite, finito o infinito, convergono in $\overline{\mathbb{R}}$. Da questo, usando il teorema di Bolzano–Weierstrass (o la caratterizzazione variazionale del massimo e del minimo limite), si deduca che ogni successione $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ ha una sottosuccessione convergente rispetto alla distanza δ.

(5) Se $(X_1, d_{X_1}), \dots, (X_n, X_n)$ sono spazi metrici, la loro *distanza prodotto* è definita su $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ da[16]

$$d_X\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) = d_{X_1}(x_1,y_1) + \cdots + d_{X_n}(x_n,y_n) \ . \tag{8.3}$$

Se tutti i fattori sono uguali a $\mathbb{R}$ con la distanza euclidea, la distanza prodotto è la distanza d_1 in $\mathbb{R}^n$.

(6) Sulla sfera $S_1(0)$ di $\mathbb{R}^n$ possiamo definire $\delta(x,y) = \theta(x,y)$, ove $\theta \in [0,\pi]$ è l'angolo tra i vettori x e y. Si verifichi che è una distanza, detta distanza *geodetica*. Si noti che la distanza geodetica è più grande di quella indotta dalla distanza euclidea, se consideriamo la sfera come un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

(7) Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato, lo spazio vettoriale $C(I)$ delle funzioni continue da I in $\mathbb{R}$, munito della distanza "del sup"

$$d(f,g) := \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)| \qquad f,\, g \in C(I)$$

è uno spazio metrico. Più in generale, la stessa distanza ha senso anche nello spazio vettoriale delle funzioni limitate su I.

---

[15] Una distanza con questa proprietà si chiama una *ultrametrica*.

[16] Più in generale, si chiamano con lo stesso nome le distanze

$$d_{X,p}\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) := \big(d_{X_1}(x_1,y_1)^p + \cdots + d_{X_n}(x_n,y_n)^p\big)^{1/p} \ .$$

con $p \geq 1$ e $d_{X,\infty}\big((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\big) = \max_j d_{X_j}(x_j,y_j)$.

(8) Sia $N \in \mathbb{N}^*$. Nell'insieme $\{0,1\}^N$ delle stringhe binarie di lunghezza N la distanza di Hamming è definita da

$$d\big((a_1,\dots,a_N),(b_1,\dots,b_N)\big) = \frac{1}{N}\mathrm{card}\left(\{i: \ a_i \neq b_i\}\right) .$$

Per funzioni tra spazi metrici si adotta la seguente terminologia.

DEFINIZIONE 5.44 (**Isometrie, funzioni Lipschitziane e contrazioni**). *Siano (X,d), (X',d') spazi metrici e sia $f : X \longrightarrow X'$ una funzione.*

(i) *Si dice che f è una* isometria *di X sulla sua immagine $f(X) \subseteq X'$ se*

$$d'\big(f(x),f(y)\big) = d(x,y) , \qquad \forall\, x,\, y \in X .$$

(ii) *Si dice che f è* Lipschitziana *se esiste una costante reale $L \geq 0$ tale che*

$$d'\big(f(x),f(y)\big) \leq Ld(x,y) , \qquad \forall\, x,\, y \in X . \tag{8.4}$$

(iii) *Si chiama* contrazione *di X una funzione $f : X \longrightarrow X$ Lipschitziana con costante $L < 1$.*

Ad esempio le rotazioni di $\mathbb{R}^n$ sono isometrie, mentre le trasformazioni affini $x \mapsto Ax + c$ con $c \in \mathbb{R}^n$ e $A = (a_{ij})$ matrici $n \times n$ sono Lipschitziane, con costante $L = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$. Un altro esempio interessante è la mappa (intendendo naturalmente l'angolo in radianti)

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \in S_1(0)$$

che è una isometria, se ristretta a intervalli di lunghezza inferiore a π, tra l'intervallo e la sfera $S_1(0)$ di $\mathbb{R}^2$, munita della distanza geodetica.
Si noti che le isometrie sono iniettive, grazie all'assioma di non degenerazione, e che la composizione di funzioni Lipschitziane (risp. contrazioni) è Lipschitziana (risp. una contrazione).

PROPOSIZIONE 5.45 (**Lipschitzianità della distanza**). *Sia (X,d) uno spazio metrico. La funzione $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ è Lipschitziana rispetto alle distanze prodotto sul dominio e distanza euclidea sul codominio.*

DIMOSTRAZIONE. Siano (x_1,x_2), (y_1,y_2) in $X \times X$. Applicando la disuguaglianza triangolare in $\mathbb{R}$ e poi quella su X, si ha

$$\begin{aligned}\big|d(x_1,x_2) - d(y_1,y_2)\big| &\leq \big|d(x_1,x_2) - d(x_2,y_1)\big| + \big|d(x_2,y_1) - d(y_1,y_2)\big| \\ &\leq d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2) \\ &\leq d_{X\times X}\big((x,y),(x',y')\big) .\end{aligned}$$

□

Due spazi metrici (X,d), (X',d') si dicono *isometrici* se esiste una isometria suriettiva (quindi una biiezione) di X in X', mentre due distanze d_1 e d_2 nello stesso insieme X si dicono *bi–Lipschitz equivalenti* se la mappa identità $\iota : (X,d_1) \longrightarrow (X,d_2)$ è Lipschitziana con inversa Lipschitziana, in termini equivalenti

$$cd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Cd_1(x,y) \qquad \forall x,\, y \in X \tag{8.5}$$

per opportune costanti positive c, C.
Si osservi che la traduzione geometrica delle disuguaglianze (8.5) è (indicando con $B_r^{d_i}(x)$ la palla relativa alla distanza d_i)

$$B_{r/C}^{d_1}(x) \subseteq B_r^{d_2}(x) \subseteq B_{r/c}^{d_1}(x) \qquad \forall x \in X,\ r > 0.$$

Esempi.
1. Le distanze d_1, d_2, d_∞ su $\mathbb{R}^n$ sono a due a due bi–Lipschitz equivalenti. Questo segue dalle disuguaglianze
$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n d_\infty(x,y) \ ,$$
tutte facilmente verificabili (con ragionamenti simili si mostra che tutte le distanze d_p, $1 \le p \le \infty$, sono a due a due equivalenti). Più in generale, dati spazi metrici (X, d_X) e (Y, d_Y), le distanze
$$\max\{d_X(x,x'), d_Y(y,y')\} \ , \qquad d_X(x,x') + d_Y(y,y')$$
sono bi–Lipschitz equivalenti alla distanza prodotto.[17]
2. Per ogni intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$, la distanza euclidea d_{eu} e la distanza δ nella (8.2), indotta dall'inclusione in $\overline{\mathbb{R}}$, sono bi–Lipschitz equivalenti. Non lo sono, tuttavia, su tutto l'insieme $\mathbb{R}$: più precisamente, la distanza euclidea maggiora d (quindi $\iota : (\mathbb{R}, d_{eu}) \to (\mathbb{R}, \delta)$ è una contrazione, non stretta) ma non esiste nessuna costante C tale che $d_{eu}(x,y) \le C\delta(x,y)$, perchè δ è limitata).
3. Si verifichi per esercizio che nessuna distanza p–adica su $\mathbb{Q}$ è bi–Lipschitz equivalente alla distanza euclidea (indotta da $\mathbb{R}$).
4. Nello spazio $\{0,1\}^N$ delle stringhe binarie di lunghezza N, ogni trasformazione indotta da una permutazione degli indici $1, \dots, N$ è una isometria. La trasformazione che manda la stringa $(i_1, \dots, i_N)$ nella stringa $(1 - i_1, \dots, 1 - i_N)$ è anch'essa una isometria.

8.2. Topologia di spazi metrici, limiti e funzioni continue.

Sia (X, d) uno spazio metrico. Si introduce una topologia τ_d su X (detta *topologia indotta* dalla metrica d), definendo aperte le unioni (anche vuote) di palle
$$B_{x_0,r} = \{x : d(x, x_0) < r\} \ .$$
Il contenuto del paragrafo 2 si applica senza modifiche al caso generale. Il seguente enunciato risulta dunque evidente da quanto visto finora.

Proposizione 5.46.
- (i) *La topologia τ_d è di Hausdorff e soddisfa il primo assioma di numerabilità.*
- (ii) *Dato $Y \subset X$, $d_{|Y\times Y}$ è una distanza su Y, che induce su Y la topologia $\tau_{d|_Y}$.*
- (iii) *Se (X, d), (X', d') sono spazi metrici, la distanza prodotto su $X \times X'$ induce la topologia prodotto $\tau_d \times \tau_{d'}$.*
- (iv) *Funzioni Lipschitziane tra spazi metrici sono continue.*
- (v) *Spazi metrici bi-Lipschitzianamente equivalenti sono omeomorfi rispetto alle topologie indotte dalle rispettive metriche. In particolare, due metriche bi-Lipschitzianamente equivalenti su uno stesso insieme inducono la stessa topologia.*

Due spazi metrici (X, d), (X', d') si dicono *topologicamente equivalenti* se sono omeomorfi rispetto alle topologie $\tau_d, \tau_{d'}$.

Le condizioni di limite e di continuità in un punto di una funzione tra spazi metrici prendono la seguente forma equivalente:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in Y$ se e solo se
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ (x \in E) \wedge \big(0 < d_X(x, x_0) < \delta\big) \Rightarrow d_Y(f(x), \ell) < \varepsilon \ .$$
- f è continua in x_0 se e solo se
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ (x \in E) \wedge \big(d_X(x, x_0) < \delta\big) \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \ .$$

[17] Sono bi-Lipschitz equivalenti tra loro tutte le distanze $d_{X,p}$ nella nota precedente.

Per funzioni tra spazi metrici ha anche senso dare la nozione di continuità uniforme.

DEFINIZIONE 5.47 (**Uniforme continuità**). *Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi metrici. Si dice che $f : X \longrightarrow X'$ è uniformemente continua se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall\, x,\, x' \in X \ , \quad \big(d_X(x, x') < \delta \Longrightarrow d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon\big) \ . \tag{8.6}$$

Si noti che le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue: per la formula (8.4) basta scegliere $\delta = \varepsilon/L$ se $L > 0$, se $L = 0$ la funzione è costante (quindi uniformemente continua). Abbiamo quindi le inclusioni

$$\big\{\text{Lipschitziane}\big\} \subseteq \big\{\text{Uniformemente continue}\big\} \subseteq \big\{\text{Continue}\big\} \ .$$

La funzione $f(x) = 1/x$ su $(0, 1]$ munito della distanza euclidea mostra che non tutte le funzioni continue sono uniformemente continue. D'altro canto, sull'intervallo $[0, 1]$ munito della distanza euclidea tutte le funzioni continue sono uniformemente continue (Teorema di Heine–Cantor), mentre è facile costruire esempi di funzioni continue non Lipschitziane, ad esempio $f(x) = \sqrt{x}$.

8.3. Spazi metrici completi.

Una successione (x_n) a valori in uno spazio metrico (X, d) si dice *di Cauchy* se

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0 : \ \forall\, n, m \geq n_0 \ , \ d(x_n, x_m) < \varepsilon \ .$$

Una successione (x_n) convergente è di Cauchy. Infatti, detto $x \in X$ il suo limite, dato $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Allora, se $n, m \geq n_0$, si ha

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon \ .$$

Invece non sempre le successioni di Cauchy sono convergenti. Si prenda per esempio $X = \mathbb{Q}$ con la distanza euclidea indotta da $\mathbb{R}$. La successione $\big(1 + \frac{1}{n}\big)^n$ è di Cauchy ma non ha limite in X. Questo fornisce la base per una definizione di completezza totalmente svincolata dalla struttura d'ordine, ma compatibile con quella già vista su $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 5.48 (**Completezza**). *Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy di elementi di X converge a un elemento di X. Un sottoinsieme Y di uno spazio metrico (X, d) si dice completo in X se $(Y, d|_{Y\times Y})$ è uno spazio completo.*

È facile verificare, lo si faccia per esercizio, che ogni successione di Cauchy avente una sottosuccessione convergente è convergente. Da questo deduciamo il

PROPOSIZIONE 5.49 (**Completezza e chiusura**). *Se Y è completo in uno spazio metrico (X, d), allora Y è chiuso. Se (X, d) è completo, ogni suo sottoinsieme chiuso è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia Y completo in X. Dato $x \in \overline{Y}$, esiste una successione (y_n) di elementi di Y convergente a x. Tale successione è di Cauchy e, essendo (Y, d) completo, converge a un elemento di Y. Per l'unicità del limite, $x \in Y$. Dunque Y è chiuso.
Si supponga ora (X, d) completo e sia Y chiuso in X. Ogni successione di Cauchy di elementi di Y ha un limite in X. Ma, essendo Y chiuso, tale limite è in Y. Dunque $(Y, d|_{Y\times Y})$ è completo. □

Il seguente teorema consente di estendere una funzione f da un dominio E alla chiusura del dominio, a patto che il codominio sia completo e che la funzione f sia uniformemente continua (si diano esempi che mostrano che l'estensione potrebbe non esistere se una di queste ipotesi viene a mancare).

Teorema 5.50 (**Prolungamento di una funzione uniformemente continua alla chiusura del dominio**). *Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici, con (Y, d_Y) completo. Allora ogni funzione $f : E \subseteq X \longrightarrow Y$ uniformemente continua ha un unico prolungamento continuo $\widetilde{f} : \overline{E} \longrightarrow Y$ Tale prolungamento è anche uniformemente continuo. Inoltre*

- *se f è Lipschitziana con costante L, anche $\widetilde{f}$ è Lipschitziana con costante L;*
- *se f è un'isometria, anche $\widetilde{f}$ è un'isometria.*

Dimostrazione. Se $\widetilde{f}$ è un prolungamento continuo di f a $\overline{E}$, dato un elemento $x \in \overline{E}$, deve necessariamente valere l'uguaglianza

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

per ogni successione (x_n) di elementi di E convergente a x. Abbiamo quindi due condizioni necessarie per l'esistenza di tale prolungamento:

(i) per ogni successione (x_n) di elementi di E convergente a $x \in \overline{E}$, la successione $\big(f(x_n)\big)$ deve essere convergente in Y;

(ii) date due successioni (x_n), (x'_n) di elementi di E convergenti allo stesso punto $x \in \overline{E}$, deve essere

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) \ .$$

Dimostriamo che queste condizioni sono effettivamente verificate. Per il punto (i), si osservi che (x_n), essendo convergente, è di Cauchy. Per l'uniforme continuità di f, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d_X(x, x') < \delta \ \Rightarrow\ d_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$.
Basta allora scegliere n_0 tale che, per ogni $m, n \geq n_0$, sia $d_X(x_n, x_m) < \delta$ per ottenere la disuguaglianza $d_Y\big(f(x_n), f(x_m)\big) < \varepsilon$. Quindi la successione $\big(f(x_n)\big)$ è di Cauchy in Y. Essendo Y completo per ipotesi, essa converge.

Per il punto (ii), siano (x_n) e (x'_n) successioni di elementi di E convergenti entrambe a x. Allora $\lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = 0$ e dunque, per l'uniforme continuità di f, $\lim n \to \infty d_Y(f(x_n), f(x'_n)) = 0$. Quindi $\big(f(x_n)\big)$ e $\big(f(x'_n)\big)$ hanno lo stesso limite.

Quanto dimostrato sopra mostra che, ponendo $\widetilde{f}(x)$ uguale a $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ per ogni successione (x_n) di elementi di E convergente a x, si ha una buona definizione di funzione definita su $\overline{E}$, che coincide con f su E (infatti se $x \in E$ basta considerare la successione costantemente uguale a x) ed è l'unica funzione che può essere un prolungamento continuo di f.

Mostriamo che $\widetilde{f}$ è uniformemente continua. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon/2$ tutte le volte che x, $x' \in E$ e $d_X(x, x') < \delta$.
Dati x, $x' \in \overline{E}$ con $d_X(x, x') < \delta$, siano (x_n) e (x'_n) successioni di elementi di E convergenti rispettivamente a x e x'. La continuità della distanza d_X implica $d_X(x_n, x'_n) < \delta$ definitivamente, quindi $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) < \varepsilon/2$ definitivamente. Usando ora la continuità della distanza d_Y otteniamo $d_Y(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x')) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

Si supponga ora f Lipschitziana con costante L su E. Essendo uniformemente continua, sia $\widetilde{f}$ il suo prolungamento definito sopra. Dati $x, x' \in \overline{E}$, siano (x_n), (x'_n) di elementi di E convergenti, rispettivamente, a x e a y. Per la continuità della distanza,

$$d_Y\big(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x')\big) = \lim_{n\to\infty} d_Y\big(f(x_n), f(x'_n)\big) \leq L \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, x'_n) = L d_X(x, x') \ .$$

In modo analogo si dimostra che il prolungamento di un'isometria è un'isometria. □

Osservazione 5.51. Nel Teorema 5.50 l'ipotesi continuità uniforme sulla funzione f può essere indebolita richiedendo solo che essa sia *localmente uniformemente continua* su E, vale a dire che per ogni $x \in E$ esiste $r > 0$ tale che $f|_{E \cap B_r(x)}$ sia uniformemente continua. In tal caso la funzione estesa $\widetilde{f}$ è solo localmente uniformemente continua.
Analogamente, la condizione di Lipschitzianità al penultimo punto può essere sostituita con la analoga condizione di *locale Lipschitzianità*.
I dettagli delle modifiche alla dimostrazione sono lasciati al lettore.

8.4. Completamento di uno spazio metrico.

Premettiamo un lemma generale sulle "distanze degeneri", nel senso che non soddisfano la condizione $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$.

LEMMA 5.52. *Sia X un insieme e sia data una funzione $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ che soddisfi le proprietà simmetrica e triangolare e l'uguaglianza $d(x, x) = 0$ per ogni $x \in X$. Si ha allora:*

(i) *la relazione $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ su X è di equivalenza;*
(ii) *se $x \sim y$, $x' \sim y'$, si ha $d(x, y) = d(x', y')$, il che consente di ben definire una funzione*
$$d^* : (X/\sim) \times (X/\sim) \longrightarrow [0, +\infty)$$
ponendo $d^*\big([x], [y]\big) = d(x, y)$;
(iii) *d^* è una distanza su $X/\sim$.*

La dimostrazione è lasciata al lettore. Passiamo dunque alla definizione di completamento di uno spazio metrico.

DEFINIZIONE 5.53. *Dato uno spazio metrico (X, d), chiamiamo* completamento di (X, d) *uno spazio metrico (X^*, d^*) tale che:*

(i) *(X^*, d^*) è completo;*
(ii) *esiste un'isometria $j : X \to X^*$ tale che $j(X)$ è denso in X^*.*

Spesso si "identifica" X con la sua copia isometrica $j(X)$ dentro X^*, vedendo X come un sottoinsieme di X^*. In quest'ottica, si noti che la proposizione precedente garantisce questa proprietà universale del completamento: *ogni funzione uniformemente continua $f : X \to Y$, con (Y, d_Y) completo, si estende in modo unico a una funzione uniformemente continua su X^*.*
Il seguente teorema mostra che il completamento esiste, ed è unico nel solo senso possibile, a meno di isometrie.

TEOREMA 5.54 (**Esistenza e unicità del completamento**). *Ogni spazio metrico (X, d) ammette un completamento. Il completamento è unico a meno di isometrie.*

DIMOSTRAZIONE. Per l'esistenza, consideriamo il sottoinsieme Y di $X^{\mathbb{N}}$ costituito dalle successioni di Cauchy di X. Definiamo
$$d'\big((x_n), (x'_n)\big) := \limsup_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) \qquad (x_n),\ (x'_n) \in Y\ .$$
Verifichiamo innanzitutto che il secondo membro è sempre finito. Posto $\varepsilon = 1$, esiste un indice n_0 tale che, per ogni $n, m \geq n_0$, si abbia
$$d(x_n, x_m) < 1\ , \qquad d(x'_n, x'_m) < 1\ .$$
Allora, per ogni $n \geq n_0$ si ha
$$d(x_n, x'_n) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x'_{n_0}) + d(x'_{n_0}, x'_n) < d(x_{n_0}, x'_{n_0}) + 2\ ,$$

per cui la successione $\big(d(x_n, x'_n)\big)$ è limitata.
Su d' è immediato verificare la proprietà simmetrica e la condizione $d'\big((x_n),(x_n)\big) = 0$. Usando la subadditività del $\limsup$ si verifica facilmente la proprietà triangolare. Tuttavia non vale la condizione di non degenerazione: se due successioni $(x_n), (x'_n)$, pur distinte, sono asintoticamente vicine (cioè $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$), allora $d\big((x_n),(x'_n)\big) = 0$. Per ovviare a questo problema, applichiamo il Lemma 5.52 considerando la relazione di equivalenza

$$(x_n) \sim (x'_n) \qquad \text{se } \lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0 \ .$$

Definiamo $X^* = Y/\!\sim$ e d^* la distanza indotta da d come nel Lemma 5.52.
È evidente che esiste una isometria j da X in X^*: basta associare a x la classe di equivalenza della successione (x) costantemente uguale a x. Resta da verificare che $j(X)$ è denso in X^* e che (X^*, d^*) è completo.
Densità di $j(X)$ in X^*. Sia $(x_n) \in Y$, $[(x_n)] \in X^*$ la sua classe di equivalenza. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Si ha allora $d^*([(x_n)], j(x_{n_0})) = \limsup_n d(x_n, x_{n_0}) \leq \varepsilon$, quindi per l'arbitrarietà di (x_n) e di ε concludiamo che $j(X)$ è denso in X^*.
Completezza di (X^*, d^*). Sia $(z_n) \subseteq X^*$ una successione di Cauchy. Dato che $j(X)$ è denso in X^*, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo trovare $x_n \in X$ tale che $d^*(z_n, j(x_n)) < 1/(n+1)$. Mostriamo che la successione (x_n) è di Cauchy. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $d^*(z_n, z_{n'}) < \varepsilon/2$ per n, $n' \geq n_0$. Se scegliamo n_0 sufficientemente grande in modo che valga anche la disuguaglianza $2/(n_0+1) < \varepsilon/2$ otteniamo

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n'}) &= d^*(j(x_n), j(x_{n'})) \leq d^*(j(x_n), z_n) + d^*(z_n, z_{n'}) + d^*(z_{n'}, j(x_{n'})) \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n'+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall n,\, n' \geq n_0 \ . \end{aligned}$$

Posto $z = [(x_n)] \in X^*$, mostriamo ora che $z_n \to z$ in X^*. Vale infatti

$$d^*(z, z_n) \leq d^*(z, j(x_n)) + d^*(j(x_n), z_n) < \limsup_{m\to\infty} d(x_m, x_n) + \frac{1}{n+1} \ .$$

Per la proprietà di Cauchy di (x_n), $\limsup_m d(x_m, x_n)$ ha limite nullo per $n \to \infty$, quindi $d^*(z, z_n) \to 0$.
Unicità del completamento. Siano (X_1^*, d_1), (X_2^*, d_2) completamenti, $j_i : X \to X_i^*$, $i = 1, 2$, le rispettive immersioni isometriche. Essendo (X_1^*, d_1) completo e $j_2(X)$ denso in X_2^*, possiamo applicare la Proposizione 5.50, ultimo punto, per concludere che l'isometria $j_1 \circ j_2^{-1} : j_2(X) \to X_1^*$ si estende in modo unico a una isometria $j_{21} : X_2^* \to X_1^*$. Poiché una immagine isometrica di uno spazio completo è pure completa, $j_{21}(X_2^*)$ è un sottoinsieme completo di X_1^*, dunque chiuso. Ma essa contiene $j_1(X)$, che è denso in X_1^*. Quindi

$$X_1^* = \overline{j_1(X)} \subseteq j_{21}(X_2^*) \subseteq X_1^* \ ,$$

e dunque j_{21} è suriettiva. □

Si verificano facilmente le seguenti proprietà del completamento.

- Se X_1^*, X_2^* sono i completamenti di due spazi metrici $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ con immersioni $j_i : X \to X_i^*$, $i = 1, 2$, allora il completamento di $X_1 \times X_2$, dotato della distanza prodotto nell'Esempio 5.43 (5), si identifica con $X_1^* \times X_2^*$, dotato della sua distanza prodotto, attraverso l'applicazione

$$j_1 \times j_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1^* \times X_2^* \ ,$$

definita da

$$j_1 \times j_2(x_1, x_2) = \big(j_1(x_1), j_2(x_2)\big) \ .$$

- Se (X, d) è uno spazio metrico con completamento X^* e immersione j, il completamento E^* di un sottoinsieme $E \subset X$ dotato della distanza indotta si identifica con la chiusura di $j(E)$ in X^*.

8.5. $\mathbb{R}$ come completamento metrico di $\mathbb{Q}$ e distanze vettoriali. Con la notazione della sezione precedente, possiamo facilmente mettere in relazione l'insieme $\mathbb{R}$ (i.e. l'unico campo ordinato completo, costruito con le sezioni di Dedekind di $\mathbb{Q}$) con $\mathbb{Q}^*$, il completamento metrico di $\mathbb{Q}$.

Proposizione 5.55. *$\mathbb{Q}^*$ è isometrico a $\mathbb{R}$, quest'ultimo inteso come spazio metrico munito della distanza Euclidea.*

Dimostrazione. Abbiamo mostrato nel Teorema 3.2, usando la completezza di $\mathbb{R}$ come insieme ordinato (i.e. l'esistenza dell'estremo superiore e inferiore), che $\mathbb{R}$ è anche completo come spazio metrico. D'altro canto, abbiamo anche mostrato che $\mathbb{Q}$ interseca ogni intervallo di $\mathbb{R}$, quindi $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ anche nel senso metrico. Quindi l'unicità del completamento metrico dà la tesi. □

Si noti che la costruzione del completamento attribuisce a $\mathbb{Q}^*$ la sola struttura di spazio metrico. Si vede tuttavia facilmente che le operazioni di campo su $\mathbb{Q}$ si estendono al completamento sulla base della Proposizione 5.50. Più precisamente, si utilizzano le seguenti proprietà:

- l'operazione di somma, $(x, y) \longmapsto x + y$, è Lipschitziana da $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ a $\mathbb{Q}$;
- l'operazione di prodotto, $(x, y) \longmapsto xy$, è solo *localmente Lipschitziana*, nel senso che la sua restrizione a $\big(\mathbb{Q} \cap [-r, r]\big)^2$ è Lipschitziana con costante $L = r$ per ogni $r > 0$, ma questo consente comunque di estendere il prodotto con continuità a $\mathbb{R}^2$;
- per continuità, le proprietà di campo si conservano nell'estensione da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

Queste osservazioni consentono di ottenere il seguente teorema.

Teorema 5.56. *Sia V uno spazio vettoriale (su $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) dotato di una distanza d soddisfacente le seguenti proprietà:*

(i) *(invarianza per traslazioni) per ogni $x, y, z \in V$, $d(x + z, y + z) = d(x, y)$;*
(ii) *(omogeneità) per ogni $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.*

Allora le operazioni di somma e prodotto per scalari si estendono per continuità al completamento V^* di V, definendo su di esso una struttura di spazio vettoriale, rispetto alla quale la distanza d^* che estende d soddisfa le proprietà (i), (ii).

I dettagli della dimostrazione sono lasciati al lettore.

9. *Il Teorema di Baire

[18]

Teorema 5.57 (Baire). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $(F_n)_{n \geq 1}$ una successione di chiusi la cui unione è X. Allora almeno uno dei chiusi ha parte interna non vuota.*

[18] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che tutti gli insiemi F_n abbiano parte interna vuota. Costruiremo una successione di palle $B_{r_n}(x_n)$ tali che $B_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subseteq B_{r_n}(x_n)$, $r_n \to 0$ e $\overline{B}_{r_n}(x_n) \subset X \setminus F_n$. Se ci riusciamo, dall'inclusione delle palle $B_{r_m}(x_m)$ in $B_{r_n}(x_n)$ per $m \geq n$ otteniamo

$$d(x_m, x_n) < r_n \qquad \text{per } m \geq n \ ,$$

quindi (x_n) è di Cauchy e converge a x. D'altro canto, passando al limite per $n \to \infty$ nella disuguaglianza $d(x_k, x_n) < r_k$ (valida per $n \geq k$) otteniamo $d(x, x_k) \leq r_k$, quindi $x \notin F_k$ per ogni k, assurdo.
Per costruire le palle iniziamo con una prima palla chiusa $\overline{B}(x_1, r_1)$ disgiunta da F_1, con $r_1 \in (0, 1]$. Essendo $\mathring{F}_2 = \emptyset$, esiste $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \cap X \setminus F_2$ e possiamo scegliere $r_2 \in (0, 1/2]$ in modo tale che $B_{r_2}(x_2) \subseteq B_{r_1}(x_1)$ (per questo basta che $r_2 < r_1 - d(x_2, x_1)$) e $\overline{B}_{r_2}(x_2)$ sia disgiunta da F_2 (e questo è possibile perché $X \setminus F_2$ è aperto). Continuando in questo modo generiamo la successione dei centri x_n e dei raggi $r_n \leq 1/n$ richiesta. $\square$

Passando ai complementari, una formulazione equivalente è: *in uno spazio metrico completo, se (A_n) è una successione di aperti la cui intersezione è vuota, allora almeno uno degli aperti non è denso,* oppure: *in uno spazio metrico completo, intersezione numerabile di aperti densi è densa.*

10. Compattezza

10.1. Sottoinsiemi compatti di spazi topologici e spazi topologici compatti.

Sia X uninsieme. Dato un sottoinsieme Y di X, si chiama *ricoprimento* di Y una famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$ di sottoinsiemi di X tale che $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento di Y e $I' \subseteq I$ è tale che $\{A_i\}_{i \in I'}$ è ancora un ricoprimento di Y, si dice che $\{A_i\}_{i \in I'}$ è un *sottoricoprimento* di $\{A_i\}_{i \in I}$, o anche un *ricoprimento estratto* da $\{A_i\}_{i \in I}$.
In uno spazio topologico (X, τ) l'espressione *ricoprimento aperto* indica che ciascun elemento A_i del ricoprimento è un aperto di X.

Definizione 5.58. *Siano (X, τ) uno spazio topologico e $Y \subseteq X$. Si dice che Y è* compatto in X *se ogni ricoprimento aperto di Y ammette un sottoricoprimento finito.*
Se questa condizione è soddisfatta da $Y = X$, si dice che X è uno spazio topologico compatto*.*

Esempio 5.59. L'intervallo $Y = [0, 1]$ è compatto in $\mathbb{R}$ rispetto alla topologia euclidea. Sia infatti $\{A_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $[0, 1]$.
Sia Y' l'insieme degli $x \in [0, 1]$ tali che $[0, x]$ sia ricopribile con un numero finito di A_i. Chiaramente Y' non è vuoto perché $0 \in Y'$. Inoltre, se $x \in Y'$, si ha $x' \in Y'$ per ogni x' con $0 \leq x' < x$.
Sia $s = \sup Y' \in [0, 1]$ e sia A_{i_0} un aperto del ricoprimento contenente s. Esiste allora $\delta > 0$ tale che $[s - \delta, s + \delta] \subseteq A_{i_0}$. Fissato $x \in (s - \delta, s)$, si ha $x \in Y'$ ed esiste dunque $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ ricoprimento finito di $[0, x]$ estratto da $\{A_i\}_{i \in I}$. Segue che $[0, s + \delta] \subseteq A_{i_0} \cup A_{i_1} \cup \cdots \cup A_{i_n}$. Deve dunque essere necessariamente $s = 1$ e $1 \in Y'$.

Invece l'intervallo semiaperto $[0, 1)$ non è compatto. Basta osservare che gli intervalli

$$A_n = \Big(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \Big) \ , \qquad n \geq 2$$

ne formano un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti.
Si verifica a questo punto facilmente che gli intervalli compatti di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli quelli chiusi e limitati.

E' utile avere presente la seguente osservazione.

PROPOSIZIONE 5.60. *Per un sottoinsieme Y di (X, τ), sono equivalenti le due condizioni*
- *Y è compatto come sottoinsieme di X,*
- *$(Y, \tau_{|_Y})$ è uno spazio compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo Y compatto in X e sia $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \tau_{|_Y}$ è un ricoprimento aperto di Y nella sua topologia indotta. Per ogni $i \in I$, esiste $A_i \in \tau$ tale che $B_i = A_i \cap Y$. Allora $\{A_i\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di Y nella topologia di X. Esiste allora un sottoricoprimento finito $\{A_i\}_{i\in I'}$ e ne consegue che $\{B_i\}_{i\in I'}$ è pure un ricoprimento di Y, aperto nella topologia indotta.
Viceversa, sia $(Y, \tau_{|_Y})$ uno spazio compatto. Se $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ è un ricoprimento aperto di Y nella topologia di X, posto $B_i = A_i \cap Y$, si ottiene il ricoprimento $\{B_i\}_{i\in I}$ di Y, aperto nella topologia indotta. Esiste allora un sottoricoprimento finito $\{B_i\}_{i\in I'}$, e dunque $\{A_i\}_{i\in I'}$ è un sottoricoprimento finito di quello assegnato. □

Introduciamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 5.61 (**Proprietà dell'intersezione finita**). *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X. Si dice che $\mathcal{F}$ ha la* proprietà dell'intersezione finita *se ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{F}$ ha intersezione non vuota.*

PROPOSIZIONE 5.62 (**Compattezza equivale a proprietà dell'intersezione finita**). *Le seguenti proprietà sono equivalenti per uno spazio topologico (X, τ):*
(i) *lo spazio è compatto;*
(ii) *una qualunque famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che entrambe le condizioni (i) e (ii) sono equivalenti alla seguente:

(iii) Per ogni famiglia di chiusi $\{F_i\}_{i\in I}$ tale che $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, esiste una sottofamiglia finita
$\{F_{i_1}, \dots, F_{i_n}\}$ con $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_n} = \emptyset$,

la (i) per passaggio ai complementari degli F_i, la (ii) per passaggio alla contronominale. □

Vediamo ora le principali relazioni tra compattezza e chiusura per sottoinsiemi di uno spazio topologico.

TEOREMA 5.63 (**Compattezza e chiusura di sottoinsiemi**). *Sia (X, τ) uno spazio topologico.*
(i) *Se (X, τ) è di Hausdorff e $Y \subset X$ è compatto, allora Y è chiuso.*[19]
(ii) *Se (X, τ) è compatto, ogni sottoinsieme chiuso di X è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare il punto (i), proviamo che, se (X, τ) è di Hausdorff e $Y \subset X$ non è chiuso, allora Y non è compatto.
Si fissi $x \in \overline{Y} \setminus Y$. Per ogni $y \in Y$ esistono intorni aperti U_y di y e V_y di x disgiunti. Allora $\{U_y\}_{y\in Y}$ è un ricoprimento aperto di Y. Supponiamo per assurdo che esista un sottoricoprimento finito $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$.
Consideriamo l'intersezione $V = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$ dei corrispondenti intorni di x. Essa è un intorno aperto di x disgiunto da $U_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_n}$, che contiene Y. Dunque $V \cap Y = \emptyset$, il che è assurdo essendo x aderente a Y.

[19]Senza l'ipotesi T_2 l'enunciato è falso. In uno spazio con la topologia indiscreta ogni sottoinsieme è compatto.

Per provare (ii), sia (X,τ) compatto e Y chiuso in X. Dato $\{A_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di Y, consideriamo $\{A_i\}_{i\in I}\cup\{X\setminus Y\}$, che è un ricoprimento aperto di X. Per la compattezza di X esiste un sottoricoprimento finito, $\{A_{i_1},\dots,A_{i_n}\}$ con l'aggiunta o meno di $X\setminus Y$. In entrambi i casi $\{A_{i_1},\dots,A_{i_n}\}$ è un ricoprimento finito di Y. $\square$

TEOREMA 5.64 (**Compattezza del prodotto di due spazi compatti**). *Siano $(X,\tau),(Y,\sigma)$ due spazi compatti. Allora $(X\times Y,\tau\times\sigma)$ è compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $X\times Y$.
Per ogni $(x,y)\in X\times Y$ si scelga $A(x,y)\in\{A_i\}_{i\in I}$ che contenga (x,y). A sua volta, ogni $A(x,y)$ contiene il prodotto $U(x,y)\times V(x,y)$ di due intorni aperti $U(x,y)$ di x e $V(x,y)$ di y, rispettivamente nelle topologie τ e σ.
Fissato $x\in X$, la famiglia $\{V(x,y)\}_{y\in Y}$ è un ricoprimento aperto di Y, che ammette un sottoricoprimento finito, $\{V(x,y_1),\dots,V(x,y_n)\}$. Ponendo $U(x)=U(x,y_1)\cap\dots\cap U(x,y_n)$, che è un intorno aperto di x, si ha

$$\begin{aligned} U(x)\times Y &= \bigcup_{j=1}^{n} U(x)\times V(x,y_j)\\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U(x,y_j)\times V(x,y_j)\\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A(x,y_j)\ . \end{aligned} \tag{10.1}$$

Osserviamo ora che $\{U(x)\}_{x\in X}$ è un ricoprimento aperto di X ed esiste dunque un suo sottoricoprimento finito, $\{U(x_1),\dots,U(x_m)\}$. Mettiamo dunque insieme le inclusioni (10.1), osservando però che, al variare di $k=1,\dots,m$, la scelta dei punti y_j e il loro numero n dipendono da k. Modificando le notazioni di conseguenza, otteniamo

$$X\times Y=\bigcup_{k=1}^{m}U(x_k)\times Y\subseteq\bigcup_{k=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n_k}A(x_k,y_{j,k})\ ,$$

che dimostra l'esistenza di un sottoricoprimento finito. $\square$

Induttivamente segue che il prodotto cartesiano di un numero finito di spazi compatti è compatto. L'estensione a prodotti qualunque di spazi topologici costituisce il *Teorema di Tichonoff*: un qualunque prodotto cartesiano di spazi compatti è compatto. La dimostrazione (come del resto quella data qui per il caso di prodotti finiti) usa l'Assioma della scelta. Il Teorema di Tichonoff nella sua forma generale è in realtà *equivalente* all'Assioma della scelta.

COROLLARIO 5.65 (**Caratterizzazione dei compatti di $\mathbb{R}^n$**). *I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ sono tutti e soli i sottoinsiemi chiusi e limitati.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5.64 e l'Esempio 5.59, gli "iperrettangoli" chiusi e limitati

$$R=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$$

sono compatti. Per il Teorema 5.63 (ii), ogni insieme chiuso e limitato, essendo contenuto in un iperrettangolo chiuso e limitato, è pure compatto.
Viceversa, sia Y un compatto di $\mathbb{R}^n$. Per il teorema 5.63 (i), Y è chiuso. Se non fosse limitato, le palle $B(0,n)$, $n\in\mathbb{N}^*$, formerebbero un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti. $\square$

10.2. Funzioni continue su compatti.

TEOREMA 5.66 (**Immagini continue di compatti sono compatte**). *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione continua tra due spazi topologici (X,τ) e (Y,σ). Se $K \subseteq X$ è compatto, allora $f(K)$ è compatto in Y.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{A_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $f(K)$. Allora $\big\{f^{-1}(A_i)\big\}_{i\in I}$ è un ricoprimento aperto di K, ed esiste dunque un sottoricoprimento finito $\big\{f^{-1}(A_{i_1}),\dots,f^{-1}(A_{i_n})\big\}$. Ma allora

$$f(K) \subseteq f\big(f^{-1}(A_{i_1})\cup\cdots\cup f^{-1}(A_{i_n})\big) = f\big(f^{-1}(A_{i_1})\big)\cup\cdots\cup f\big(f^{-1}(A_{i_n})\big) = A_{i_1}\cup\cdots\cup A_{i_n} \ . \qquad \square$$

Come caso particolare, si ottiene la seguente estensione del Teorema di Weierstrass a generali spazi compatti.

COROLLARIO 5.67. *Sia (X,τ) uno spazio compatto non vuoto e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua rispetto alla topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Allora f assume valore massimo e valore minimo.*

Un'altra conseguenza è il seguente inverso del Teorema 5.64.

COROLLARIO 5.68. *Siano (X,τ), (Y,σ) spazi topologici tali che $(X\times Y,\tau\times\sigma)$ sia compatto. Allora anche X e Y sono compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la proiezione canonica $p_X : X\times Y \longrightarrow X$ definita da $p_X(x,y) = x$. Essa è continua, perché, dato un aperto A in X, si ha $p_X^{-1}(A) = A\times Y \in \tau\times\sigma$. Dunque $p_X(X\times Y) = X$ è compatto. In modo analogo si dimostra che Y è compatto. $\square$

10.3. Compattezza in spazi metrici.

Nel caso in cui la topologia di X è indotta da una metrica, lo studio della compattezza si arricchisce di nuovi elementi. Premettiamo due definizioni.

DEFINIZIONE 5.69. *Sia (X,d) uno spazio metrico.*

(i) *(X,d) si dice* sequenzialmente compatto *se ogni successione di elementi di X ha una sottosuccessione convergente.*
(ii) *(X,d) si dice* totalmente limitato *se per ogni $r>0$ esiste un ricoprimento finito di X con palle di raggio r.*

TEOREMA 5.70 (**Caratterizzazioni della compattezza**). *Sia (X,d) uno spazio metrico. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(i) *X è compatto;*
(ii) *X è sequenzialmente limitato;*
(iii) *X è totalmente limitato e completo.*

DIMOSTRAZIONE. (i)⇒(ii). Sia X compatto e sia (x_n) una successione a valori in X. Per ogni $k\in\mathbb{N}$ sia

$$F_k = \overline{\{x_n : n \geq k\}} \ .$$

La famiglia $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ha la proprietà dell'intersezione finita perché, dati $k_1,\dots,k_m\in\mathbb{N}$,

$$F_{k_1}\cap\cdots\cap F_{k_m} \supseteq \big\{x_n : n\geq \max\{k_1,\dots,k_m\}\big\} \ .$$

Per la Proposizione 5.62, esiste $x\in\bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$, cioè x è aderente a ogni insieme $\{x_n : n\geq k\}$. Questo vuol dire che

$$\forall\, r>0 \ , \ \forall\, k\in\mathbb{N} \ , \quad \exists\, n\geq k \ : \ d(x,x_n) < r \ .$$

Scegliamo allora n_1 tale che $d(x, x_{n_1}) < 1$ e quindi, induttivamente, x_{n_m} tale che $n_m > n_{m-1}$ e $d(x, x_{n_m}) < 1/m$. Questo fornisce una sottosuccessione (x_{n_m}) convergente a x.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Sia X sequenzialmente compatto. Per dimostrare la completezza, sia (x_n) una successione di Cauchy di elementi di X. Per ipotesi, esiste una sottosuccessione $(x_{n(k)})$ convergente a $x \in X$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono

- k_0 tale che, per ogni $k \geq k_0$, $d(x, x_{n(k)}) < \varepsilon$,
- n_0 tale che, per ogni $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Sia $k_1 \geq k_0$ tale che $n(k_1) \geq n_0$. Allora, se $n \geq n_0$,

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n(k_1)}) + d(x_{n(k_1)}, x_n) < 2\varepsilon \ .$$

Dimostriamo ora per assurdo che X è totalmente limitato. Se non lo fosse, esisterebbe $r_0 > 0$ tale che non esita un ricoprimento finito di X con palle di raggio r_0.
Fissato $x_0 \in X$, la palla $B(x_0, r_0)$ non ricopre X, dunque esiste $x_1 \notin B(x_0, r_0)$. Induttivamente possiamo scegliere, per ogni n, $x_n \notin B(x_0, r_0) \cup B(x_1, r_0) \cup \cdots \cup B(x_{n-1}, r_0)$. Otteniamo così una successione (x_n) con la proprietà che, per ogni n, m, $d(x_n, x_m) \geq r_0$. Una tale successione non può però avere una sottosuccessione convergente, contraddicendo l'ipotesi (ii).

(iii)$\Rightarrow$(i). Sia X totalmente limitato e completo e sia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in I}$ una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita. Vogliamo provare che $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.
Data una palla aperta $B = B(x, r)$, indichiamo con $\widetilde{B}$ la palla chiusa $\{y : d(x, y) \leq r\}$ (in generale contenente, ma non nessariamente uguale alla chiusura di B).
La dimostrazione è basata sulla seguente osservazione: sia $\{B_j\}_{j=1,\ldots,n}$ un ricoprimento finito di X con palle aperte di raggio assegnato r; esiste $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $\mathcal{F}_j = \{F_i \cap \widetilde{B_j}\}_{i\in I}$ abbia la proprietà dell'intersezione finita (e quindi, in particolare, $F_i \cap \widetilde{B_j} \neq \emptyset$ per ogni $i \in I$).
Se così non fosse, per ogni j esisterebbe un insieme finito $I_j \subseteq I$ tale che

$$\bigcap_{i\in I_j} (F_i \cap \widetilde{B_j}) = \Big(\bigcap_{i\in I_j} F_i\Big) \cap \widetilde{B_j} = \emptyset \ .$$

Ma allora, posto $I' = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$, si avrebbe

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I'} F_i &= \bigcup_{j=1}^{n} \Big(\bigcap_{i\in I'} F_i\Big) \cap \widetilde{B_j} \\ &\subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \Big(\bigcap_{i\in I_j} F_i\Big) \cap \widetilde{B_j} \\ &= \emptyset \ ,\end{aligned}$$

in contrasto con la proprietà dell'intersezione finita di $\mathcal{F}$.
Procediamo allora nel modo seguente. Preso $r = 1$, esiste una palla chiusa $\widetilde{B_1}$ di raggio 1 tale che $\mathcal{F}_1 = \{F_i \cap \widetilde{B_1}\}_{i\in I}$ abbia la proprietà dell'intersezione finita.
E' una semplice verifica che lo spazio $\widetilde{B_1}$, con la distanza d ristretta, è completo e totalmente limitato. Riapplicando l'osservazione iniziale, esiste allora una palla di raggio $1/2$ in $\widetilde{B_1}$ (ossia l'intersezione $\widetilde{B_2} \cap \widetilde{B_1}$ dove $\widetilde{B_2}$ è la palla chiusa in X di raggio $1/2$ e stesso centro) tale che $\mathcal{F}_2 = \{F_i \cap \widetilde{B_1} \cap \widetilde{B_2}\}_{i\in I}$ abbia la proprietà dell'intersezione finita.
Induttivamente si deduce che esiste una successione di palle chiuse $\widetilde{B_n}$ di raggio $1/n$ tali che, per ogni n, la famiglia $\mathcal{F}_n = \{F_i \cap \widetilde{B_1} \cap \cdots \cap \widetilde{B_n}\}_{i\in I}$ ha la proprietà dell'intersezione finita. La successione

(x_n) dei centri delle palle $\widetilde{B_n}$ è di Cauchy. Infatti, per costruzione, se $m < n$ si ha $x_n \in \widetilde{B_m}$ e dunque $d(x_n, x_m) \leq 1/m$. Essendo X completo, esiste $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.
Per continuità della funzione distanza, $d(x, x_n) \leq 1/n$ e dunque $x \in \widetilde{B_n}$ per ogni n. Ne consegue che, per ogni $i \in I$ e $n \geq 1$,

$$F_i \cap \widetilde{B_1} \cap \cdots \cap \widetilde{B_n} \subseteq \widetilde{B_n} \subseteq \widetilde{B(x, 2/n)} \ .$$

Essendo $F_i \cap \widetilde{B_1} \cap \cdots \cap \widetilde{B_n} \neq \emptyset$ e per l'arbitrarietà di n, x è aderente a F_i, che è chiuso. Dunque $x \in F_i$ per ogni i, cioè $x \in \bigcap_{i\in I} F_i$. $\square$

Corollario 5.71.

(i) *Uno spazio metrico compatto non vuoto ha diametro finito (cioè* $\sup\big\{d(x,y) : x, y \in X\big\} < +\infty$*).*
(ii) *Ogni sottoinsieme compatto di uno spazio metrico* (X, d) *è limitato (cioè contenuto in una palla).*

Dimostrazione. La funzione distanza $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua. Essendo $X \times X$ compatto, per il Corollario 5.67 essa assume valore massimo.
Questo dimostra il punto (i), e il punto (ii) ne è una semplice conseguenza. $\square$

A differenza del caso specifico di $\mathbb{R}^n$ con la distanza euclidea, in generale non tutti gli insiemi chiusi e limitati sono compatti. Per convincersene basta fare la seguente osservazione generale: se (X, d) è uno spazio metrico non compatto (per es. $\mathbb{R}^n$ con la distanza euclidea), $(X, \min\{1, d\})$ è anch'esso uno spazio metrico e ha ovviamente diametro finito. Le due distanze inducono però la stessa topologia e dunque la stessa condizione di compattezza. Dunque X è chiuso e limitato rispetto alla distanza d', ma non compatto.
Vedremo in seguito altri esempi più naturali fatti con spazi di funzioni (ad esempio l'insieme delle funzioni continue da $[0, 1]$ in $[0, 1]$ è un sottoinsieme chiuso e limitato, ma non compatto, di $C([0, 1])$).
Concludiamo con l'estensione a spazi metrici compatti del Teorema di Heine-Cantor.

Teorema 5.72 (**Continuità su compatti implica uniforme continuità**). *Siano* (X, d), (X', d') *spazi metrici, con* (X, d) *compatto e* $f : X \longrightarrow X'$ *continua. Allora* f *è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Si supponga per assurdo che f non sia uniformemente continua. Esiste quindi $\varepsilon_0 > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$ la condizione (8.6) sia violata. Prendendo $\delta = 1/n$, esistono quindi x_n, $y_n \in X$ con

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \ , \qquad d'\big(f(x_n), f(y_n)\big) \geq \varepsilon_0 \ .$$

Per la compattezza di X, esiste una sottosuccessione $(x_{n(k)})$ convergente a $x \in X$. Essendo

$$d(x, y_{n(k)}) \leq d(x, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, y_{n(k)}) < d(x, x_{n(k)}) + \frac{1}{n(k)} \ ,$$

anche $(y_{n(k)})$ converge a x. Per la continuità di f,

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n(k)}) = f(x) \ .$$

Per la disuguaglianza triangolare, otteniamo che $d'\big(f(x_{n(k)}), f(y_{n(k)})\big) \to 0$, contraddicendo il fatto che queste distanze sono tutte più grandi di ε_0. $\square$

11. Connessione, connessione per archi, convessità

11.1. Spazi topologici connessi.

La nozione di connessione, che definiamo nel contesto più ampio degli spazi topologici, mette in luce quali sono le proprietà che consentono di estendere il teorema dei valori intermedi.

DEFINIZIONE 5.73 (Connessione). *Uno spazio topologico (X, τ) si dice connesso se non è scomponibile nell'unione disgiunta di due aperti non vuoti.*
Un sottoinsieme non vuoto Y di uno spazio topologico (X, τ) si dice connesso in X se è uno spazio connesso rispetto alla topologia ristretta $\tau_{|_Y}$.

Si osservi che la connessione di un sottoinsieme Y equivale a dire che non esistono aperti A_1, A_2 di X, tali che $A_1 \cap Y$ e $A_2 \cap Y$ sono non vuoti, $Y \subseteq A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 \cap Y = \emptyset$.
Infatti, se questa proprietà vale, allora $A_i' = A_i \cap Y$, $i = 1, 2$, sono aperti non vuoti e disgiunti nella topologia indotta su Y la cui unione contiene Y, quindi Y è sconnesso. Il viceversa si ottiene ricordando che ogni aperto A' di (Y, d_Y) è rappresentabile come $A \cap Y$, per un opportuno aperto A di X.
La connessione di uno spazio topologico può essere descritta in altri modi equivalenti:

PROPOSIZIONE 5.74. *Per uno spazio topologico (X, τ) le seguenti proprietà sono equivalenti:*
- (i) *X è connesso*
- (ii) *gli unici sottoinsiemi di X contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$.*
- (iii) *Gli unici sottoinsiemi di X con frontiera vuota sono X e $\emptyset$.*
- (iv) *Le uniche funzioni continue da X a $\{0, 1\}$ (dotato della la topologia discreta) sono le due funzioni costanti.*

La dimostrazione è ovvia.
Caratterizziamo ora i sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ (inteso come sempre munito della distanza euclidea). Useremo nella dimostrazione il seguente fatto elementare:
Un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se

$$x, y \in I \quad \Longrightarrow \quad [x, y] \subset I \ .$$

TEOREMA 5.75 (**Sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$**). *I sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che se $E \subseteq \mathbb{R}$ non è un intervallo, allora non è connesso. Per ipotesi esistono in $\mathbb{R}$ $x < z < y$ con $x, y \in E$ e $z \notin E$. Allora, chiamando χ la funzione caratteristica di $(z, +\infty)$, essa è continua in ogni punto di E, per cui $\chi_{|_E}$ è una funzione continua da E a $\{0, 1\}$ che assume entrambi i valori.
Che un intervallo I sia connesso segue dal teorema dei valori intermedi: se $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua assume entrambi i valori 0 e 1, allora deve necessariamente assumere tutti i valori compresi, dunque la sua immagine non può essere $\{0, 1\}$.[20]

[20]Ecco una dimostrazione diretta. Ssupponiamo per assurdo che esista $f : I \longrightarrow \{0, 1\}$ continua che assuma entrambi i valori. Esistono dunque $x, y \in E$ tali che $f(x) = 0$, $f(y) = 1$. Possiamo supporre $x < y$. Se z è il punto medio dell'intervallo $[x, y]$ in I, secondo il valore di $f(z)$ possiamo scegliere una delle due metà dell'intervallo, $[x_1, y_1]$, in modo che $f(x_1) = 0$ e $f(y_1) = 1$. Induttivamente costruiamo una successione di intervalli $[x_n, y_n]$, con $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ uguale a una delle due metà di $[x_n, y_n]$ e inoltre $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = 1$. Essendo (x_n) non decrescente, (y_n) non crescente e $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, esiste $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ e $\bar{x} \in I$. Ma allora f non è continua in $\bar{x}$, da cui l'assurdo.

□

Se due spazi topologici sono omeomorfi e uno dei due è connesso, anche l'altro è connesso. Questo segue da un fatto più generale che estende, come vedremo, il teorema dei valori intermedi.

TEOREMA 5.76 (**Immagine continua di connessi è connessa**). *Sia (X,τ) uno spazio topologico connesso e sia (Y,σ) un altro spazio topologico. Se $f : X \longrightarrow Y$ è continua, allora $f(X)$ è un sottoinsieme connesso di Y.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y' = f(X) \subseteq Y$ e sia $g : Y' \longrightarrow \{0,1\}$ continua. Allora $g \circ f$ è continua su X, che è connesso, e dunque è costante. Quindi Y' è connesso. □

COROLLARIO 5.77 (**Teorema dei valori intermedi**). *Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Se $Y \subseteq X$ è connesso, $f(Y)$ è un intervallo.*

TEOREMA 5.78 (**La chiusura di un connesso è connessa**). *Sia Y un sottoinsieme connesso in uno spazio topologico (X,τ). Allora anche $\overline{Y}$ è connesso. Più in generale ogni insieme Z con $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$ è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$ e $f : Z \longrightarrow \{0,1\}$ continua. Allora la sua restrizione a Y deve essere costante, diciamo $f_{|_Y} = 0$. Se $z \in Z \setminus Y$, z è di accumulazione per Y, per cui $f(z) = 0$. □

TEOREMA 5.79 (**Unioni di due insiemi connessi non disgiunti sono connesse**). *Siano Y, Y' due sottoinsiemi connessi in uno spazio topologico (X,τ) con $Y \cap Y' \neq \emptyset$. Allora $Y \cup Y'$ è connesso. Più in generale sono connessi*

- *$Y = \bigcup_{i\in I} Y_i$, con Y_i connesso per ogni $i \in I$ e, per ogni $i, j \in I$, $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$.*
- *le unioni finite $Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n$ con $Y_k \cap Y_{k+1} \neq \emptyset$ per ogni $k = 1, \ldots, n-1$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $f : Y \cup Y' \longrightarrow \{0,1\}$ continua. Allora $f_{|_Y}$ e $f_{|_{Y'}}$ sono costanti. Dovendo coincidere su $Y \cap Y'$, i due valori costanti coincidono. Le estensioni dell'enunciato si dimostrano con argomenti analoghi. □

11.2. Componenti connesse.

Sia (X,τ) uno spazio topologico. Dato $x \in X$ si consideri la famiglia

$$\mathcal{Y}_x = \{Y \subseteq X : x \in Y\,,\, Y \text{ connesso}\}\ .$$

Essendo $\{x\}$ connesso, la famiglia $\mathcal{Y}_x$ non è vuota. Per il Teorema 5.79,

$$\widetilde{Y}_x = \bigcup_{Y\in\mathcal{Y}_x} Y$$

è connesso ed è dunque il massimo sottoinsieme connesso di X contenente x. Esso si chiama la *componente connessa di x in X*.

TEOREMA 5.80. *Le componenti connesse dei singoli punti di X sono chiuse e formano una partizione di X. In particolare, la relazione su X*

$$x \sim x' \iff \text{esiste un connesso } Y \text{ contenente sia } x \text{ che } x'$$

è di equivalenza.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 5.78, $\overline{\widetilde{Y}_x} \in \mathcal{Y}_x$, per cui deve essere $\overline{\widetilde{Y}_x} \subseteq \widetilde{Y}_x$. Quindi $\widetilde{Y}_x$ è chiuso.
Siano $\widetilde{Y}_x$ e $\widetilde{Y}_{x'}$ le componenti connesse di due punti distinti x, x'. Se esse hanno intersezione non vuota, la loro unione è un connesso contenente sia x che x'. Dunque

$$\widetilde{Y}_x \cup \widetilde{Y}_{x'} \subseteq \widetilde{Y}_x \ , \qquad \widetilde{Y}_x \cup \widetilde{Y}_{x'} \subseteq \widetilde{Y}_{x'} \ ,$$

da cui $\widetilde{Y}_x = \widetilde{Y}_{x'}$. □

DEFINIZIONE 5.81. *Uno spazio topologico (X, τ) si dice* totalmente sconnesso *se gli unici sottoinsiemi connessi sono i singoletti.*

11.3. Connessione per archi.

DEFINIZIONE 5.82. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Si chiama* arco in X *una funzione continua continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow X$.*
Se $x = \gamma(a)$, $y = \gamma(b)$, si dice che l'arco γ congiunge x a y.
L'insieme immagine $\gamma\big([a, b]\big) \subset X$ si chiama il sostegno *o* traiettoria *di γ.*

Sottolineiamo che il termine "arco" denota una funzione e non un sottoinsieme di X. E' dunque implicita una *parametrizzazione* continua dei punti del sostegno.[21]

DEFINIZIONE 5.83 (**Connessione per archi**). *Un sottoinsieme E di uno spazio topologico (X, τ) si dice connesso per archi se, dati comunque x, $y \in E$, esiste un arco $\gamma : [a, b] \longrightarrow E$ congiungente x a y.*

PROPOSIZIONE 5.84 (**Connessione per archi implica connessione**). *Ogni insieme E connesso per archi è connesso.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, supponiamo che esista un insieme E che sia connesso per archi, ma non connesso. Possiamo allora scomporre E come unione disgiunta $(E \cap A) \cup (E \cap A')$ con A, A' aperti dello spazio metrico ambiente X e $E \cap A$, $E \cap A'$ non vuoti. Si prendano ora $x \in E \cap A$ e $y \in E \cap A'$. Per ipotesi, esiste una curva continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow E$ congiungente x a y. Abbiamo allora che $\gamma^{-1}(A)$ e $\gamma^{-1}(A')$ sono aperti non vuoti e disgiunti la cui unione è $[a, b]$, assurdo. □

Esempi. (1) Siano I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Il grafico di f,

$$E = \Big\{\big(x, f(x)\big) : \ x \in I\Big\} \subset \mathbb{R}^2 \ ,$$

è connesso per archi: basta infatti usare la stessa funzione f per definire gli archi congiungenti due punti di E, considerando la mappa continua $x \mapsto (x, f(x))$. Dunque E è connesso.

(2) Esistono in $\mathbb{R}^n$ insiemi connessi, anche chiusi, che non sono connessi per archi. Un esempio in dimensione $n = 2$ è dato dalla chiusura del grafico della funzione $\sin(1/x)$ definita su $(0, +\infty)$:

$$E = \Big\{(0, y) : \ -1 \le y \le 1\Big\} \cup \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : \ x > 0\right\} = E_0 \cup E_1 \ .$$

L'insieme E_0 è connesso perché grafico di una funzione continua (esempio precedente). Quindi $E = \overline{E_0}$ è connesso per il Teorema 5.78.

[21] I termini "arco" e "curva" sono a volte usati come sinonimi; altre volte l'uso del termine arco vuole sottolineare che il dominio è un intervallo chiuso e limitato, a differenza della curva, definita su un intervallo aperto, anche illimitato.

Tuttavia E non è connesso per archi, perché non esiste alcun arco con sostegno in E congiungente un punto $(0,y) \in E_0$ con un punto $(x, \sin 1/x) \in E_1$. Sia infatti $\gamma : [a,b] \to E$ un arco con $\gamma(a) = (0,y)$ e $\gamma(b) = (x, \sin 1/x)$. Sia $\gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$. Dato che $\gamma_1(a) = 0$ e $\gamma_1(b) = 1$, possiamo definire a^* come il massimo dei $t \in [a,b]$ tali che $\gamma_1(t) = 0$. È evidente che $a \leq a^* < b$. Allora $\gamma(a^*) = \lim_{t \to a^{*+}} \gamma(t)$ e in particolare

$$\gamma_2(a^*) = \lim_{t \to a^{*+}} \gamma_2(t) = \lim_{t \to a^{*+}} \sin \frac{1}{\gamma_1(t)} \ .$$

Si vede facilmente, sulla base del teorema dei valori intermedi, che, in ogni intorno destro di a^*, $\gamma_1(t)$ assume tutti i valori in un intorno destro di 0, per cui l'ultimo limite non può esistere, da cui segue la contraddizione.

Mostriamo infine che, per aperti di $\mathbb{R}^n$ (e più in generale di uno spazio vettoriale normato, o di uno spazio metrico connesso per archi), connessione e connessione per archi si equivalgono.

TEOREMA 5.85. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora A è connesso se e solo se è connesso per archi.*

DIMOSTRAZIONE. Avendo a disposizione la Proposizione 5.84, rimane da dimostrare che se A è connesso allora è connesso per archi.
Fissato un punto $x_0 \in A$, si consideri l'insieme A_0 degli $x \in A$ che si possono congiungere a x_0 con un arco con sostegno contenuto in A. Tale insieme è non vuoto perché contiene almeno x_0 stesso. Dimostriamo che A_0 è aperto. Fissato $x \in A_0$, si prenda una palla $B_r(x)$ contenuta in A. Ogni punto $y \in B_r(x)$ si può congiungere a x_0 nel modo seguente: per ipotesi esiste un arco $\gamma : [a,b] \longrightarrow A$ con $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Definiamo allora un nuovo arco $\delta : [a, b+1] \longrightarrow A$ ponendo

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a,b] \ , \\ x + (t-b)(y-x) & \text{se } t \in (b, b+1] \ . \end{cases} \tag{11.1}$$

In questo modo si percorre, per $t \in [b, b+1]$, il segmento congiungente x a y. Si vede facilmente che δ è continua, e dunque è un arco. Essendo x arbitrario, questo prova che A_0 è aperto.
Dimostriamo ora che A_0 è anche chiuso in A, o, in modo equivalente, che $A_1 = A \setminus A_0$ è aperto. Se $x \in A_1$, si prenda una palla $B_r(x)$ contenuta in A e si fissi un punto $y \in B_r(x)$. Se fosse $y \in A_0$, esso sarebbe congiungibile a x_0 con un arco in A. Ma allora la stessa costruzione usata in (6.29) (scambiando x con y) consentirebbe di congiungere x_0 a x, il che è assurdo.
Essendo A connesso ed essendo A_0 un suo sottoinsieme aperto, chiuso e non vuoto, deve essere $A_0 = A$. Dunque ogni punto di A è congiungibile a x_0 con un arco in A. Per l'arbitrarietà di x_0 si ha la conclusione. □

COROLLARIO 5.86. *Sia A un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora le componenti connesse di A sono aperte e la componente connessa di $x \in A$ è costituita dai punti $y \in A$ che possono essere congiunti a x con un arco in A.*

DIMOSTRAZIONE. Per $x \in A$, sia Y_x la componente connessa di A contenente x. Se $y \in Y_x$, esiste una palla $B_r(y) \subset A$. Essendo Y_x e $B_r(y)$ entrambi connessi contenenti y, $Y_x \cup B_r(y)$ è pure connesso per il Teorema 5.79. Per la massimalità di Y_x, è $B_r(y) \subseteq Y_x$. Dunque Y_x è aperto.
Per il Teorema 5.85, Y_x è connesso per archi. Quindi ogni suo punto è congiungibile a x con un arco contenuto in Y_x. D'altra parte, se $y \in A$ è congiungibile a x con un arco γ, deve essere in Y_x perché l'immagine di γ è un insieme connesso contenente x, dunque è interamente contenuta in Y_x. □

Si osservi che, definendo A_0 come l'insieme degli $x \in A$ congiungibili a x_0 con un arco lineare a tratti,[22] si ottiene lo stesso risultato, quindi la tesi vale in maniera più forte.

Corollario 5.87. *Per ogni aperto connesso A e per ogni coppia di punti x, $y \in A$ esiste un arco lineare a tratti congiungente x a y e interamente contenuto in A.*

---

[22]Per maggiore precisione, intendiamo per

(i) *concatenazione* di due archi γ, γ', definiti su intervalli $[a, b]$, $[a', b']$ rispettivamente, e tali che $\gamma(b) = \gamma'(a')$, l'arco γ'' definito su $[a, b + b' - a']$ da

$$\gamma''(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \gamma'(t + a' - b) & \text{se } t \in [b, b + b' - a'] \end{cases} .$$

(ii) arco *lineare a tratti* la concatenazione di un numero finito di archi della forma (6.29).

CAPITOLO 6

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

Si danno per noti i risultati fondamentali del calcolo differenziale in una variabile, in particolare la nozione di derivata, le regole di derivazione di base[1], il teorema di Lagrange[2], il teorema di Cauchy[3], lo sviluppo di Taylor[4].

1. Convergenza puntuale e uniforme

Sia E un insieme. Consideriamo una successione

$$f_n : E \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

di funzioni a valori reali definite in E.

Definizione 6.1 (**Convergenza puntuale**). *Si dice che la successione (f_n) converge puntualmente su E a $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ se*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in E .$$

Esempi.

(1) Con $E = \mathbb{R}$, la successione $f_n(x) = nx/(1 + nx^2)$ converge puntualmente a

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 , \\ 0 & \text{se } x = 0 . \end{cases}$$

(2) Sempre con $E = \mathbb{R}$, si ponga $f_n(x) = x^n$. La successione di numeri reali $\big(f_n(x)\big)$ ha limite finito solo per $-1 < x \leq 1$. Quindi la successione di funzioni (f_n) non converge puntualmente su $\mathbb{R}$. Tuttavia, restringendosi a $E_0 = (-1, 1]$, si ha convergenza puntuale su E_0 e la funzione limite è

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in (-1, 1) , \\ 1 & \text{se } x = 1 . \end{cases} \tag{1.1}$$

Introduciamo ora una nozione più restrittiva di convergenza, la convergenza uniforme. Come sopra, E è un insieme e le funzioni f_n sono definite su E e a valori reali.

---

[1] Somma: $(f + g)' = f' + g'$; prodotto: $(fg)' = f'g + fg'$; composizione: $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$; inversa: $(f^{-1})' = 1/f' \circ f^{-1}$.

[2] Per ogni intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ limitato e per ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in tutti i punti di $[a, b]$ e derivabile in tutti i punti di (a, b), esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

[3] Per ogni intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ limitato, se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono continue in tutti i punti di $[a, b]$ e derivabili in tutti i punti di (a, b), esiste $c \in (a, b)$ tale che $g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a))$.

[4] Se $n \geq 1$ è intero, $r > 0$ e $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ è derivabile $(n-1)$ volte in $(x_0 - r, x_0 + r)$ e $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0, allora $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + o((x - x_0)^n)$, con le convenzioni $f^{(0)} = f$, derivabile 0 volte=continua e $(x - x_0)^0 = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Definizione 6.2 (**Convergenza uniforme**). *Si dice che la successione* (f_n) *converge uniformemente su* E *a* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *se, per ogni* $\varepsilon > 0$*, esiste un indice* n_0 *tale che, per ogni* $n \geq n_0$ *e ogni* $x \in E$*, si ha*

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon \ .$$

Le due nozioni, di convergenza puntuale e convergenza uniforme, si confrontano bene esprimendo le due condizioni in forma esplicita.

- Convergenza puntuale:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in E,\ \exists\, n_0(\varepsilon, x)\ :\ \forall\, n \geq n_0(\varepsilon, x)\,,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon \ . \tag{1.2}$$

- Convergenza uniforme:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0(\varepsilon)\ :\ \ \forall\, x \in E,\ \forall\, n \geq n_0(\varepsilon)\,,\ \big|f_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon \ . \tag{1.3}$$

La differenza sta nel fatto che, dato ε, l'indice richiesto n_0, a partire dal quale $f_n(x)$ debba distare da $f(x)$ per meno di ε, possa dipendere da x, oppure debba esistere indipendentemente da x.
Il seguente enunciato è dunque ovvio.

Proposizione 6.3 (**Convergenza uniforme implica convergenza puntuale**). *Se una successione di funzioni converge uniformemente su* E *alla funzione* f*, allora vi converge puntualmente.*

Il seguente esempio mostra che, in generale, il viceversa non vale.

Esempio. Si considerino le funzioni $f_n(x) = x^n$ del precedente Esempio 2. Sull'insieme $E_0 = (-1, 1]$ si ha convergenza puntuale, ma non uniforme. Si fissi infatti $\varepsilon < 1$. Se la convergenza alla funzione f in (1.1) fosse uniforme, dovrebbe esistere un indice n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$ e ogni $x \in (-1, 1)$, $|x^n| < \varepsilon$. Ma questo è assurdo perché $\lim_{x\to\pm 1} |x^n| = 1$.
Restringiamo ora le funzioni f_n a un intervallo $E_\delta = [-1 + \delta, 1 - \delta]$, dove $\delta \in (0, 1/2)$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che $(1 - \delta)^{n_0} < \varepsilon$. Se $n \geq n_0$ e $x \in E_\delta$, si ha

$$\big|x^n - f(x)\big| = |x^n| \leq (1 - \delta)^n < \varepsilon \ .$$

Quindi la convergenza alla funzione f è uniforme su E_δ.

Osservazione 6.4. Si osservi che le nozioni di convergenza puntuale e uniforme si estendono in modo naturale a successioni a valori in un qualunque spazio metrico (Y, d_Y): basta nelle formule (1.2) e (1.3) sostituire $|f_n(x) - f(x)|$ con $d_Y(f_n(x), f(x))$. Nel seguito non ci servirà tuttavia tutta questa generalità, salvo il caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$ (o a valori complessi).

2. Continuità del limite uniforme

Gli esempi visti nel paragrafo precedente mostrano che funzioni continue possono convergere puntualmente a funzioni discontinue. Il teorema seguente dimostra invece che la continuità delle funzioni f_n "si trasmette" alla funzione limite f quando la convergenza è uniforme.

Teorema 6.5 (**Continuità del limite uniforme**). *Sia* (E, τ) *uno spazio topologico. Se le funzioni* $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *convergono a una funzione* f *uniformemente su* E*, e ogni* f_n *è continua in un punto* $x_0 \in E$*, allora anche* f *è continua in* x_0*.*

DIMOSTRAZIONE. Si fissi $\varepsilon > 0$. Per l'ipotesi di convergenza uniforme, esiste un indice $\overline{n}$ tale che

$$\forall\, x \in E\ , \qquad \big|f(x) - f_{\overline{n}}(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Per la continuità di $f_{\overline{n}}$ in x_0, esiste un intorno V di x_0 tale che

$$\forall\, x \in V\ , \qquad \big|f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Allora, per ogni $x \in V$ risulta

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &= \big|f(x) - f_{\overline{n}}(x) + f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(x_0) + f_{\overline{n}}(x_0) - f(x_0)\big| \\ &\le \big|f(x) - f_{\overline{n}}(x)\big| + \big|f_{\overline{n}}(x) - f_{\overline{n}}(x_0)\big| + \big|f_{\overline{n}}(x_0) - f(x_0)\big| \\ &< \varepsilon\ .\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, f è continua in x_0. □

Da questo teorema discende il seguente corollario, che riguarda la possibilità di cambiare ordine nella conatenzazione di due limiti.

COROLLARIO 6.6. *Siano (X,τ) uno spazio topologico, $E \subseteq X$, $\bar{x}$ un punto di accumulazione di E, (f_n) una successione di funzioni da E in $\mathbb{R}$, convergente a $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente su E.*
Se per ogni n esiste finito $\lim_{x\to\bar{x}} f_n(x) = \ell_n$, allora

(i) *esiste finito* $\lim_{n\to\infty} \ell_n = \ell$,
(ii) $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell$.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo le funzioni $\tilde{f}_n; E \cup \{\bar{x}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ come[5]

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \in E \setminus \{\bar{x}\} \\ \ell_n & \text{se } x = \bar{x}\ . \end{cases}$$

Per definizione di limite, le funzioni $\tilde{f}_n$ sono continue in $\bar{x}$. Vale allora l'uguaglianza

$$\begin{aligned}|\ell_n - \ell_m| &= \big|\lim_{x\to\bar{x}} \big(f_n(x) - f_m(x)\big)\big| \\ &\le \sup_{x \in E\setminus\{\bar{x}\}} \big|f_n(x) - f_m(x)\big| \\ &\le \sup_{x\in E} \big|f_n(x) - f(x)\big| + \sup_{x\in E} \big|f(x) - f_m(x)\big|\ .\end{aligned}$$

Dall'ipotesi di convergenza uniforme segue dunque che (ℓ_n) è una successione di Cauchy, dunque converge a un valore $\ell \in \mathbb{R}$.
Ponendo ora

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \setminus \{\bar{x}\} \\ \ell & \text{se } x = \bar{x}\ , \end{cases}$$

si verifica facilmente che la successione di funzioni $(\tilde{f}_n)$ converge uniformemente a $\tilde{f}$ su $E \cup \{\bar{x}\}$. Per il Teorema 6.5, $\tilde{f}$ è continua in $\bar{x}$, per cui vale (ii). □

[5] Si noti che non escludiamo il caso $\bar{x} \in E$. In questo caso stiamo modificando, se necessario, il valore delle funzioni in $\bar{x}$.

La tesi del Corollario 6.6 può essere scritta nella forma

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\bar{x}} f_n(x) = \lim_{x\to\bar{x}}\lim_{n\to\infty} f_n(x) \ .$$

Questa identità vale anche, sotto le stesse ipotesi di convergenza uniforme, per limiti all'infinito di funzioni definite su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{N}$, prendendo come spazio X le corrispondenti estensioni $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, o $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, definite nel par. 6 del Cap. 5.

3. La convergenza uniforme come convergenza in uno spazio metrico

Sia E un insieme. Indichiamo con $B(E)$ lo spazio vettoriale delle funzioni *limitate* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Date f, $g \in B(E)$, definiamo la cosiddetta distanza del sup

$$d(f,g) = \sup_{x\in E} \left| f(x) - g(x) \right| \ . \tag{3.1}$$

Lemma 6.7. *La formula (3.1) definisce una distanza su $B(E)$.*

Dimostrazione. Chiaramente, $d(f,g) \geq 0$ per ogni f, $g \in B(E)$ e $d(f,g) = 0$ se e solo se $f = g$. Altrettanto chiaramente, vale l'identità $d(f,g) = d(g,f)$. Rimane dunque da verificare la disuguaglianza triangolare.
Siano f, g, $h \in B(E)$. Per ogni $x \in E$,

$$\left| f(x) - h(x) \right| \leq \left| f(x) - g(x) \right| + \left| g(x) - h(x) \right| \leq d(f,g) + d(g,h) \ .$$

Ma allora

$$d(f,h) = \sup_{x\in E} \left| f(x) - h(x) \right| \leq d(f,g) + d(g,h) \ .$$

□

La seguente proposizione mostra che la convergenza uniforme è precisamente quella indotta in $B(E)$ dalla distanza del sup: si dice informalmente che la convergenza uniforme è "metrizzata" dalla distanza del sup.

Proposizione 6.8. *Una successione (f_n) di elementi di $B(E)$ converge uniformemente su E a $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ se e solo se $f \in B(E)$ e*

$$\lim_{n\to\infty} d(f, f_n) = 0 \ .$$

Dimostrazione. Si supponga che le funzioni f_n convergano uniformemente su E a una funzione f. Dato $\varepsilon > 0$ esiste un indice n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$ vale

$$\left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon \qquad \forall x \in E \ . \tag{3.2}$$

Sia M tale che $\left| f_{n_0}(x) \right| \leq M$ per ogni $x \in E$. Allora

$$\left| f(x) \right| \leq \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| + \left| f_{n_0}(x) \right| < M + \varepsilon \ ,$$

per ogni $x \in E$. Dunque $f \in B(E)$. Inoltre, per $n \geq n_0$, la disuguaglianza (3.2) implica

$$d(f, f_n) = \sup_{x\in E} \left| f(x) - f_n(x) \right| \leq \varepsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε, $\lim_n d(f, f_n) = 0$.
Viceversa, se $f \in B(E)$ e $\lim_n d(f, f_n) = 0$, dato $\varepsilon > 0$, esiste n_0 tale che $d(f, f_n) < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Ma questo implica che, per ogni $x \in E$ e ogni $n \geq n_0$, $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Quindi le f_n convergono uniformemente a f. □

Teorema 6.9 (**Completezza di** $B(E)$). *Per ogni insieme E lo spazio metrico $\big(B(E), d\big)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia (f_n) una successione di Cauchy in $B(E)$. Si fissi $x \in E$. Siccome $\big|f_n(x) - f_m(x)\big| \leq d(f_n, f_m)$, si deduce immediatamente che la successione di numeri reali $\big(f_n(x)\big)$ è pure di Cauchy. Allora il limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

esiste finito per ogni $x \in E$. Resta da mostrare che $f \in B(E)$ e che $f_n \to f$ uniformemente in E. Dato $\varepsilon > 0$, sia n_0 tale che, per ogni m, $n \geq n_0$, $d(f_m, f_n) < \varepsilon$. Per ogni $x \in E$ e n, $m \geq n_0$, si ha $\big|f_m(x) - f_n(x)\big| < \varepsilon$. Dunque, passando al limite per $m \to \infty$ in questa relazione, otteniamo che per $n \geq n_0$ vale

$$\big|f(x) - f_n(x)\big| = \lim_{m\to\infty} \big|f_m(x) - f_n(x)\big| \leq \varepsilon\ .$$

Applicando questa proprietà con $n = n_0$, dato che f_{n_0} è limitata, otteniamo che $\sup|f| \leq \sup|f_{n_0}| + \varepsilon$, quindi f è limitata. Passando ora all'estremo superiore otteniamo $d(f, f_n) \leq \varepsilon$ per $n \geq n_0$, quindi $f_n \to f$ in $B(E)$. □

In questo paragrafo è stata introdotta la condizione di limitatezza per le funzioni considerate per essere sicuri che l'estremo superiore in (3.1) fosse finito. In realtà è sufficiente che siano limitate non le stesse funzioni considerate, ma le *differenze* tra due qualunque di esse. Quindi le definizioni e i risultati sopra esposti valgono, più in generale su insiemi di funzioni della forma

$$g + B(E) = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}\ :\ f - g \in B(E)\}\ ,$$

dove g è una qualunque funzione da E a $\mathbb{R}$.
Più in generale, se consideriamo funzioni non necessariamente limitate, la stessa dimostrazione mostra che

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\ f \text{ tale che } f_n \to f \text{ uniformemente in } E\ . \tag{3.3}$$

Sia ora E uno spazio topologico. Indichiamo con $BC(E) = B(E) \cap C(E)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue e limitate da E a $\mathbb{R}$. Il Teorema 6.5 implica facilmente il seguente corollario.

Corollario 6.10. *Sia (E, τ) uno spazio topologico. $BC(E)$ è chiuso in $B(E)$. In particolare, $\big(BC(E), d\big)$ è pure uno spazio metrico completo.*

In particolare, se E è uno spazio metrico compatto, per esempio un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$, $BC(E) = C(E)$, per cui $\big(C(E), d\big)$ è uno spazio metrico completo.

4. Derivabilità della funzione limite

Consideriamo in questo paragrafo successioni di funzioni definite su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Più in generale, per trattare intervalli I non necessariamente aperti, per "funzione derivabile su I" intenderemo una funzione che è derivabile in $\mathring{I}$ e ammette derivata laterale in ognuno degli eventuali estremi di I che appartengono I.
Se è vero che il limite uniforme di funzioni continue è continuo, non è vero in generale che il limite uniforme di funzioni derivabili sia derivabile.

Esempio. Ci sono molti modi di ottenere la funzione $f(x) = |x|$, non derivabile in 0, come limite uniforme su $I = \mathbb{R}$ di funzioni derivabili. Si prenda per esempio $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$, il cui grafico è il ramo superiore di un'iperbole equilatera con asintoti $y = \pm x$ e vertice nel punto $(0, 1/n)$. Chiaramente f_n è derivabile su $\mathbb{R}$. Essendo

$$|x| < \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq |x| + \frac{1}{n} \ ,$$

si ha $\lim_n f_n = f$ uniformemente.
Un altro modo è il seguente. Sull'intervallo $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ si modifichi il grafico della funzione $f(x) = |x|$ sostituendolo con il quarto di cerchio tangente al grafico stesso nei punti $\left(\pm\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. La funzione g_n così ottenuta è derivabile e $\lim_{n\to\infty} g_n = f$ uniformemente.

Il secondo procedimento descritto nell'esempio si generalizza facilmente al caso in cui f è una funzione continua *lineare a tratti*, cioè una funzione continua il cui grafico sia l'unione di un numero localmente finito di segmenti su intervalli adiacenti di $\mathbb{R}$. Utilizzando questa osservazione, possiamo dimostrare il risultato che segue.

TEOREMA 6.11 (**Le funzioni ovunque derivabili sono dense nelle funzioni continue**). *Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato*[6]*. Ogni funzione continua su $[a, b]$ è limite uniforme di una successione di funzioni derivabili su $[a, b]$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato un intero $n > 0$, si suddivida I in n sottointervalli adiacenti di lunghezza $(b - a)/n$. Poniamo

$$a_j = a + \frac{j}{n}(b - a) \ , \qquad j = 0, \ldots, n \ ,$$

e indichiamo con $I_j = [a_{j-1}, a_j]$, $j = 1, \ldots, n$, il j-esimo sottointervallo della suddivisione. Chiamiamo quindi f_n la funzione tale che

- $f_n(a_j) = f(a_j)$ per $j = 0, \ldots, n$,
- per $j = 1, \ldots, n$, $(f_n)|_{I_j}$ è lineare.

Dimostriamo che le f_n convergono uniformemente a f su $[a, b]$. Per la continuità uniforme di f, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$x,\, x' \in [a, b] \ , \ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon \ .$$

Si prenda ora n tale che $(b - a)/n < \delta$ e siano $I_1, \ldots, I_n$ i sottointervalli di I descritti sopra. Se $x \in I_j$, per la monotonia di f_n su I_j, il valore $f_n(x)$ è compreso tra i due valori $f_n(a_{j-1}) = f(a_{j-1})$ e $f_n(a_j) = f(a_j)$. Quindi

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq \max\left\{\left|f(x) - f(a_{j-1})\right|, \left|f(x) - f(a_j)\right|\right\} < \varepsilon \ ,$$

essendo $|x - a_{j-1}|$ e $|x - a_j|$ minori di δ. Siccome la condizione $(b - a)/n < \delta$ è verificata definitivamente, si ottiene che $d(f, f_n) < \varepsilon$ definitivamente.
Per quanto detto a proposito delle funzioni continue e lineari a tratti, ogni f_n è limite uniforme su $[a, b]$ di funzioni derivabili su $[a, b]$. Si prenda quindi, per ogni n, una funzione g_n derivabile su $[a, b]$ tale che $d(f_n, g_n) < 1/n$. Allora si ha definitivamente $d(f_n, g_n) < \varepsilon$, e dunque $d(f_n, g_n) < 2\varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε si ha la conclusione. □

[6] La conclusione vale in realtà per tutti gli intervalli, lo si dimostri per esercizio. Approssimando con più cura le funzioni lineari a tratti nell'intorno dei punti di discontinuità della derivata prima è possibile ottenere anche funzioni derivabili infinite volte.

Passiamo ora a discutere quali ipotesi possano garantire che se le funzioni f_n sono derivabili su un intervallo I e convergono a una funzione f, allora anche f è derivabile su I e f' è uguale al limite delle f_n'. Si vuole cioè avere l'uguaglianza di commutazione tra derivata e limite:

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \ .$$

Vogliamo in sostanza sapere sotto quali ipotesi vale che "la derivata del limite è il limite delle derivate".
Consideriamo prima di tutto il caso in cui I è chiuso e limitato.

Teorema 6.12. *Sia (f_n) una successione di funzioni derivabili sull'intervallo $I = [a, b]$. Si supponga che*

(i) *le derivate f_n' convergano uniformemente su I a una funzione g;*
(ii) *esista un punto $x_0 \in I$ tale che*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \ell \in \mathbb{R} \ .$$

Allora le funzioni f_n convergono uniformemente su I alla funzione f che soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} f'(x) = g(x) & \forall\, x \in I \ , \\ f(x_0) = \ell \ . \end{cases} \tag{4.1}$$

Prima di dare la dimostrazione si noti che se due funzioni soddisfano entrambe le condizioni (4.1), allora coincidono. Infatti la loro differenza ha derivata nulla su tutto I, dunque è costante per il teorema di Lagrange. Ma la differenza è nulla in x_0, da cui la conclusione. La funzione f nella (4.1) è quella che si chiama una *primitiva* di g.

Dimostrazione. Dimostriamo per cominciare che la successione (f_n) converge uniformemente (si veda anche l'osservazione alla fine della dimostrazione). Per ipotesi, la successione (f_n') delle derivate converge uniformemente e la successione dei valori $f_n(x_0)$ ha limite. Quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per n, $m \geq n_0$, si ha

$$|f_n'(t) - f_m'(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \in I \qquad \text{e} \qquad \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| < \varepsilon \ .$$

Sia allora $x \in [a, b]$. Applicando il teorema di Lagrange alla funzione $f_n - f_m$ si ha

$$\begin{aligned} \big|f_n(x) - f_m(x)\big| &\leq \big|(f_n(x) - f_m(x)) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big)\big| + \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| \\ &= |x - x_0|\big|(f_n - f_m)'(t_{x,n,m})\big| + \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| \ , \end{aligned}$$

dove $t_{x,n,m}$ è un punto strettamente compreso tra x_0 e x. Dunque per n, $m \geq n_0$ vale

$$\max_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f_m(x)\big| \leq (b - a) \sup_{t\in I} |f_n'(t) - f_m'(t)| + \big|f_n(x_0) - f_m(x_0)\big| \leq (b - a + 1)\varepsilon \ .$$

Per l'arbitrarietà di ε, la successione (f_n) è di Cauchy in $C(I)$.
Essendo $C(I)$ completo, si ottiene una funzione $f \in C(I)$ come limite uniforme delle f_n. Ovviamente, $f(x_0) = \ell$. Dobbiamo ora dimostrare che f è derivabile in I e che la sua derivata è g.[7]

[7] Se le funzioni f_n' fossero continue, anche g sarebbe continua e si potrebbe mostrare questo fatto anche usando il teorema fondamentale del calcolo integrale, passando al limite per $n \to \infty$ nella relazione $f_n(x) - f_n(y) = \int_y^x f_n'(s)ds$ per ottenere $f(x) - f(y) = \int_y^x g(s)ds$, grazie alla continuità dell'integrale rispetto alla convergenza uniforme. Questa in effetti è la dimostrazione presente in molti testi.

Fissiamo un punto $\overline{x} \in I$ e consideriamo la successione di funzioni

$$h_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x) - f_n(\overline{x})}{x - \overline{x}} & \text{se } x \neq \overline{x} \ , \\ f_n'(\overline{x}) & \text{se } x = \overline{x} \ . \end{cases}$$

Queste funzioni sono ovviamente continue in I e convergono puntualmente alla funzione

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} & \text{se } x \neq \overline{x} \ , \\ g(\overline{x}) & \text{se } x = \overline{x} \ . \end{cases}$$

Se dimostriamo che le h_n convergono uniformemente, ne consegue che la convergenza a h è uniforme (visto che convergenza uniforme implica convergenza puntuale), e dunque h è continua in $\overline{x}$. Ma questo vuol dire che

$$g(\overline{x}) = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}} = f'(\overline{x}) \ ,$$

che è la tesi del teorema.
Fissiamo dunque $x \neq \overline{x}$. Riapplicando il teorema di Lagrange a $f_n - f_m$, si ha

$$\big|h_n(x) - h_m(x)\big| = \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - \big(f_n(\overline{x}) - f_m(\overline{x})\big)}{x - \overline{x}} \right| = \big|f_n'(t_{x,\overline{x},n,m}) - f_m'(t_{x,\overline{x},n,m})\big| \ ,$$

con $t_{x,\overline{x},n,m}$ strettamente compreso tra x e $\overline{x}$. Quindi

$$\max_{x \in [a,b]} \big|h_n(x) - h_m(x)\big| = \sup_{x \in [a,b] \setminus \{\overline{x}\}} \big|h_n(x) - h_m(x)\big| \leq \sup_{t \in I} |f_n'(t) - f_m'(t)| \ ,$$

e questo prova, grazie alla (3.3), la convergenza uniforme.[8] □

Si noti che nell'esempio già considerato delle funzioni $\sqrt{x^2 + n^{-2}}$, le cui derivate valgono $x/\sqrt{x^2 + n^{-2}}$, non si ha (e non si potrebbe avere, visto che il limite delle funzioni è non derivabile) convergenza uniforme delle derivate. Infatti le derivate convergono, solo puntualmente, alla funzione discontinua che vale 1 per $x > 0$, 0 per $x = 0$, -1 per $x < 0$.
Nella dimostrazione del Teorema 6.12 si è fatto uso dell'ipotesi di limitatezza dell'intervallo I. Semplici esempi mostrano che su intervalli illimitati non si può dedurre dalle stesse ipotesi la convergenza uniforme delle f_n. Si ponga per esempio, su $I = \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x}{n} \ .$$

Le ipotesi del Teorema 6.12 sono soddisfatte, ma le f_n non convergono uniformemente su $\mathbb{R}$. Si noti però che su ogni sottointervallo compatto si ha convergenza uniforme. Si parla in questo caso di *convergenza uniforme sui compatti*.[9] Si ha quindi la seguente semplice estensione del Teorema 6.12.

Corollario 6.13. *Sia (f_n) una successione di funzioni derivabili su un intervallo I. Si supponga che*

(i) *le derivate f_n' convergano a una funzione g uniformemente sui compatti di I;*

[8] Si osservi che, applicando la seconda parte del ragionamento con $\bar{x} = x_0$ e usando le formule

$$f_n(x) = f_n(x_0) + h_n(x)(x - x_0) \ ,$$

avremmo potuto dedurre la proprietà di Cauchy di (f_n) nello spazio $C(I)$ direttamente da quella di (h_n), applicando una sola volta il teorema di Lagrange a $f_n - f_m$.

[9] Si vede facilmente che se una successione converge uniformemente su un insieme E, converge uniformemente su ogni $E' \subseteq E$. Quindi la convergenza uniforme sui compatti di un intervallo aperto (a, b) equivale alla convergenza uniforme su una qualsiasi successione di sottointervalli $[a_n, b_n]$ con $\inf_n a_n = a$ e $\sup_n b_n = b$.

(ii) *esista un punto* $x_0 \in I$ *tale che*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \ell \in \mathbb{R} \ .$$

Allora le funzioni f_n *convergono uniformemente sui compatti di* I *alla funzione* f *che soddisfa le condizioni* (4.1).

5. Convergenza uniforme di serie di funzioni e spazi vettoriali normati

I risultati dei paragrafi precedenti relativi alla convergenza uniforme (rispettivamente, puntuale) di successioni di funzioni si applicano allo studio della convergenza uniforme (risp. puntuale) di una *serie di funzioni*. Naturalmente, si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

di funzioni a valori reali definite su uno stesso insieme E converge uniformemente (risp. puntualmente) su E alla funzione s se la successione delle somme parziali

$$s_n = f_0 + \cdots + f_n$$

converge uniformemente (risp. puntualmente) a s su E.
Come per le serie numeriche, è importante avere a disposizione criteri di semplice verifica che assicurino la convergenza uniforme di una serie di funzioni.
Vedremo più avanti il *criterio di Weierstrass*, che è bene però inquadrare in un contesto più generale. Per far questo, osserviamo che ha senso parlare di somma di una serie solo quando lo spazio ambiente è dotato, da un lato, di una struttura algebrica che consenta di calcolare somme finite di suoi elementi, e dall'altro, di una distanza che consenta di calcolare limiti. Il caso che ci interessa è quello di particolari metriche definite su spazi vettoriali, e da questo cominciamo.
La nozione di norma, introdotta nella prossima definizione, formalizza la nozione intuitiva di lunghezza di un vettore in uno spazio vettoriale.

Definizione 6.14 (**Norma in uno spazio vettoriale**). *Sia* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$. *Si chiama* norma *su* V *una funzione*

$$\| \ \| : V \longrightarrow [0, +\infty) \ ,$$

che soddisfi le seguenti proprietà:

(i) $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0$*;*
(ii) *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $v \in V$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$*;*
(iii) *per ogni* v, $w \in V$, $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Se $\| \ \|$ *è una norma su* V*, la coppia* $(V, \| \ \|)$ *si chiama* spazio normato.

Il seguente enunciato stabilisce la corrispondenza tra norme su V e distanze con particolari proprietà. La dimostrazione, molto semplice, è lasciata al lettore.

Proposizione 6.15. *Sia* $\| \cdot \|$ *una norma su uno spazio vettoriale* V. *Allora*

$$d(v, w) = \|v - w\| \qquad v, \, w \in V$$

è un distanza su V*, detta distanza indotta dalla norma data, che gode delle ulteriori proprietà:*

(a) *(1–omogeneità) per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* v, $w \in V$, $d(\lambda v, \lambda w) = |\lambda| d(v, w)$*;*
(b) *(invarianza per traslazioni) per ogni* v, w, $z \in V$, $d(v + z, w + z) = d(v, w)$.

Viceversa, ogni distanza d su V che soddisfi le proprietà (a) e (b) è indotta da una norma, data da

$$\|v\| = d(v,0) \ .$$

Esempi di distanze indotte da norme sono le distanze d_p su $\mathbb{R}^n$ del § 8.1 del Capitolo 5, nonché la distanza del sup definita dalla formula (3.1) su $B(E)$.
In analogia a quanto avviene per le somme numeriche, la somma di una serie $\sum_0^\infty v_n$ di elementi di uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ si definisce come il limite, se esiste, della successione delle somme parziali

$$s_n = v_0 + \cdots + v_n$$

rispetto alla distanza su V indotta dalla norma $\|\cdot\|$.

Definizione 6.16 (**Somma di una serie convergente**). *La serie $\sum_0^\infty v_i$ si dice convergente se la successione (s_n) delle sue somme parziali converge. In tal caso si pone*

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} v_i \ .$$

Nello studio delle serie numeriche, è particolarmente importante il criterio di convergenza assoluta. Ci si può domandare se vale, per serie in spazi normati, un analogo criterio di *convergenza totale*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|v_n\| < +\infty \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n \ \text{ converge.}$$

La risposta è positiva, a condizione che lo spazio normato $(V, \|\cdot\|)$ sia completo. Anzi, come ora vedremo, la validità dell'implicazione “convergenza totale $\Rightarrow$ convergenza” è equivalente alla completezza dello spazio.

Teorema 6.17. *Sia $(V, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato. Le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) *rispetto alla distanza $d(v, v') = \|v - v'\|$ indotta dalla norma $\|\ \|$, (V, d) è completo;*
(ii) *data comunque una successione (v_n) di elementi di V tale che $\sum_0^\infty \|v_n\| < +\infty$, la serie $\sum_0^\infty v_n$ converge a un elemento di V.*

Dimostrazione. Supponiamo che valga la condizione (i) e sia (v_n) tale che $\sum_0^\infty \|v_n\| < +\infty$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste dunque $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > m \geq n_0$, $\|v_{m+1}\| + \cdots + \|v_n\| < \varepsilon$. Posto $s_n = v_0 + \cdots + v_n$, si ha allora

$$d(s_n, s_m) = \|s_n - s_m\| = \|v_{n+1} + \cdots + v_m\| \leq \|v_{n+1}\| + \cdots + \|v_m\| < \varepsilon \ ,$$

per n, $m \geq n_0$. Per la completezza di V, si ha la convergenza delle somme s_n a un elemento di V. Questo dimostra l'implicazione (i)$\Rightarrow$(ii).
Supponiamo ora che valga la condizione (ii), e sia (v_n) una successione di Cauchy in V rispetto alla distanza indotta dalla norma. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste allora un indice $n(k)$ tale che

$$\forall\, n,\, m \geq n(k) \qquad \|v_n - v_m\| < \frac{1}{2^k} \ .$$

Sostituendo se necessario $n(k)$ con $1 + \max\{n(i) : \ 0 \leq i \leq k\}$ possiamo supporre la successione degli indici $n(k)$ sia crescente, quindi $n(k) \to \infty$ per $k \to \infty$. Allora

$$\|v_{n(k+1)} - v_{n(k)}\| < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ .$$

Definiamo allora (w_k) nel modo seguente:

$$w_k = \begin{cases} v_{n(0)} & k = 0 \ , \\ v_{n(k)} - v_{n(k-1)} & k \geq 1 \ . \end{cases}$$

Siccome stiamo assumendo la condizione (ii), possiamo concludere che la serie $\sum_0^\infty w_k$ converge in V. Ma la somma parziale k–esima di questa serie è

$$\sum_{i=0}^{k} w_i = v_{n(k)} \ ,$$

per cui la sottosuccessione $(v_{n(k)})$ della successione data converge.
Possiamo allora concludere che (v_n) converge, dunque V è completo, sfruttando il fatto che ogni successione di Cauchy in uno spazio metrico che abbia una sottosuccessione convergente è essa stessa convergente. Infatti, preso $\varepsilon > 0$, esistono:

- un indice n_0 tale che $d(v_n, v_m) < \varepsilon/2$ per ogni n, $m \geq n_0$;
- un indice k_0 tale che, detto v il limite della sottosuccessione $(v_{n(k)})$, $d(v, v_{n(k)}) < \varepsilon/2$ per ogni $k \geq k_0$.

Allora, se $k \geq k_0$ è scelto in modo tale che $n(k) \geq n_0$ (si ricordi che $n(k) \to \infty$, quindi una tale scelta è possibile), si ha, per $n \geq n_0$,

$$d(v, v_n) \leq d(v, v_{n(k)}) + d(v_{n(k)}, v_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

□

Corollario 6.18 (**Criterio di Weierstrass e continuità di una serie**). *Sia (f_n) una successioni di funzioni a valori reali definite su un insieme E, e si supponga che:*

(i) *per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una costante $M_n \geq 0$ tale che*

$$\big|f_n(x)\big| \leq M_n \qquad \forall x \in E \ ;$$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$.

Allora la serie $\sum_0^\infty f_n$ converge uniformemente su E. In particolare, se le funzioni f_n sono continue rispetto a una data topologia τ su E, anche la somma della serie $\sum_0^\infty f_n$ è continua rispetto a τ.

Dimostrazione. Per ipotesi, le funzioni f_n sono in $B(E)$ e

$$\|f_n\| = \sup_{x \in E} \big|f_n(x)\big| \leq M_n \ .$$

Quindi $\sum_0^\infty \|f_n\| < +\infty$. Per il Teorema 6.9, $B(E)$ è completo e la prima parte della tesi segue allora dal Teorema 6.17. La continuità della serie, se le f_n sono continue, segue dalla continuità delle somme parziali e dal Corollario 6.10. □

Sulla retta reale, e senza ipotesi di limitatezza, si ha anche il seguente corollario del Teorema 6.13.

Teorema 6.19 (**Derivabilità di una serie**). *Sia (f_n) una successioni di funzioni derivabili su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e si supponga che*

(i) *la serie derivata $\sum_0^\infty f_n'$ converga uniformemente sui compatti di I;*
(ii) *esista un punto $x_0 \in I$ tale che $\sum_0^\infty f_n(x_0)$ converga.*

Allora la serie $\sum_0^\infty f_n$ *converge uniformemente sui compatti di* I*, la somma della serie è derivabile e si ha*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\Big)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) \qquad \forall x \in I \ .$$

6. Serie di potenze

Si chiama *serie di potenze* una serie di funzioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots \ ,$$

dove i coefficienti a_n sono valori assegnati[10]. Il punto x_0 si chiama il *centro* della serie.
Nella prima parte della trattazione, studieremo le serie di potenze in campo complesso, assumendo che sia i coefficienti a_n, sia il centro x_0, sia la variabile x appartengono a $\mathbb{C}$. L'uso dei simboli z, z_0, invece di x, x_0, aiuterà a ricordare che si è in ambito complesso.
Osserviamo preliminarmente che il contenuto dei paragrafi precedenti di questo capitolo si applica senza modifiche a funzioni a valori complessi, intendendo la convergenza puntuale (risp. uniforme) come convergenza puntuale (risp. uniforme) delle parti reali e immaginarie. Se poi si lavora con funzioni limitate, la definizione degli spazi $B(E)$ e $C(E)$ si generalizza immediatamente gli spazi $B(E, \mathbb{C})$ e $C(E, \mathbb{C})$, usando la distanza di $\mathbb{C}$ invece di quella euclidea su $\mathbb{R}$. Come già osservato varie volte, tutte le questioni di continuità e derivabilità si trattano facilmente applicando i teoremi validi per funzioni a valori reali alle singole componenti.
Il cambiamento di variabile $z = w - c$ trasforma una serie di potenze centrata in z_0 in una serie di potenze, nella variabile w, centrata in $w_0 = z_0 + c$. Per questo motivo enunceremo alcuni risultati generali solo per serie di potenze *centrate in* 0, cioè della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ . \tag{6.1}$$

È evidente che la serie (6.1) converge per $z = 0$ (in generale nel suo centro), e la sua somma dà a_0.
È ben possibile che il centro sia l'unico punto di convergenza di una serie di potenze. Si prenda ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \ .$$

Se $z \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} |n^n z^n| = \lim_{n\to\infty} |nz|^n = +\infty \ ,$$

e la serie non può dunque convergere.
Indichiamo con E l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ in cui la serie converge. Il lemma che segue è alla base della descrizione delle proprietà di E.

Lemma 6.20 (**Convergenza puntuale e assoluta delle serie**). *Si supponga che la serie* (6.1) *converga in un punto* $z_0 \neq 0$*. Allora essa converge assolutamente in ogni punto* z *con* $|z| < |z_0|$ *e uniformemente su ogni disco chiuso di centro* 0 *e raggio* $r < |z_0|$.

[10] Per $n = 0$ bisogna convenire che $(x - x_0)^0 = 1$ anche per $x = x_0$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$, segue che $\lim_{n\to 0} a_n z_0^n = 0$ e dunque che esiste una costante $M > 0$ tale che $|a_n z_0^n| \le M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se $|z| < |z_0|$, si ha allora

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \le M\left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n .$$

La serie geometrica di ragione $|z|/|z_0| < 1$ converge e dunque si ha la prima parte della tesi.
La seconda parte della tesi si ricava facilmente, perché la disuguaglianza ottenuta dimostra anche che

$$|a_n z^n| \le M\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n \qquad \text{per ogni } z \text{ con } |z| \le r .$$

Basta dunque applicare il criterio di Weierstrass. □

Sia dunque

$$E = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\} . \tag{6.2}$$

Il seguente enunciato segue facilmente dal Lemma 6.20.

TEOREMA 6.21 (**Raggio di convergenza di una serie**). *Sia*

$$R = \sup_{z\in E} |z| \in [0, +\infty] .$$

Allora ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < R$ appartiene a E. In particolare,

(i) *se $R = 0$, $E = \{0\}$;*
(ii) *se $R = +\infty$, $E = \mathbb{C}$;*
(iii) *se $0 < R < +\infty$, indicando con $D_R \subset \mathbb{C}$ il disco aperto di centro 0 e raggio R,*

$$D_R \subseteq E \subseteq \overline{D_R} ,$$

e la serie converge uniformemente sui compatti di D_R.

La dimostrazione del seguente enunciato è lasciata per esercizio.

PROPOSIZIONE 6.22. *Siano $\sum_0^{\infty} a_n z^n$ e $\sum_0^{\infty} b_n z^n$ due serie di potenze centrate in 0 con raggi di convergenza R e R'. Allora la loro somma e il loro prodotto alla Cauchy hanno raggi di convergenza maggiori o uguali a $\min\{R, R'\}$. Nel caso della somma vale l'uguaglianza se $R \ne R'$.*

Il raggio di convergenza è esprimibile come funzione dei coefficienti della serie.

PROPOSIZIONE 6.23. *Data la serie (6.1), sia*

$$\ell = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty] .$$

Allora

$$R = \frac{1}{\ell} ,$$

con la convenzione che $1/0 = +\infty$ e $1/(+\infty) = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $z \ne 0$. Allora

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |z|\ell .$$

Per il criterio della radice, la serie converge se $|z|\ell < 1$ e non converge se $|z|\ell > 1$. La conclusione si deduce facilmente. □

Sia $\sum_0^\infty a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Chiamiamo $f(z)$ la funzione somma, definita sull'insieme di convergenza E in (6.2).

TEOREMA 6.24. *La funzione f è continua su D_R.*

DIMOSTRAZIONE. Per la convergenza uniforme della serie sui compatti di D_R, f è continua su ognuno di tali compatti. Ovviamente questo è equivalente alla continuità su D_R. □

7. Derivabilità sull'asse reale

Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, dove la serie ha raggio di convergenza $R > 0$. Restringiamo f a $D_R \cap \mathbb{R} = (-R, R)$, e discutiamone la derivabilità. Per far questo consideriamo la serie derivata

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \ . \tag{7.1}$$

TEOREMA 6.25 (Derivabilità di una serie di potenze). *La serie (7.1) ha raggio di convergenza R. Quindi f è derivabile su $(-R, R)$ e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \forall x \in (-R, R) \ .$$

DIMOSTRAZIONE. Le due serie $\sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ e $\sum_1^\infty n a_n x^n$ convergono per gli stessi valori di x. Calcoliamo dunque

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\big) \big(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\big) = \frac{1}{R} \ .$$

La conclusione segue dalla convergenza uniforme sui compatti di $(-R, R)$ di entrambe le serie e dal Teorema 6.19. □

Iterando l'applicazione di questo teorema alle derivate successive, si ottiene:

COROLLARIO 6.26. *La funzione f è di classe C^∞ su $(-R, R)$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} \qquad \forall x \in (-R, R) \ .$$

Più in generale, per serie di potenze centrate in x_0 con raggio di convergenza R, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+k)(m+k-1)\cdots(m+1) a_{m+k} (x-x_0)^m \end{aligned} \tag{7.2}$$

per ogni $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

Esempi.

(1) La serie $\sum_1^\infty x^n/n$ ha raggio di convergenza $R = 1$. Se $f(x)$ è la sua somma, si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x} \ . \tag{7.3}$$

Pertanto f è una primitiva di $1/(1-x)$ sull'intervallo $(-1,1)$, ossia esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = -\log(1-x) + c$. Ma $c = f(0) = 0$, e dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x) \qquad \forall x \in (-1,1) \ .$$

(2) In modo analogo si dimostra che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x \qquad \forall x \in (-1,1) \ ,$$

usando il fatto che il raggio di convergenza della serie è 1. Usando il Lemma di Abel, vedremo che la validità di questa formula si può estendere fino a $x = 1$, ottenendo la formula notevole

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots = \frac{\pi}{4} \ .$$

8. Serie di Taylor e funzioni analitiche

Sia f una funzione definita in un intervallo I, derivabile infinite volte in un punto $x_0 \in I$. La *formula di Taylor con resto di Peano* è dunque applicabile a ogni ordine $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \qquad (x \to x_0) \ .$$

Si può quindi costruire la *serie di Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

e domandarsi se essa converge, almeno in un intorno di x_0, alla funzione f. La risposta è in generale negativa per due motivi:

- la serie può avere raggio di convergenza nullo;
- la serie può avere raggio di convergenza positivo, ma convergere a una funzione diversa da f.

Un esempio esplicito mostra che si può presentare la seconda possibilità. Si prenda

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \ , \\ 0 & \text{se } x = 0 \ . \end{cases} \tag{8.1}$$

Si vede facilmente che f è continua anche in $x_0 = 0$. Dimostriamo per induzione che f ha derivate di ogni ordine su $\mathbb{R}$ e che $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni n.
Per prima cosa si verifica facilmente, sempre per induzione, che f è C^∞ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e che, per $x \neq 0$,

$$f^{(n)}(x) = p_n\Big(\frac{1}{x}\Big) e^{-1/x^2} \ ,$$

dove i p_n sono opportuni polinomi[11]. Allora, assumendo come ipotesi induttiva che $f^{(n)}(0) = 0$, si

[11] La relazione ricorsiva tra i polinomi è: $p_0(t) = 1$, $p_{n+1}(t) = 2t^3 p_n(t) - t^2 p_n'(t)$.

ha che

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t\to\pm\infty} tp_n(t)e^{-t^2} = 0 \ ,$$

perché, per ogni $k > 0$,

$$e^{-t^2} = o(e^{-|t|}) = o(|t|^{-k}) \qquad (t \to \pm\infty) \ .$$

Quindi la serie di Taylor di f centrata in 0 ha tutti i termini identicamente nulli. Dunque ha raggio di convergenza infinito ma non converge a $f(x)$ per $x \neq 0$.

Che la prima possibilità (raggio di convergenza nullo della serie di Taylor) sia concreta si ricava dal seguente teorema, che sar dimostrato in un successivo paragrafo.

TEOREMA 6.27 (**Teorema di Borel**). *Data una qualunque successione (a_n) di numeri reali, esiste una funzione f di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ tale che $f^{(n)}(0) = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Queste considerazioni motivano la seguente definizione.

DEFINIZIONE 6.28 (**Funzioni analitiche**). *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ si dice analitica sull'intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in I$ la serie di Taylor di f centrata in x_0 converge a f in un intervallo $(x_0 - r, x_0 + r) \subseteq I$ con $r > 0$.*

L'esempio della funzione e^{-1/x^2} mostra che non tutte le funzioni C^∞ sono analitiche (la proprietà fallisce, come abbiamo visto, per $x_0 = 0$). Una definizione apparentemente più debole, ma equivalente, di funzione analitica consiste nel richiedere che per ogni $x_0 \in I$ la funzione coincida in un intervallo $(x_0 - r, x_0 + r)$ con la somma di *una* serie di potenze centrata in x_0. Infatti il teorema di derivabilità delle serie, e in particolare la formula (7.2), implicano che $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$, quindi se c'è una serie per la quale questa proprietà vale, questa è quella di Taylor. Per lo stesso motivo, mentre il teorema di Borel implica che non vi è restrizione alcuna sulla successione $f^{(n)}(x_0)$, con f di classe C^∞, lo stesso non vale per funzioni analitiche: dovendo essere il raggio di convergenza positivo, dovrà essere[12]

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}} < +\infty.$$

Usando le corrispondenti proprietà delle serie, è facile mostrare che l'insieme delle funzioni analitiche è un'algebra, i.e. le funzioni analitiche sono stabili per somma e prodotto. Meno facilmente si dimostra anche (ma non ne diamo qui la dimostrazione) che sono analitiche composte e inverse di funzioni analitiche, ove definite.

Le funzioni analitiche godono di proprietà sorprendenti (e ancora di più nell'ambito complesso, che non tratteremo). Una di queste è la seguente proprietà di unicità del prolungamento, se analitico, da un intervallo J a un intervallo $I \supseteq J$.

PROPOSIZIONE 6.29 (**Unicità del prolungamento analitico**). *Se due funzioni analitiche f, g in un intervallo aperto I coincidono su un intervallo $J \subseteq I$, allora $f \equiv g$ in tutto l'intervallo I.*

Dedurremo il principio del prolungamento analitico applicando la proposizione seguente, che riguarda gli insiemi di livello delle funzioni analitiche, alla differenza $f - g$, con $c = 0$. In una formulazione più forte, basta che $\{x \in I : \ f(x) = g(x)\}$ abbia un punto di accumulazione in I per avere $f \equiv g$

[12]Usando la formula di Stirling si ha $(n!)^{1/n}/(n/e) \to 1$ per $n \to \infty$, quindi la condizione equivale a $\limsup_n \sqrt[n]{|f^{(n)}(x_0)|}/n < +\infty$.

in I. Ovviamente il principio non vale per funzioni "solo" di classe C^∞, basta prendere ad esempio come f questa variante, ancora di classe C^∞, dell'esempio (8.1)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } x > 0 \ , \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \ , \end{cases}$$

e come g la funzione identicamente nulla. Il principio può essere dedotto, per differenza, dalla seguente proposizione:

Proposizione 6.30 (**Insiemi di livello di funzioni analitiche**). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ analitica. Allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$, o l'insieme di livello*

$$\{x \in I : \ f(x) = c\}$$

è discreto in I (i.e. privo di punti di accumulazione in I) o f è identicamente uguale a c.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo supporre $c = 0$.
Supponiamo che l'insieme $E = f^{-1}(0)$ abbia un punto di accumulazione $x_0 \in I$. Essendo E chiuso, $x_0 \in E$. Sia $\sum_{n=1}^\infty a_n(x-x_0)^n$ la serie di Taylor di f, convergente a $f(x)$ per $x \in (x_0-r, x_0+r) \subseteq I$. Se i coefficienti a_n sono tutti nulli allora $f = 0$ su $(x_0 - r, x_0 + r)$. Altrimenti esiste un minimo intero, che indichiamo come n_0, il cui corrispondente coefficiente sia diverso da 0. Abbiamo dunque, per $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$,

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^\infty a_n(x - x_0)^n = (x - x_0)^{n_0} \sum_{k=0}^\infty a_{n_0+k}(x - x_0)^k = (x - x_0)^{n_0} g(x) \ ,$$

dove $g(x) = \sum_{k=0}^\infty a_{n_0+k}(x - x_0)^k$ su $(x_0 - r, x_0 + r)$ e $g(x_0) = a_{n_0} \neq 0$. Essendo g continua in x_0, per la permanenza del segno esiste un intorno $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta \leq r$, su cui $g(x) \neq 0$. Allora, per $x \in U \setminus \{x_0\}$, si ha $f(x) \neq 0$, da cui segue un assurdo essendo x_0 di accumulazione per E.
Quindi i coefficienti a_n sono tutti nulli e f è identicamente nulla su $(x_0 - r, x_0 + r)$. Consideriamo allora la famiglia $\mathcal{I}$ degli intervalli aperti contenenti x_0 e su cui $f = 0$ identicamente. La loro unione I' è pure un intervallo aperto ed è il massimo di $\mathcal{I}$.
Supponiamo per assurdo che $I' \subsetneq I$. Allora almeno uno tra $\sup I'$ e $\inf I'$ appartiene a I. Sia per esempio $\sup I' = x_1 \in I$. Essendo $I' \subseteq E$, x_1 è di accumulazione per E e si può ripetere l'argomento precedente per concludere che $f = 0$ su un intervallo (x_1-r', x_1+r'), contro l'ipotesi di massimalità di I'. Concludiamo allora che $f = 0$ su tutto I. □

Possiamo ora mostrare che le serie di potenze sono analitiche all'interno del loro dominio di convergenza. Come conseguenza di questo teorema abbiamo una terza definizione equivalente di funzione analitica: nell'intorno di ogni punto x_0 del dominio la funzione coincide con una serie di potenze (non necessariamente centrata in x_0).

Teorema 6.31 (**Le serie di potenze danno funzioni analitiche**). *Sia $\sum_0^\infty a_n x^n$ una serie di potenze centrata in 0 con raggio di convergenza $R > 0$ e sia $f(x)$ la sua somma. Allora f è analitica in $(-R, R)$.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che per ogni $x_0 \in (-R, R)$ la funzione f coincide con una serie di potenze centrata in x_0, in un intervallo I_{x_0} centrato in x_0. Per come è definita f, questo è ovvio per $x_0 = 0$ e possiamo prendere $I_0 = (-R, R)$.

Prendiamo ora un generico punto $x_0 \in (-R, R)$. Per il Corollario 6.26, f è di classe C^∞ su $(-R, R)$ e la serie di Taylor di f centrata in x_0 è

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}(m+k)\cdots(m+1)a_{m+k}x_0^m\Big)(x-x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+k}{k}a_{m+k}x_0^m\right)(x-x_0)^k \ .
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

Consideriamo la sommatoria su $\mathbb{N}^2$ a termini positivi

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{N}^2}\binom{m+k}{k}|a_{m+k}||x_0|^m|x-x_0|^k \ ,$$

e partizioniamo $\mathbb{N}^2$ negli insiemi $E_p = \big\{(m,k) : \ m+k=p\big\}$. Si ha

$$\sum_{(k,m)\in E_p}\binom{m+k}{k}|a_{m+k}||x_0|^m|x-x_0|^k = |a_p|\big(|x_0|+|x-x_0|\big)^p \ ,$$

e, per il Teorema 4.18 del Capitolo 4,

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{N}^2}\binom{m+k}{k}|a_{m+k}||x_0|^m|x-x_0|^k = \sum_{p=0}^{\infty}|a_p|\big(|x_0|+|x-x_0|\big)^p \ .$$

Quest'ultima serie converge per $|x_0|+|x-x_0|<R$, condizione che individua il massimo intervallo centrato in x_0 e contenuto in $(-R,R)$. Chiamiamo $I_{x_0} = (x_0-R+|x_0|, x_0+R-|x_0|)$ tale intervallo (che ha sempre un estremo in comune con $(-R,R)$). Dunque per $x \in I_{x_0}$ la sommatoria

$$\sum_{(k,m)\in\mathbb{N}^2}\binom{m+k}{k}a_{m+k}x_0^m(x-x_0)^k$$

converge, e pertanto la serie di Taylor (8.2) può essere ricombinata come serie in p delle sommatorie sugli insiemi E_p. Ma

$$\sum_{(k,m)\in E_p}\binom{m+k}{k}a_{m+k}x_0^n(x-x_0)^k = a_p x^p \ ,$$

per cui concludiamo che, per $x \in I_{x_0}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{p=0}^{\infty}a_p x^p = f(x) \ . \qquad \square$$

Osservazione 6.32. La condizione di analiticità nella Definizione 6.28 può essere espressa nel seguente modo equivalente:
Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice analitica sull'intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ se per ogni $x_0 \in I$ esiste una serie di potenze centrata in x_0 convergente a f in un intervallo $(x_0-r, x_0+r) \subseteq I$ con $r>0$.

L'equivalenza segue dal fatto che se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ su un intorno di x_0, necessariamente f è C^∞ su tale intorno e $a_n = f^{(n)}(x_0)/n!$ per la (7.2).

In questa forma la definizione può essere estesa al campo complesso, per funzioni $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ con A aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione analitica in senso complesso si dice anche *olomorfa*. Si noti che non sono olomorfe $f(z) = \bar{z}$ né polinomi in z e $\bar{z}$ in cui $\bar{z}$ compaia in almeno un monomio.

Le Proposizioni (6.29) e (6.30) si estendo al caso complesso sostituendo l'intervallo I con un aperto connesso A e J con un sottoinsieme aperto di A. Il Teorema 6.31 si estende senza modifiche.

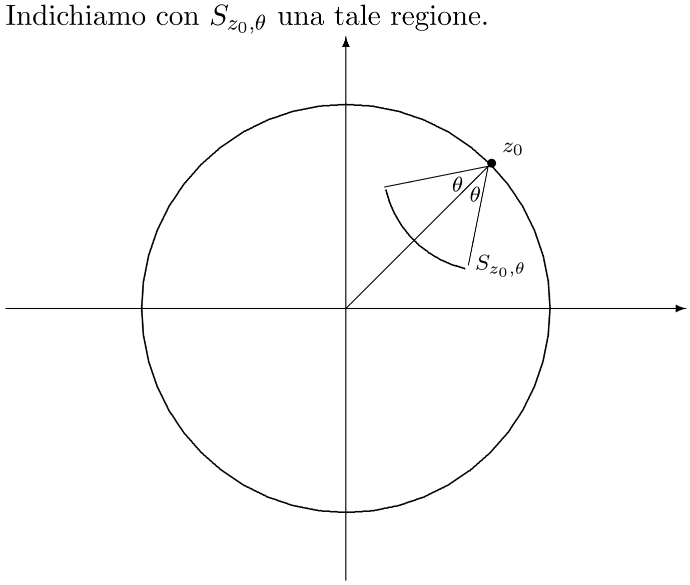
9. Complementi

9.1. *Convergenza in punti del bordo del cerchio di convergenza. [13]

Sia $\sum_0^\infty a_n z^n$ una serie di potenze di raggio R centrata in 0, con R finito e strettamente positivo. Supponiamo che in un dato punto z_0 con $|z_0| = R$ la serie converga. Il Teorema 6.24 non dice nulla sulla continuità della funzione somma in z_0.
Per esempio, sappiamo che la *serie logaritmica* (7.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

converge in $[-1,1)$ e che la somma è uguale a $-\log(1-x)$ per $x \in (-1,1)$. Non possiamo però dire se, per $x = -1$, la somma della serie (cioè della serie armonica a segni alterni con primo termine negativo) è uguale a $-\log 2$. Per ottenere questa conclusione, ci basterebbe sapere che la serie converge uniformemente su un intervallo comprendente il punto -1, diciamo su $[-1,0]$: in tal caso, infatti, entrambi i membri sarebbero restrizioni di funzioni continue su $[-1,1)$ che, coincidendo in $(-1,1)$, dovrebbero anche coincidere nel punto -1.
Vedremo in questo paragrafo che il lemma di Abel garantisce che convergenza in z_0 implica convergenza uniforme su certi sottoinsiemi chiusi del disco $D_R(z_0)$ detti *non tangenziali*. In particolare dedurremo la convergenza uniforme sul segmento chiuso congiungente 0 a z_0, che ci dà l'enunciato del lemma di Abel nel caso reale. Con vertice in z_0, si consideri un angolo di ampiezza $2\theta < \pi$, avente per bisettrice il raggio congiungente 0 a z_0 e troncato in modo da non contenere punti di modulo R all'infuori di z_0. Non è importante come si effettua il troncamento, perché la differenza tra due regioni così costruite per lo stesso valore di θ è comunque un sottoinsieme compatto del disco aperto $D_R(z_0)$, e su di esso si ha già la convergenza uniforme della serie per il Teorema 6.21.
Indichiamo con $S_{z_0,\theta}$ una tale regione.



[13] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

Teorema 6.33 (**Lemma di Abel**). *Sia $R \in (0, +\infty)$ il raggio di convergenza della serie $\sum_0^\infty a_n z^n$, e si supponga che essa converga in un punto z_0 con $|z_0| = R$. Allora essa converge uniformemente in ogni regione $S_{z_0,\theta}$, con $0 \le \theta < \pi/2$.*[14]

Dimostrazione. Il cambiamento di variabile $z = z_0 w$ trasforma la serie data nella serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n w^n$$

nella variabile w. Essa converge in un punto w se e solo se la serie data converge in $z_0 w$. Dunque ha raggio di convergenza 1 e converge per $w = 1$. Inoltre essa converge uniformemente su un insieme A se e solo se la serie data converge uniformemente sull'insieme $z_0 A = \{z_0 w : \ w \in A\}$. In questo modo possiamo ricondurre la dimostrazione del teorema al caso particolare in cui la serie $\sum_0^\infty a_n z^n$ abbia raggio di convergenza $R = 1$ e il punto di convergenza sul bordo sia $z_0 = 1$. Lavoreremo nella regione

$$S_{1,\theta} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \ z = 1 - re^{i\varphi}, \ 0 \le r \le \frac{1}{2}, \ \varphi \in (-\theta, \theta) \right\} . \tag{9.1}$$

Un'altra semplificazione della dimostrazione consiste nel ridursi al caso in cui il valore della somma in $z_0 = 1$ è uguale a 0, cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0 \ .$$

Ciò si ottiene modificando opportunamente il coefficiente iniziale a_0. Questa variazione non altera gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della serie.
Assumendo dunque queste ipotesi, poniamo $E = D_1 \cup \{1\}$ e

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ , \qquad s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ , \qquad A_n = s_n(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \ .$$

Sommando e sottraendo si ha (formula di sommazione di Abel)

$$\begin{aligned} s_n(z) = a_0 + & \\ & (a_0 + a_1)z - a_0 z + \\ & (a_0 + a_1 + a_2)z^2 - (a_0 + a_1)z^2 + \\ & \dots \\ & (a_0 + a_1 + \dots + a_n)z^n - (a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})z^n \ . \end{aligned}$$

Quindi, raggruppando per diagonali, otteniamo

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (z^k - z^{k+1}) + A_n z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \ . \tag{9.2}$$

Si ottiene dall'identità (9.2) e dall'inclusione $E \subseteq \overline{D}_1$, tenendo conto del fatto che A_n è infinitesima, che

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (z^k - z^{k+1}) = \lim_{n \to \infty} \left(s_n(z) - A_n z^n \right) = s(z) \qquad \forall z \in E \ .$$

[14]Restringendosi alla retta reale, l'enunciato è più semplice: ogni serie di potenze converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto nell'insieme di convergenza puntuale.

Quindi per ogni $z \in E$ vale

$$\begin{aligned}
|s(z) - s_n(z)| &= \Big| \sum_{k=0}^{\infty} A_k(z^k - z^{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} A_k(z^k - z^{k+1}) \; - A_n z^n \Big| \\
&= \Big| \sum_{k=n}^{\infty} A_k(z^k - z^{k+1}) \; - A_n z^n \Big| \\
&\leq \sum_{k=n}^{\infty} |A_k||z^k - z^{k+1}| \; + |A_n| \; .
\end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$, si fissi $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $|A_n| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Si ha allora, per $n \geq n_0$ e $z \in E$,

$$|s(z) - s_n(z)| \leq \varepsilon \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |z^k - z^{k+1}| \; + 1 \Big) \leq \varepsilon \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |z^k - z^{k+1}| \; + 1 \Big) \; .$$

Restringiamoci ora a $z \in S_{1,\theta}$ con $\theta < \pi/2$. Poiché i punti di $S_{1,\theta}$, tranne il punto 1, hanno modulo strettamente minore di 1, si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z^k - z^{k+1}| = \sum_{k=0}^{\infty} |1 - z||z|^k = \begin{cases} 0 & \text{se } z = 1 \; , \\ \dfrac{|1-z|}{1-|z|} & \text{se } z \in S_{1,\theta} \setminus \{1\} \; . \end{cases}$$

Dunque, per $n \geq n_0$,

$$\sup_{z \in S_{1,\theta}} |s(z) - s_n(z)| \leq \varepsilon \Big(1 + \sup_{z \in S_{1,\theta} \setminus \{1\}} \frac{|1-z|}{1-|z|} \Big) \; .$$

La dimostrazione è conclusa se si mostra che questo estremo superiore è finito.
Posto $w = 1 - z$ per $z \in S_{1,\theta}$, segue dalla (9.1) che $|w| \leq \frac{1}{2}$ e $|\arg w| \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
|1 - z| &= |w| \\
&\leq \Re\mathrm{e}\, w + |\Im\mathrm{m}\, w| \\
&\leq (1 + \tan\theta) \Re\mathrm{e}\, w \; ,
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
1 - |z| &\geq \frac{(1 + |z|)(1 - |z|)}{2} \\
&= \frac{1 - |1 - w|^2}{2} \\
&= \frac{2\Re\mathrm{e}\, w - |w|^2}{2} \\
&\geq \frac{2\Re\mathrm{e}\, w - |w|}{2} \\
&\geq \frac{1 - \tan\theta}{2} \Re\mathrm{e}\, w \; .
\end{aligned}$$

Quindi il rapporto $|1 - z|/(1 - |z|)$ è limitato da $2(1 + \tan\theta)/(1 - \tan\theta)$ su $S_{1,\theta}$. $\square$

9.2. Formule per il resto nello sviluppo di Taylor.

Sia f una funzione di classe C^∞ in un intorno di x_0. Concretamente, il problema della convergenza a f in un intervallo I contenente x_0 della sua serie di Taylor centrata in x_0 si riduce a dimostrare che, per $x \in U$, il resto dello sviluppo di Taylor all'ordine n nel punto x_0,

$$R_n(x_0;x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \ ,$$

tende a 0 per $n \to \infty$.
In molti casi, la questione si risolve facendo uso di una delle due formule del resto $R_n(x_0;\cdot)$, la *forma di Lagrange* e la *forma integrale*. Si noti che il caso $n=0$ del punto (i) corrisponde al teorema del valor medio di Lagrange, mentre il caso $n=0$ del punto (ii) corrisponde al teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema 6.34 (**Formule del resto**). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$ e $f : I \to \mathbb{R}$.*

(i) (Resto in forma di Lagrange) *Si supponga che f sia derivabile n volte in I, con derivata n–sima continua e che, in $I \setminus \{x_0\}$, esista anche $f^{(n+1)}$. Allora, per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$, esiste un punto t_x, strettamente compreso tra x_0 e x, tale che*

$$R_n(x_0;x) = \frac{f^{(n+1)}(t_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \ .$$

(ii) (Resto in forma integrale) *Si supponga che f sia derivabile $n+1$ volte in I, con derivata $(n+1)$–sima continua in I. Allora*

$$R_n(x_0;x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \qquad \forall x \in I \ .$$

Dimostrazione. (i) L'idea è di considerare $y = x_0$ come un parametro, differenziando rispetto a y. La formula del resto si dimostra infatti applicando il teorema classico di Cauchy al rapporto

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(t_x)}{G'(t_x)} \ ,$$

ove $F(y)$ e $G(y)$ sono definite rispettivamente da

$$F(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k \ , \qquad G(y) = -(x-y)^{n+1} \ .$$

Si noti che $F(x) = f(x)$ e che $F(x_0) = \sum_0^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$, quindi $R_n(x_0;x) = F(x) - F(x_0)$ e $G(x) - G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$. Vale quindi

$$\frac{R_n(x_0;x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{F'(t_x)}{(n+1)(x-t_x)^n} \ . \tag{9.3}$$

Inoltre, per la regola di Leibniz di derivazione del prodotto, vale

$$\begin{aligned} F'(y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{k f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n \ . \end{aligned}$$

Inserendo questa formula per $F'(y)$ con $y = t_x$ nell'equazione (9.3) si ha la prima formula del resto.

(ii) Procediamo per induzione su $n \geq 0$. Per $n = 0$ l'enunciato corrisponde al teorema fondamentale del calcolo integrale. Per passare da $n-1 \geq 0$ a n integriamo prima per parti e poi usiamo l'ipotesi induttiva per ottenere

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt &= \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\Big|_{x_0}^{x} \\ &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= R_{n-1}(x_0;x) - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = R_n(x_0;x)\ .\end{aligned}$$

$\square$

Esempio. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha,$$

che è di classe C^∞ sulla semiretta $(-1, +\infty)$, qualunque sia α. Trascurando il caso $\alpha \in \mathbb{N}$, in cui f_α si riduce a un polinomio, negli altri casi non si ha prolungamento C^∞ fuori da questa semiretta. Essendo

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}\ ,$$

il resto $R_n(x_0;x)$ della formula di Taylor in forma integrale è dato da

$$R_n(x_0;x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt\ .$$

Per analogia con il caso in cui α è intero possiamo porre

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ ,$$

potendo in questo modo scrivere la serie di Taylor centrata in 0 nel modo seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\ . \tag{9.4}$$

Questa è nota come *serie binomiale*. Per $\alpha \notin \mathbb{N}$, è facile applicare il criterio del rapporto ai coefficienti della serie (9.4), ottenendo che ha raggio di convergenza 1. Per $|x| < 1$ si ha

$$\begin{aligned}\big|R_n(0;x)\big| &\leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|\left|\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt\right| \\ &= \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|\left|\int_0^x \Big(\frac{|x-t|}{1+t}\Big)^n(1+t)^{\alpha-1}\,dt\right|\ .\end{aligned}$$

Per $a > 0$ fissato, è facile studiare i problemi di massimo

$$\max_{0\leq t\leq a}\frac{|t-a|}{t+1}, \qquad \max_{-a\leq t\leq 0}\frac{|t+a|}{t+1},$$

verificando che entrambi i valori massimi sono pari a a. Quindi, applicando questa proprietà con $a = |x|$, per $x \in (-1,1)$ otteniamo

$$\big|R_n(0;x)\big| \leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n\left|\int_0^x (1+t)^{\alpha-1}\,dt\right| = \big|(1+x)^\alpha - 1\big|\left|\binom{\alpha-1}{n}\right||x|^n\ .$$

Applicando il criterio del rapporto, si ottiene che $\lim_n R_n(0;x) = 0$. Dunque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha \qquad \text{per } x \in (-1,1)\ . \tag{9.5}$$

Abbiamo qui un altro esempio di continuazione analitica oltre l'intervallo di convergenza della serie: la funzione nel membro sinistro della (9.5), definita dalla somma della serie, è analitica e definita solo nell'intervallo $(-1,1)$; d'altro canto, si verifica[15] che la funzione a destra è analitica in $I = (0,\infty)$. Dato che coincidono in $J = (0,1)$, possiamo dire che la funzione somma della serie ha un (unico) prolungamento analitico a tutto l'insieme $(-1,+\infty)$, dato dalla funzione $(1+x)^\alpha$.

9.3. *Adattabilità delle funzioni C^∞. [16]

Come le Proposizioni 6.29 e 6.30 sono espressione di una forte "rigidità" della classe delle funzioni analitiche, vediamo ora, al contrario, un esempio di "duttilità" della classe delle funzioni C^∞.

Proposizione 6.35. *Dati $0 \le a < b < \infty$, esiste una funzione f di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ tale che:*

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \textit{se } |x| \le a \\ 0 < f(x) < 1 & \textit{se } a < |x| < b \\ f(x) = 0 & \textit{se } |x| \ge b\ . \end{cases}$$

Dimostrazione. La funzione

$$h_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{se } x > 0\ , \end{cases}$$

è in $C^\infty(\mathbb{R})$, e dunque lo è anche

$$h(x) = h_0(x)h_0(1-x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \text{ o } x \ge 1 \\ e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}} & \text{se } 0 < x < 1\ . \end{cases}$$

Si consideri ora la primitiva

$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt\ .$$

Posto $c = \int_0^1 h(t)\,dt > 0$, si ha

$$\begin{cases} H(x) = 0 & \text{se } x \le 0 \\ 0 \le H(x) \le c & \text{se } 0 < x < 1 \\ H(x) = c & \text{se } x \ge 1\ . \end{cases}$$

Quindi, per $r \ge 1$, la funzione $f_r(x) = \frac{1}{c}H(r+x)H(r-x)$ soddisfa le condizioni nell'enunciato per $a = r-1, b = r$. Dati a, b arbitrari con $0 \le a < b < +\infty$, ponendo $\delta = b - a$ e $r = b/(b-a)$, la funzione $f(x) = f_r(x/\delta)$ ha le proprietà richieste. □

---

[15] Per ottenere lo sviluppo in $x_0 > -1$, basta combinare, per $x_0 > -1$, l'uguaglianza

$$(1+x)^\alpha = \big(1 + x_0 + (x - x_0)\big)^\alpha = (1+x_0)^\alpha\Big(1 + \frac{x-x_0}{1+x_0}\Big)^\alpha\ ,$$

con la (9.5). Si deduce che la serie di Taylor centrata in x_0 converge a $(1+x)^\alpha$ con raggio di convergenza $1 + x_0$.

[16] Paragrafo non nel programma di esame 2017

9.4. *Dimostrazione del Teorema di Borel. [17]

Dimostrazione del Teorema 6.27. Sia φ una funzione C^∞ che soddisfi le condizioni della Proposizione 6.35 con $a = 1/2, b = 1$.
Data la successione (a_n), costruiamo una funzione f, con $f^{(n)}(0) = a_n$ per ogni n, che sia della forma

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \varphi\big(\frac{x}{\varepsilon_n}\big) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ . \end{aligned}$$

La differenza rispetto a una serie di potenze sta nel fatto che, per $n \geq 1$, il singolo termine $\frac{a_n}{n!} x^n$ rimane inalterato sull'intervallo $[-\varepsilon_n/2, \varepsilon_n/2]$ e poi smussato in modo C^∞ fino ad annullarsi fuori dell'intervallo $(-\varepsilon_n, \varepsilon_n)$. Il problema è determinare la successione (ε_n) in modo che la serie e tutte le sue serie derivate convergano uniformemente su $\mathbb{R}$.
Una volta ottenuto ciò, si ha l'uguaglianza $f^{(m)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(m)}(0)$ per ogni m. Ma, essendo $x^n \varphi_n(x/\varepsilon_n) = x^n$ su $[-\varepsilon_n/2, \varepsilon_n/2]$, le derivate dei singoli termini in 0 si possono calcolare trascurando il fattore $\varphi_n(x/\varepsilon_n)$. Si ottiene così che $f^{(m)}(0) = a_m$ per ogni m.
Per valutare la grandezza dei singoli termini della serie e delle loro derivate, consideriamo, per generici valori di $m, n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon \in (0,1)$, l'espressione

$$\psi_{m,n,\varepsilon}(x) = \frac{d^m}{dx^m}\Big(\frac{x^n}{n!}\varphi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\Big) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \varepsilon^{-k} \varphi^{(k)}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big) \ .$$

Per $|x| \geq \varepsilon$ ogni addendo è nullo, mentre per $|x| < \varepsilon$,

$$\big|\psi_{m,n,\varepsilon}(x)\big| \leq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{(n-k)!} \varepsilon^{n-2k} \|\varphi^{(k)}\| \ .$$

Quindi, se $n \geq 2m+1$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\psi_{m,n,\varepsilon}\| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{1}{(n-k)!} \varepsilon^{n-2k} \|\varphi^{(k)}\| = 0 \ .$$

Per ogni n è dunque possibile scegliere ε_n sufficientemente piccolo in modo da avere

$$\big\|f_n^{(m)}\big\| = |a_n| \|\psi_{m,n,\varepsilon_n}\| < 2^{-n} \ , \qquad \forall\, m \leq \frac{n-1}{2} \ .$$

Per il criterio di Weierstrass, questo implica, per ogni ordine di derivazione m, la convergenza uniforme della serie

$$\sum_{n=2m+1}^{\infty} f_n^{(m)} \ ,$$

e dunque della serie completa delle derivate m-esime. $\square$

Si noti che, per una successione (a_n) con $\limsup_{n\to\infty} |a_n/n!|^{\frac{1}{n}} = +\infty$, questa costruzione produce sicuramente valori ε_n arbitrariamente vicini a 0. Se fosse infatti $\inf \varepsilon_n = \bar{\varepsilon} > 0$, la serie $\sum_n (a_n/n!) x^n$ convergerebbe su $[-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$, il che è assurdo.

[17] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2017

9.5. Alcune serie notevoli.

Elenchiamo alcune serie di potenze (centrate in 0) di particolare rilevanza, con l'espressione della funzione somma e il relativo raggio di convergenza.

TABELLA 1. Alcune serie di uso frequente

	serie	*somma*	raggio di c.
1	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$	e^x	∞
2	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\sin x$	∞
3	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$\cos x$	∞
4	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\sinh x$	∞
5	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$\cosh x$	∞
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$\log(1+x)$	1
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$	$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$	1
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$\operatorname{arctg} x$	1
9	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$(1+x)^\alpha$	$1 \ (\alpha \notin \mathbb{N})$
10	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n} \binom{2n}{n} x^{2n+1}$	$\arcsin x$	1

CAPITOLO 7

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

1. Funzioni continue da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

Si consideri una funzione $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$, con $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e siano $f_1, \dots, f_m : E \longrightarrow \mathbb{R}$ le sue componenti scalari, tali cioè che

$$f(x) = \big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \ .$$

La nozione di continuità di f in un punto di E rientra nella Definizione 5.31. Sulla base della Proposizione 5.19 e del Teorema 5.41, punto (ii), possiamo affermare quanto segue.

Proposizione 7.1. *La funzione $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ è continua in $x_0 \in E$ se e solo se ciascuna delle sue componenti scalari f_k, $1 \le k \le m$, è continua in x_0.*

Valgono per le funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ i teoremi sulla continuità delle funzioni somma prodotto, reciproco di funzioni continue come nel caso $n = 1$. Ricordiamo poi la Proposizione 5.36 sulla continuità della funzione composta.
Con questi strumenti si dimostrano facilmente le seguenti proprietà.

- Se $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora la funzione
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)$$
è continua su $E \times \mathbb{R}^{n-1}$; segue che ogni funzione della forma
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) \ ,$$
con f_j continua su $E_j \subseteq \mathbb{R}$, è continua su $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.
- Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua, fissati $x_2, \dots, x_n$, la funzione
$$f(t) = F(t, x_2, \dots, x_n)$$
è continua su $\{t : (t, x_2, \dots, x_n) \in E\} \subseteq \mathbb{R}$.

la continuità di funzioni di più variabili definite in termini di funzioni elementari, per esempio

$$f(x, y, z) = \exp\Big(\frac{x + \sin y}{1 + y^2 + z^2}\Big) \ .$$

In situazioni diverse, la determinazione della continuità di una funzione può presentare aspetti problematici, e tentativi di riduzione a metodi "di una variabile" possono dar luogo a conclusioni sbagliate.
Partiamo da questa semplice conseguenza della Proposizione 5.36: *se f è una funzione a valori reali, continua su $E \subseteq \mathbb{R}^n$, e $\gamma : I \longrightarrow E$ è una curva, allora $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua.* In particolare, se prendiamo $\gamma_{x_0,v}(t) = x_0 + tv$, parametrizzazione affine della retta passante per x_0 e parallela al vettore v, la funzione

$$g(t) = f(x_0 + tv) \ ,$$

è continua sull'insieme $\{t : x_0 + tv \in E\}$. Con un abuso di linguaggio, diremo che g è la restrizione di f alla retta data.
Mostriamo ora con un esempio in due variabili che *una funzione può avere restrizioni continue a tutte le rette senza essere tuttavia continua.*

Esempio. Partiamo da una funzione $\varphi(t)$ continua su $\mathbb{R}$, nulla fuori dall'intervallo $[1, 3]$ e uguale a 1 per $t = 2$, per esempio

$$\varphi(t) = \begin{cases} t-1 & \text{se } 1 \le t \le 2, \\ 3-t & \text{se } 2 \le t \le 3, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e poniamo

$$f(x,y) = \begin{cases} \varphi\Big(\dfrac{y}{x^2}\Big) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si ha allora che:

- f è diversa da 0 solo nei punti (x, y) con $x^2 < y < 3x^2$ (regione aperta compresa tra due parabole con vertice nell'origine);
- $f = 1$ sui punti della parabola $y = 2x^2$ con $x \neq 0$, ma $f(0, 0) = 0$; quindi f non è continua in 0.

Tuttavia:

- la restrizione di f a una qualunque retta del piano è continua (lo si mostri per esercizio).

Questo esempio mostra i problemi che si possono incontrare nel trattamento di limiti di funzioni di più variabili. Dato che $\lim_{x\to 0} f(x, y) = 0$ per ogni y e $\lim_{y\to 0} f(x, y) = 0$ per ogni x, si ha infatti

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = 0\ , \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = 0\ ,$$

mentre non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\ .$$

Quindi il calcolo di un limite non può essere sempre ridotto a una sequenza di limiti nelle singole variabili. In termini sequenziali, la differenza consiste essenzialmente nel fatto che, per avere il limite in n variabili, serve considerare *tutte* le successioni che si avvicinano al punto, non solo quelle che si muovono lungo rette o lungo una prescritta famiglia di curve.
Infine, nel caso $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \ge 1$, in base alla Proposizione 7.1, sarà sufficiente considerare la continuità delle componenti $f_1, \ldots, f_m$, funzioni a valori in $\mathbb{R}$.

2. Derivate parziali e direzionali

Consideriamo una funzione f definita su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori reali.

Definizione 7.2 (**Derivata parziale**). *Sia $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ un punto interno ad A. Si chiama derivata parziale di f in $\overline{x}$ nella variabile x_j la derivata in 0, se esiste, della funzione di una variabile*

$$g(t) = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{j-1}, \overline{x}_j + t, \overline{x}_{j+1}, \ldots, \overline{x}_n)\ ,$$

cioè si pone

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{j-1}, \overline{x}_j + h, \overline{x}_{j+1}, \ldots, \overline{x}_n) - f(\overline{x})}{h}\ ,$$

se questo limite esiste finito.

Non esiste un'unica notazione in letteratura per le derivate parziali, anzi ne coesistono molte: a seconda della convenienza useremo anche la notazione $\partial_{x_j} f(x)$, o anche $\partial_j f(x)$.
Il calcolo della derivata parziale nella variabile x_j si effettua dunque "congelando" le variabili diverse dalla j–esima e considerando variabile solo la variabile x_j. Ad esempio

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 y) = 2xy \cos(x^2 y) \ , \qquad \frac{\partial}{\partial y} \sin(x^2 y) = x^2 \cos(x^2 y) \ .$$

La definizione di derivata direzionale è più generale e ha il vantaggio di essere indipendente dal sistema di coordinate.

Definizione 7.3 (**Derivata direzionale**). *Siano f, A e $\overline{x}$ come sopra. Dato $v \in \mathbb{R}^n$, si chiama derivata direzionale di f rispetto a v in $\overline{x}$ la derivata in 0, se esiste, della funzione di una variabile $g(t) = f(\overline{x} + tv)$, cioè si pone*

$$\partial_v f(\overline{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + tv) - f(\overline{x})}{t} \ ,$$

se questo limite esiste finito.

La derivata $\partial_0 f(x)$ esiste e vale 0, qualunque sia f. È immediato verificare che

$$\partial_{\lambda v} f(\overline{x}) = \lambda \partial_v f(\overline{x}) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \ , \tag{2.1}$$

nel senso che se esiste la derivata a destra, esiste quella a sinistra e sono legate da questa relazione lineare.
Ovviamente, se $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ è il versore j–esimo della base canonica di $\mathbb{R}^n$,

$$\partial_{e_j} f(\overline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) \ .$$

Vediamo l'interpretazione grafica della derivata direzionale, per $v \in \mathbb{R}^n$ non nullo. Consideriamo il piano affine 2–dimensionale "verticale" $\pi \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ passante per $P = (\overline{x}, 0)$ e parallelo al sottospazio generato dai due vettori $w_1 = (v, 0)$ e $w_2 = (0, 1)$, vale a dire

$$\pi = \{P + tw_1 + yw_2 : \ t, \, y \in \mathbb{R}\} \ .$$

Intersecando π con il grafico di f

$$G_f = \big\{\big(x, f(x)\big) : \ x \in A\big\} \subseteq A \times \mathbb{R} \tag{2.2}$$

si ottiene l'insieme di punti

$$\{P + tw_1 + f(\overline{x} + tv) w_2 \ : \ t \in \mathbb{R}\} \subseteq \pi$$

che corrisponde al grafico $y = f(\overline{x} + tv)$, nelle variabili (t, y) che parametrizzano il piano π. Se poi v è un versore, cioè $|v| = 1$, le coordinate (t, y) sul piano π inducono proprio la distanza euclidea e $\partial_v f(\overline{x})$ rappresenta il coefficiente angolare della tangente al grafico.
Si osservi, che a differenza di quanto succede con funzioni di una variabile, l'esistenza di tutte le derivate parziali o direzionali di una funzione in un punto *non implica la continuità nel punto stesso.* La funzione (1.1) del Capitolo 5, che è discontinua nell'origine, ha tutte le derivate direzionali, uguali a 0, in quel punto.

3. Differenziale

Per funzioni $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di una variabile, le due seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) f è derivabile in un punto $\overline{x}$ interno a I;

(ii) esiste una funzione lineare $g(h) = ah$ che approssimi l'incremento di f da $\overline{x}$ a $\overline{x} + h$ a meno di un infinitesimo superiore al primo, cioè tale che $f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) = g(h) + o(h)$ per $h \to 0$.

Dividendo per h si verifica anche facilmente che, quando queste condizioni sono verificate, la costante a è univocamente determinata ed è uguale a $f'(x_0)$.
Proviamo a riformulare le due proprietà per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di più variabili nel modo seguente:

(i') f ha tutte le derivate direzionali in un punto $\overline{x}$ interno a A;

(ii') esiste una funzione lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$, $g(h) = a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n = a \cdot h$, che approssimi l'incremento di f da $\overline{x}$ a $\overline{x} + h$ a meno di un infinitesimo superiore al primo, cioè tale che

$$f(\overline{x} + h) - f(\overline{x}) = g(h) + o\big(|h|\big) \qquad (h \to 0) \ . \tag{3.1}$$

Ponendo $h = tv$, con v fissato, dividendo per t e prendendo il limite per $t \to 0$ si vede che che (ii') implica (i') e che

$$\partial_v f(\overline{x}) = g(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \ .$$

Infatti

$$f(\overline{x} + tv) - f(\overline{x}) = ta \cdot v + o\big(|tv|\big) = tg(v) + o(t) \ ,$$

da cui

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{x} + tv) - f(\overline{x})}{t} = g(v) \ .$$

Quindi, se esiste una funzione lineare g che soddisfi (ii'), questa è univocamente determinata dalle derivate direzionali di f lungo una base di $\mathbb{R}^n$. D'altro canto, siccome g è continua in 0, la condizione (ii') implica anche che

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x}) \ ,$$

cioè che f è continua in $\overline{x}$. Tuttavia, come già osservato in precedenza, l'esempio (1.1) del Capitolo 5 (la funzione non nulla solo nella regione $x^2 < y < 3x^2$) mostra che la (i') non implica la continuità di f in $\overline{x}$, e dunque le condizioni (i') e (ii') non sono equivalenti, si veda anche l'esempio (3.2).
Possiamo quindi formalizzare la (ii') in una definizione.

Definizione 7.4 (**Differenziabilità in un punto**). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\overline{x}$ interno ad A. Si dice che $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in $\overline{x}$ se esiste una funzione lineare g di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ per cui valga la formula (3.1).*

Per quel che abbiamo detto in connessione a (i') e (ii'), vale il seguente teorema.

Teorema 7.5 (**Differenziabilità implica continuità di f, esistenza di $\partial_v f$ e linearità in v**). *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto interno $\overline{x} \in A$. Allora*

(i) *f è continua in $\overline{x}$;*

(ii) *f ammette derivate direzionali rispetto a ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ e esiste $a \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$\partial_v f(\overline{x}) = a \cdot v \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \ .$$

In particolare, scegliendo v tra i vettori coordinati e_j, vale

(a) *per ogni $j = 1, \ldots, n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}) = a_j$;*

(b) *la funzione lineare $g(h) = a \cdot h$ per cui vale la (3.1) è unica.*

Il seguente esempio mostra che la combinazione di (i') e continuità non è ancora sufficiente per la differenziabilità. Lo otteniamo con una piccola variante dell'esempio (1.1).

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \geq 3x^2 \text{ o } y \leq x^2\ ; \\ \sqrt{y - x^2} & \text{se } x^2 < y \leq 2x^2\ ; \\ |x| - \sqrt{y - 2x^2} & \text{se } 2x^2 < y < 3x^2\ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Dato che $|f(x,y)| \leq \sqrt{|x|}$, f è continua in $(0,0)$. D'altro canto, tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ sono nulle, quindi se f fosse ivi differenziabile dovrebbe essere $f(x,y) = o(|(x,y)|)$ per $(x,y) \to (0,0)$. Ma sul grafico $y = 2x^2$ questo non succede.

La condizione di differenziabilità in un punto consente, note le derivate parziali nel punto (o, più in generale, note le derivate direzionali rispetto ai vettori di una base di $\mathbb{R}^n$), di determinare tutte le altre derivate direzionali. Infatti, se $v = (v_1, \dots, v_n) = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$,

$$\partial_v f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x})\ .$$

In altri termini, i valori delle derivate direzionali sono "vincolati" ai valori delle derivate parziali. Questo non succede in generale se la funzione, pur avendo tutte le derivate direzionali in un punto, non è ivi differenziabile, come mostra l'esempio seguente.

Esempio. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

Dato che $|f(x,y)| \leq |y|$, f è continua in $(0,0)$. Se la restringiamo a una retta $y = \lambda x$ otteniamo

$$f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x}{1 + \lambda^2}$$

quindi la derivata nell'origine di f lungo la direzione $v = (1, \lambda)$ vale $\lambda/(1+\lambda^2)$. Nella direzione verticale $v = (0,1)$, la derivata di f vale 0. Si noti, più in generale, che

$$v \mapsto \partial_v f(0,0) = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

è 1–omogenea in $\mathbb{R}^2$ (proprietà sempre vera osservata nella relazione (2.1)), ma non lineare, quindi f non può essere differenziabile in $(0,0)$.

Con il cambiamento di variabile $x = \overline{x} + h$, si ottiene la formula seguente.

Corollario 7.6. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dotata di derivate parziali in un punto $\overline{x}$ interno a A. Allora f è differenziabile in $\overline{x}$ se e solo se ammette lo sviluppo al primo ordine per $x \to \overline{x}$*

$$f(x) = f(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x})(x_j - \overline{x}_j) + o\big(|x - \overline{x}|\big) \qquad (x \to \overline{x})\ . \tag{3.3}$$

Definizione 7.7 (**Gradiente, differenziale, iperpiano tangente**).

- *Il vettore*
$$\nabla f(\overline{x}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{x})\Big) \in \mathbb{R}^n$$
si chiama gradiente di f in $\overline{x}$.
- *L'applicazione lineare*
$$d_{\overline{x}} f(h) = \nabla f(\overline{x}) \cdot h \tag{3.4}$$
si chiama il differenziale di f in $\overline{x}$.
- *L'iperpiano di $\mathbb{R}^{n+1}$, con coordinate $(x_1, \dots, x_n, y)$, di equazione*
$$y = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x}) \cdot (x - \overline{x})$$
si chiama iperpiano tangente (spesso anche "piano tangente") al grafico G_f di f definito dalla (2.2) nel punto $(\overline{x}, f(\overline{x}))$.

Anche se grazie al teorema di Riesz le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ possono essere identificate con vettori, è bene tenere concettualmente distinta la nozione di differenziale, che *non* dipende dalla scelta delle coordinate, dal vettore che lo rappresenta come nella formula (3.4) in un dato sistema di coordinate mediante il prodotto scalare, i.e. il gradiente.
Quando f è differenziabile in $\overline{x}$, il piano tangente in $\overline{x}$ è l'unione delle rette tangenti ai grafici ottenuti su ciascun piano (bidimensionale) verticale passante per $(\overline{x}, 0)$ intersecandolo con il grafico di f.

Definizione 7.8 (**Punti stazionari**). *Un punto $\overline{x}$ in cui una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile si dice stazionario se $\nabla f(\overline{x}) = 0$.*

Questo equivale a dire che tutte le derivate direzionali in $\overline{x}$ sono nulle, o anche che il piano tangente al grafico in $\overline{x}$ è orizzontale (cioè di equazione $y =$costante).

Proposizione 7.9. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto interno $\overline{x}$ e supponiamo che $\overline{x}$ non sia stazionario. Possiamo allora scrivere*
$$\nabla f(\overline{x}) = |\nabla f(\overline{x})| v_0 \ ,$$
dove v_0 è il versore di $\nabla f(\overline{x})$. Al variare di v tra i versori di $\mathbb{R}^n$, la derivata direzionale $\partial_v f(\overline{x})$ assume valore massimo per $v = v_0$, e $\partial_{v_0} f(\overline{x}) = |\nabla f(\overline{x})|$.

Dimostrazione. Per ogni versore v,
$$\partial_v f(\overline{x}) = \nabla f(\overline{x}) \cdot v = |\nabla f(\overline{x})| (v_0 \cdot v) \ .$$
Per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz (Teorema 5.2 del Capitolo 5), $|v_0 \cdot v| \le 1$ e vale l'uguaglianza se e solo se $v = \pm v_0$. Ma allora $v_0 \cdot v$ assume valore massimo, uguale a 1, se e solo se $v = v_0$. □

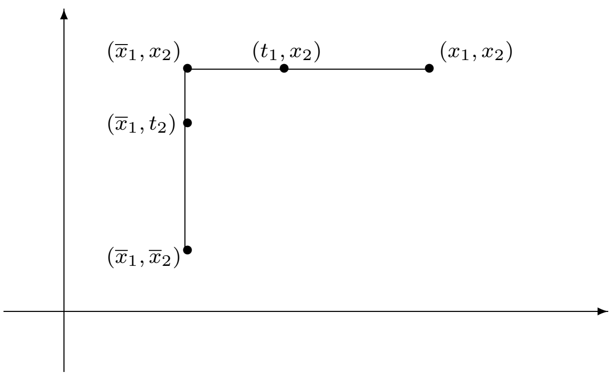
Possiamo dire che $\nabla f(\overline{x})$ indica la direzione di "massima pendenza" del grafico di f in $\bar{x}$, e il suo verso quello di "massima crescita".

4. Il teorema del differenziale totale

Il teorema che presentiamo fornisce condizioni sufficienti per la differenziabilità di una funzione in un punto. Esso è utile sia per gli sviluppi teorici che nel calcolo concreto con funzioni di più variabili.

Teorema 7.10 (**Teorema del differenziale totale**). *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dotata di derivate parziali in un intorno di un punto $\overline{x} \in A$. Se tali derivate sono continue in $\overline{x}$, allora f è differenziabile in $\overline{x}$.*

Dimostrazione. Per valutare l'incremento $f(x)-f(\overline{x})$ seguiremo una spezzata, come in figura.



È quindi comodo supporre che l'intorno di $\overline{x}$ su cui esistono le derivate parziali di f sia un cubo $Q_r(\overline{x}) = \overline{x} + (-r, r)^n$. Dimostriamo che vale la formula (3.3) partendo dall'uguaglianza, per $x \in Q_r(\overline{x})$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(\overline{x}) &= \big(f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(\overline{x}_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\big) \\ &\quad + \big(f(\overline{x}_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\big) \\ &\quad \cdots \\ &\quad + \big(f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_{n-1}, x_n) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_n)\big) \\ &= \Delta_1(x) + \Delta_2(x) + \cdots + \Delta_n(x) \ . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Per ogni $j = 1, \dots, n$, la differenza $\Delta_j(x)$ rappresenta l'incremento da $\overline{x}_j$ a x_j della funzione di una variabile

$$h_j(t) = f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) \ .$$

Per ipotesi, h_j è derivabile su un intervallo aperto contenente $\overline{x}_j$ e x_j e

$$h_j'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) \ .$$

Applicando il teorema di Lagrange, otteniamo che esiste $t_j = t_j(x)$, strettamente compreso tra $\overline{x}_j$ e x_j, tale che

$$\Delta_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{j-1}, t_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\,(x_j - \overline{x}_j) \ .$$

Essendo le derivate parziali continue in $\overline{x}$, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta \in (0, r]$ tale che

$$y \in Q_\delta(\overline{x}) \implies \Big|\frac{\partial f}{\partial x_j}(y) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x})\Big| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad \forall j = 1, \dots, n \ .$$

Dato che lavoriamo su un cubo, per $x \in Q_\delta(\overline{x})$, anche i punti $y_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, t_j, \overline{x}_{j+1}, \dots, \overline{x}_n)$ sono in $Q_\delta(\overline{x})$. Quindi

$$\left|\Delta_j(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x})(x_j - \overline{x}_j)\right| < \frac{\varepsilon}{n}|x_j - \overline{x}_j| \le \frac{\varepsilon}{n}|x - \overline{x}| \qquad j = 1, \dots, n\ , \tag{4.2}$$

per $x \in Q_\delta(\overline{x})$. Sommando le n disuguaglianze in (4.2) e tenendo conto della (4.1) otteniamo

$$|f(x) - f(\overline{x}) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x})(x_j - \overline{x}_j)| \le \varepsilon|x - \overline{x}| \qquad \forall x \in Q_\delta(\overline{x})\,.$$

□

DEFINIZIONE 7.11 (**Funzioni di classe C^1**). *Una funzione f reale definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice di classe C^1 su A se ammette le derivate parziali in ogni punto di A e le funzioni $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n$ sono continue su A.*

Chiaramente una funzione di classe C^1 su un aperto A è continua in A e la funzione

$$\nabla f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

è pure continua su A.

DEFINIZIONE 7.12 (**Campo vettoriale e potenziale**). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Una funzione $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice un* campo vettoriale *su A. Una funzione $V : A \longrightarrow \mathbb{R}$ è detta potenziale di F se $F = \nabla V$ su A.*[1]

5. Curve regolari in $\mathbb{R}^n$

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.

DEFINIZIONE 7.13 (**Vettore tangente e curve regolari**). *Se ogni componente $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ di γ è derivabile in $\overline{t} \in I$, il vettore*

$$\gamma'(t) = \big(\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)\big)$$

si chiama vettore tangente *a γ in $\overline{t}$.*
La curva γ si dice regolare su I *se ciascuna componente di γ è di classe C^1 in I e il vettore tangente non si annulla in I.*
Un arco γ, definito su un intervallo compatto $[a, b]$ si dice regolare se le componenti scalari di γ sono C^1 in $[a, b]$ (con derivate solo laterali negli estremi) e $\gamma'(t) \ne 0$ per ogni $t \in [a, b]$.

Si noti che non ha senso parlare di "vettore tangente a γ in un punto x del sostegno" quando la curva non è semplice. È possibile che $x = \gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, ma $\gamma'(t_1) \ne \gamma'(t_2)$. Anche per questo motivo il riferimento alla parametrizzazione della curva è essenziale.
Applicando lo sviluppo espresso nella (3.1) a ogni componente γ_j di γ, si ottiene l'enunciato seguente.

LEMMA 7.14. *Siano $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare, $\overline{t} \in I$, $x = \gamma(\overline{t})$, $v = \gamma'(\overline{t})$. La retta parametrica $r(h) = x + hv$ è l'unica che soddisfi la condizione*

$$\gamma(\overline{t} + h) = r(h) + o(h) \qquad (h \to 0)\ .$$

[1] In Fisica, se $F = -\nabla V$.

Sia ora f una funzione di classe C^1 su un aperto A e sia $\gamma : I \longrightarrow A$ una curva regolare con sostegno contenuto in A. Allora la composizione $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in I e la seguente formula per il calcolo della derivata, la cosiddetta "chain rule".

Proposizione 7.15 (**Regola di derivazione della funzione composta**). *La funzione $f \circ \gamma$ è derivabile in $\mathring{I}$ e*

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(\gamma(t)\big)\gamma_j'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \qquad \forall t \in \mathring{I} \ .$$

Analogo enunciato vale agli estremi di I.

Dimostrazione. Siano $t \in \mathring{I}$, $\overline{x} = \gamma(t) \in A$. Per il Corollario 7.6,

$$f(x) = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x}) \cdot (x - \overline{x}) + o\big(|x - \overline{x}|\big) \qquad (x \to \overline{x}) \ .$$

Sostituendo $x = \gamma(t + h)$ e usando il Lemma 7.14, si ha, per $h \to 0$,

$$\begin{aligned} f \circ \gamma(t+h) &= f\big(\overline{x} + h\gamma'(t) + o(h)\big) \\ &= f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x}) \cdot \big(h\gamma'(t) + o(h)\big) + o\big(\big|h\gamma'(t) + o(h)\big|\big) \ . \end{aligned}$$

Essendo

$$\big|h\gamma'(t) + o(h)\big| \leq |h||\gamma'(t)| + o(h) = O(h) \qquad (h \to 0) \ ,$$

l'ultimo termine è $o(h)$, e dunque

$$f \circ \gamma(t+h) = f \circ \gamma(t) + h\nabla f(\overline{x}) \cdot \gamma'(t) + o(h) \ .$$

□

Definizione 7.16. *Siano $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $\delta : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ due curve (o archi) regolari. Si dice che γ è equivalente a δ, e si scrive $\gamma \approx \delta$, se esiste una funzione biiettiva $\varphi : I \longrightarrow J$ di classe C^1, con $\varphi' > 0$ in I e tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$.*

E' ovvio che $\approx$ è una relazione di equivalenza (sia per curve che per archi). Si dice che δ è una *riparametrizzazione* di γ. Valgono le seguenti proprietà:

- due curve, o archi, equivalenti hanno lo stesso sostegno;
- due archi equivalenti hanno lo stesso estremo iniziale ed estremo finale;
- se γ, δ, φ sono come nella Definizione 7.16, posto, per $t \in I$, $\tau = \varphi(t) \in J$, si ha

  $$\gamma'(t) = \varphi'(t)\delta'(\tau) \ ,$$

  in particolare i due vettori tangenti hanno stessa direzione e verso.

6. Curve regolari e grafici in $\mathbb{R}^2$

Sia f una funzione di classe C^1 su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ a valori reali. Allora la curva

$$\gamma(t) = \big(t, f(t)\big) \qquad t \in I \ , \tag{6.1}$$

è semplice, il suo sostegno è il grafico di f ed è orientata con percorrenza "da sinistra a destra". Inoltre γ è regolare, essendo

$$\gamma'(t) = \big(1, f'(t)\big) \neq 0 \ .$$

Lemma 7.17. *Sia $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1, e si supponga che $\gamma_1' > 0$ in I. Allora $\gamma \approx \delta$, con δ della forma (6.1), con f di classe C^1. Valgono enunciati analoghi se $\gamma_1' < 0$ in I (in questo caso il verso di percorrenza è opposto) o se γ_2' ha segno constante in I (in questo caso il grafico è del tipo $x = g(y)$).*

Dimostrazione. La funzione γ_1 applica in modo biiettivo I su un intervallo J. Ponendo la curva $\delta = \gamma \circ \gamma_1^{-1} : J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ha la forma (6.1) con $f = \gamma_2 \circ \gamma_1^{-1}$ ed è equivalente a γ. □

Dalla continuità del vettore tangente otteniamo che ogni curva regolare è localmente equivalente, nel senso della relazione $\approx$, a un grafico, scegliendo in modo opportuno il verso di percorrenza e il sistema di coordinate.

Teorema 7.18. *Sia $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di classe C^1. Per ogni $t \in I$ esiste un intorno I_t di t tale che $\gamma_{|_{I_t}}$ sia equivalente a $\delta(\pm s)$, con $\delta(s)$ del tipo $\big(s, f(s)\big)$, oppure a $\tilde{\delta}(\pm s)$, con $\tilde{\delta}(s)$ del tipo $\big(g(s), s\big)$.*

Dimostrazione. Per ogni $t \in I$, $\gamma'(t) \neq 0$. Supponiamo che $\gamma_1'(t) > 0$. Essendo γ_1' continua su I, esiste un intorno I_t di t su cui $\gamma_1' > 0$. Ricadiamo quindi nelle ipotesi del Lemma 7.17. Se $\gamma_1'(t) < 0$, basta sostituire γ con $-\gamma$ per ricadere nel caso precedente.
In modo analogo si procede, a componenti scambiate, se $\gamma_2'(t) \neq 0$. □

7. Grafici e insiemi di livello: il teorema della funzione implicita

Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su $A \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$. Dato $a \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$E_a = \big\{x \in A : f(x) = a\big\} = f^{-1}(a) \ ,$$

si chiama un *insieme di livello* della funzione f. Si vuole conoscere la natura di questo insieme, e in particolare si vuol sapere se esso coincide con il grafico di una funzione di $n-1$ variabili, cioè, a meno di una rinumerazione delle variabili,

$$E_a = \big\{\big(x', g(x')\big) : x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B\big\} \ , \qquad \text{con } B \subseteq \mathbb{R}^{n-1}.$$

In altri termini, data l'equazione

$$f(x_1, \dots, x_n) = a \ ,$$

si vuole sapere se si può *esplicitare* una delle n variabili in funzione delle altre, cioè stabilire che, per qualche j, l'equazione è equivalente a

$$x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \ .$$

Quando questo succede, si dice che la funzione g è *implicitamente definita* dall'equazione $f(x) = a$. È ben noto che la risposta generale a questo problema è negativa, anche con funzioni f molto regolari, per esempio, come supporremo d'ora in poi, di classe C^1 su un aperto A. L'insieme E_a può essere

- vuoto: $x_1^2 + x_2^2 = -1$,
- discreto: $x_1^2 + x_2^2 = 0$,
- non rappresentabile come grafico: $x_1^2 - x_2^2 = 0$,
- rappresentabile come grafico, ma non di una funzione derivabile: $x_1^2 - x_2^3 = 0$,
- non rappresentabile *globalmente* come un unico grafico, ma scomponibile nell'unione di più grafici: $x_1^2 + x_2^2 = 1$,
- ecc.

Accontentiamoci dunque di porre il problema nella forma seguente: *dare condizioni sulla funzione f, di classe C^1 sull'aperto A, perché, dato un punto $\overline{x} \in E_a$, si possa concludere che esiste un intorno U di $\overline{x}$ tale che $E_a \cap U$ sia il grafico di una funzione C^1 di $n-1$ variabili.*

Per semplicità, discuteremo in dettaglio il problema per funzioni f di due variabili (che indicheremo con x, y anziché x_1, x_2), anche se le conclusioni che trarremo ammettono naturali estensioni a funzioni di più variabili (si veda il Teorema 7.22).

Partiamo dalla seguente osservazione elementare.

Lemma 7.19 (**Il gradiente è ortogonale agli insiemi di livello**). *Siano A aperto di $\mathbb{R}^2$, f di classe C^1 su A e $\gamma : I \longrightarrow A$ una curva regolare con sostegno contenuto nell'insieme di livello E_a di f. Allora, per ogni $t \in I$, i vettori $\gamma'(t)$ e $\nabla f(\gamma(t))$ sono ortogonali.*

Dimostrazione. La funzione composta $f \circ \gamma$ è di classe C^1 su I e costantemente uguale ad a. Per la Proposizione 7.15,

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = 0 \qquad \text{per ogni } t \in I \ .$$

□

La relazione di ortogonalità è certamente verificata se il punto $(x, y) = \gamma(t)$ è stazionario per f, indipendentemente dalla direzione di $\gamma'(t)$. Ma si noti che negli esempi elencati sopra sono proprio i punti stazionari quelli in cui si verificano "irregolarità" dell'insieme di livello. Per poter formulare un risultato positivo, è dunque opportuno limitarsi a punti di E_a che non siano stazionari per f.

Supponiamo allora che $y = g(x)$ sia implicitamente definita, nell'intorno di un punto non stazionario $(\overline{x}, \overline{y}) \in E_a$, dall'equazione $f(x, y) = a$, con g di classe C^1 sull'intervallo I, e poniamo $\gamma(t) = \big(t, g(t)\big)$. Allora, se $\gamma(\overline{x}) = (\overline{x}, \overline{y})$, differenziando al tempo $\overline{x}$ e sostituendo l'espressione per $\gamma(\overline{x})$ nella formula di derivazione della funzione composta otteniamo l'identità

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) g'(\overline{x}) = 0 \ .$$

Deve necessariamente essere $\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$, perché altrimenti si annullerebbe anche l'altra derivata parziale.

Il teorema che segue mostra che un piccolo rafforzamento di questa condizione è anche sufficiente per poter esplicitare y in funzione di x nell'intorno di $(\overline{x}, \overline{y})$.

Teorema 7.20 (**Teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^2$**). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua, con A aperto di $\mathbb{R}^2$, e sia $(\overline{x}, \overline{y}) \in A$ tale che $\partial_y f$ esiste in un intorno di $(\overline{x}, \overline{y})$, è continua in $(\overline{x}, \overline{y})$ e $\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$. Esiste allora un intorno $U = (\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1) \times (\overline{y} - \delta_2, \overline{y} + \delta_2)$ di $(\overline{x}, \overline{y})$ tale che, posto $a = f(\overline{x}, \overline{y})$, l'insieme $U \cap f^{-1}(\{a\})$ sia il grafico $y = g(x)$, con g continua da $(\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1)$ a valori in $(\overline{y} - \delta_2, \overline{y} + \delta_2)$.*

Inoltre, se f è differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$, allora g è derivabile in $\overline{x}$ e

$$g'(\overline{x}) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\overline{x}, g(\overline{x})\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(\overline{x}, g(\overline{x})\big)} \qquad \textit{per ogni } x \in (\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1) \ . \tag{7.1}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che $a = 0$ e che $\partial_y f(\overline{x}, \overline{y}) > 0$ e fissare un rettangolo chiuso iniziale $[\overline{x} - \alpha, \overline{x} + \alpha] \times [\overline{y} - \beta, \overline{y} + \beta]$ su cui $\partial_y f > 0$.

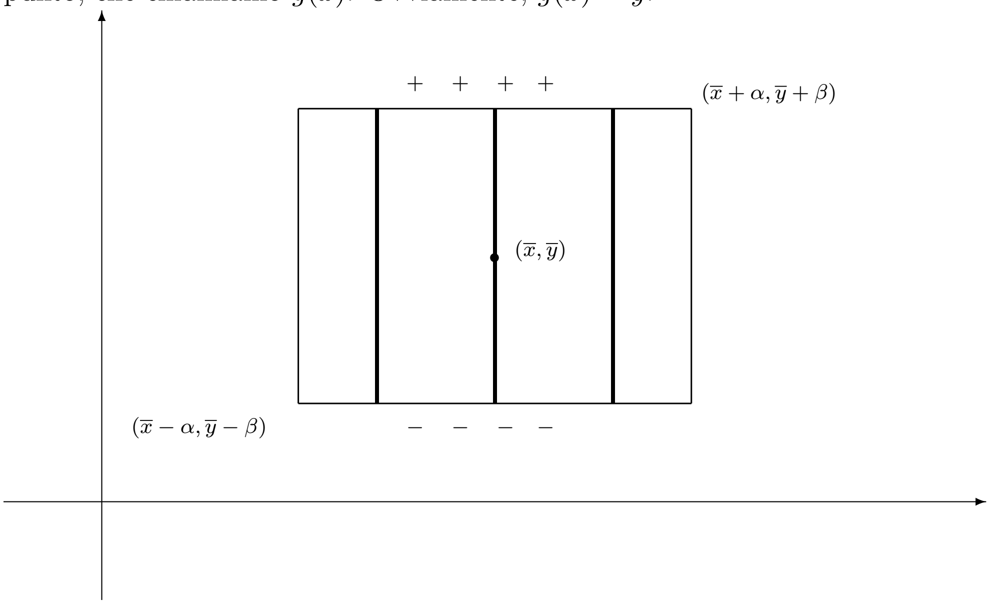
La funzione $h_{\overline{x}}(y) = f(\overline{x}, y)$ è dunque strettamente crescente su $[\overline{y} - \beta, \overline{y} + \beta]$, per cui

$$f(\overline{x}, \overline{y} - \beta) < 0 \ , \qquad f(\overline{x}, \overline{y} + \beta) > 0 \ .$$

Esiste allora $\delta_1 \in (0, \alpha]$, tale che

$$f(x, \overline{y} - \beta) < 0 \ , \qquad f(x, \overline{y} + \beta) > 0 \qquad \text{per ogni } x \in [\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1] \ .$$

Per il teorema di esistenza degli zeri, per ogni $x \in [\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1]$, la funzione $h_x(y) = f(x, y)$ si annulla sull'intervallo $[\overline{y} - \beta, \overline{y} + \beta]$. Essendo $h'_x(y) = \partial_y f(x, y) > 0$, h_x si annulla in un unico punto, che chiamiamo $g(x)$. Ovviamente, $g(\overline{x}) = \overline{y}$.



La funzione g è dunque implicitamente definita dall'equazione $f(x, y) = 0$ in un intorno di $(\overline{x}, \overline{y})$. Mostriamo ora che g è continua su $[\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1]$. Supponiamo per assurdo che, per una data successione $(x_n) \subset [\overline{x} - \delta_1, \overline{x} + \delta_1]$, si abbia $x_n \to x$ ma $g(x_n)$ non converge a $g(x)$. Esiste allora $\epsilon > 0$ tale che $|g(x_n) - g(x)| \geq \epsilon$ per infiniti indici n. Considerando solo questi indici, troviamo una sottosuccessione $n(k)$ tale che $g(x_{n(k)})$ converge a un certo $z \neq g(x)$, con $z \in [\overline{y} - \beta, \overline{y} + \beta]$. Ma, passando al limite per $k \to \infty$ nella relazione $f(x_{n(k)}, g(x_{n(k)})) = 0$, otteniamo $f(x, z) = 0$, contro l'unicità di $g(x)$. Quindi l'assurdo mostra la continuità di g.
Dimostriamo ora, nell'ipotesi aggiuntiva che f sia differenziabile in $(\overline{x}, \overline{y})$, che g ammette derivata continua in $\overline{x}$.
Per $x \to \overline{x}$, si ha

$$\begin{aligned}
0 &= f\big(x, g(x)\big) - f(\overline{x}, \overline{y}) \\
&= \nabla f(\overline{x}, \overline{y}) \cdot \big(x - \overline{x}, g(x) - \overline{y}\big) + o\big(|x - \overline{x}| + |g(x) - \overline{y}|\big) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})(x - \overline{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\big(g(x) - \overline{y}\big) + o\big(|x - \overline{x}| + |g(x) - \overline{y}|\big) \ ,
\end{aligned}$$

da cui si ricava che

$$\frac{g(x) - \overline{y}}{x - \overline{x}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})} + o\Big(1 + \Big|\frac{g(x) - \overline{y}}{x - \overline{x}}\Big|\Big) \ . \tag{7.2}$$

Dimostriamo che la (7.2) implica la (7.1), cioè che

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{g(x) - g(\overline{x})}{x - \overline{x}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})} \ .$$

Poniamo $h(x) = \frac{g(x)-g(\overline{x})}{x-\overline{x}}$ e $a = -\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},\overline{y})/\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x},\overline{y})$, di modo che $h(x) = a + o(1+|h(x)|)$ per $x \to \overline{x}$.
Mostriamo per prima cosa che esiste un intorno di $\overline{x}$ in cui h è limitata. Se così non fosse, esisterebbe una successione $x_n \to \overline{x}$ con $|h(x_n)| \to +\infty$. Avremmo allora $h(x_n) = o\big(h(x_n)\big)$ per $n \to \infty$, che è assurdo.
Essendo h limitata in un intorno di $\overline{x}$, abbiamo allora che $h(x) = a+o(1)$, cioè $\lim_{x\to\overline{x}} h(x) = a$. □

Il seguente corollario si deduce facilmente.

Corollario 7.21. *Sia f di classe C^1 in $U = (\overline{x}-\delta_1,\overline{x}+\delta_1)\times(\overline{y}-\delta_2,\overline{y}+\delta_2) = I \times J$, con $\partial f/\partial y \neq 0$ in U. Allora la funzione g introdotta nel Teorema 7.20 è di classe C^1 in I e la formula (7.1) vale per ogni $x \in I$.*

La condizione $\nabla f(\overline{x}) \neq 0$ è dunque sufficiente per poter esplicitare una delle due variabili in funzione dell'altra in un intorno del punto dato. Tuttavia questa condizione non è affatto necessaria. Supponendo $a = 0$, si noti infatti che f e f^2 definiscono lo stesso insieme di livello E_0, ma

$$\nabla f^2 = 2f\,\nabla f$$

è identicamente nullo su E_0.

Il teorema delle funzioni implicite ha il seguente analogo per funzioni di n variabili, che ci limitiamo a enunciare, anche se la dimostrazione è del tutto analoga a quella del caso bidimensionale.
Per comodità, indichiamo i punti $x \in \mathbb{R}^n$ come coppie (x', x_n) con $x' = (x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Teorema 7.22 (**Teorema delle funzioni implicite in $\mathbb{R}^n$**). *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, con A aperto, e sia $\overline{x} = (\overline{x}', \overline{x}_n) \in A$ tale che $\partial_{x_n} f$ esiste in un intorno di $\overline{x}$, è continua in $\overline{x}$ e $\partial_{x_n} f(\overline{x}) \neq 0$.*
Esiste allora un intorno $U = U' \times (\overline{x}_n-\delta, \overline{x}_n+\delta)$ di $\overline{x}$ (dove U' è un intorno di $\overline{x}'$ in $\mathbb{R}^{n-1}$) tale che, posto $a = f(\overline{x})$, l'insieme $U \cap f^{-1}(\{a\})$ sia il grafico $x_n = g(x')$, con g continua da U' a valori in $(\overline{x}_n-\delta, \overline{x}_n+\delta)$. Inoltre, se f è di classe C^k su A per qualche $k \in \mathbb{N}^*$, allora g è di classe C^k su U' e vale

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x') = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\big(x', g(x')\big)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\big(x', g(x')\big)} \qquad \text{per ogni } x' \in U' \text{ e } 1 \le i \le n-1 \,. \tag{7.3}$$

8. Lunghezza di archi e parametro lunghezza d'arco

Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un arco continuo. Scegliendo m punti $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ in (a,b), si consideri la linea spezzata congiungente $\gamma(a)$ con $\gamma(t_1)$, quindi con $\gamma(t_2)$ ecc., fino all'ultimo tratto congiungente $\gamma(t_n)$ con $\gamma(b)$. La lunghezza della spezzata è data da

$$\sum_{j=0}^{m} \big|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\big| \,, \tag{8.1}$$

dove abbiamo posto $t_0 = a$, $t_{m+1} = b$.
Abbiamo dunque una funzione $\lambda : \mathscr{P}_{\text{fin}}\big((a,b)\big) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ che associa a ogni sottoinsieme finito E di punti di (a,b) la somma (8.1), avendo ordinato gli elementi di E in modo crescente.

Rispetto all'ordinamento per inclusione di $\mathscr{P}_{\text{fin}}\big((a,b)\big)$, la funzione λ è monotona non decrescente. Basta osservare che aggiungendo all'insieme E un elemento t', con $t_j < t' < t_{j+1}$, la somma (8.1) si modifica per il fatto che l'addendo $\big|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\big|$ viene sostituito da

$$\big|\gamma(t') - \gamma(t_j)\big| + \big|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t')\big| \geq \big|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\big| \ .$$

Esiste quindi, finito o infinito,

$$\lim_{E\in\mathscr{P}_{\text{fin}}\left((a,b)\right)} \lambda(E) = \sup_{E\in\mathscr{P}_{\text{fin}}\left((a,b)\right)} \lambda(E) = \ell(\gamma) \ . \tag{8.2}$$

Definizione 7.23. *Il limite $\ell(\gamma)$ in (8.2) si chiama* lunghezza *dell'arco γ. L'arco γ si dice* rettificabile *se $\ell(\gamma) < \infty$.*

Aggiungiamo alcune semplici osservazioni.

- Esempi di archi non rettificabili sono il grafico $\gamma(x) = \big(x, f(x)\big)$ con
$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{per } x \in (0,1] \\ 0 & \text{per } x = 0 \ , \end{cases}$$
e la spirale
$$\gamma(t) = \begin{cases} \Big(t\cos\frac{1}{t}, t\sin\frac{1}{t}\Big) & \text{per } t \in (0,1] \\ (0,0) & \text{per } t = 0 \ . \end{cases}$$
- Se si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in due sottointervalli $[a,c]$ e $[c,b]$ e si pone $\gamma_1 = \gamma_{|_{[a,c]}}$, $\gamma_2 = \gamma_{|_{[c,b]}}$, allora $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2)$.
- Quanto detto finora si estende in modo ovvio ad archi in un generico spazio metrico.

Sia ora γ un arco regolare in $\mathbb{R}^2$. Consideriamo inizialmente il caso di un grafico $\gamma(x) = \big(x, f(x)\big)$ con f di classe C^1 su $[a,b]$. Sia $E \in \mathscr{P}_{\text{fin}}\big((a,b)\big)$, con elementi $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$. Allora, applicando il teorema di Lagrange,

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \sum_{j=0}^{m} \sqrt{(t_{j+1} - t_j)^2 + \big(f(t_{j+1}) - f(t_j)\big)^2} \\ &= \sum_{j=0}^{m} (t_{j+1} - t_j)\sqrt{1 + f'(u_j)^2} \ , \end{aligned}$$

per opportuni punti u_j con $t_j < u_j < t_{j+1}$ per ogni j. Questa espressione è una somma di Riemann dell'integrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt \ .$$

Per le note proprietà dell'integrale definito, dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|t_{j+1} - t_j| < \delta$ per ogni j, allora

$$\Big|\lambda(E) - \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt\Big| < \varepsilon \ .$$

Da questo si deduce facilmente che

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt = \int_a^b \big|\gamma'(t)\big|\, dt \ . \tag{8.3}$$

Vediamo ora che questa formula vale per ogni arco regolare.

PROPOSIZIONE 7.24. *Sia $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arco regolare. Allora*

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt \ . \tag{8.4}$$

Inoltre, se $\gamma \approx \delta$, $\ell(\gamma) = \ell(\delta)$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo innanzitutto che, se $\gamma \approx \delta$, con γ definito su $[a,b]$ e δ su $[a',b']$, allora $\int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_{a'}^{b'} \left|\delta'(\tau)\right| d\tau$.
Sia $\varphi : [a,b] \longrightarrow [a',b']$, con $\varphi' > 0$, tale che $\gamma = \delta \circ \varphi$. Allora, col cambio di variabile $\tau = \varphi(t)$,

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} \left|\delta'(\tau)\right| d\tau &= \int_a^b \left|\delta'\big(\varphi(t)\big)\right| \varphi'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt \ .\end{aligned}$$

Passiamo ora a dimostrare (8.4). Per la compattezza di $[a,b]$, γ si può scomporre come concatenazione di un numero finito di sottoarchi, ciascuno equivalente a un grafico. A ciascuno di essi si può applicare la formula (8.3). Essendo la lunghezza totale uguale alla somma delle lunghezze dei sottoarchi, si ha la conclusione. □

TEOREMA 7.25 (**Parametrizzazione per lunghezza d'arco**). *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ un arco regolare. Posto $\ell = \ell(\gamma)$, sia*

$$\varphi(t) = \int_0^t \left|\gamma'(u)\right| du \ .$$

Allora $\varphi : [a,b] \longrightarrow [0,\ell]$ è biiettiva con $\varphi'(t) = \left|\gamma'(t)\right| > 0$, per cui

$$\delta : [0,\ell] \longrightarrow \mathbb{R}^n \ , \qquad \delta = \gamma \circ \varphi^{-1}$$

è un arco equivalente a γ e $\left|\delta'(s)\right| = 1$ per ogni $s \in [0,\ell]$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, φ è C^1 e $\varphi'(t) = \left|\gamma'(t)\right|$. Quindi $\delta \approx \gamma$. Inoltre, con $s = \varphi(t)$,

$$\begin{aligned}\delta'(s) &= \frac{d}{ds}(\gamma \circ \varphi^{-1})(s) \\ &= \gamma'(t) \frac{d}{ds}(\varphi^{-1})(s) \\ &= \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \ ,\end{aligned}$$

che ha modulo 1. □

Si noti che le condizioni (i) $a = 0$, (ii) $|\delta'| = 1$, caratterizzano la parametrizzazione per lunghezza d'arco.

9. *Funzioni differenziabili da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

[2]

Consideriamo una funzione $F : A \to \mathbb{R}^m$, con A sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Siano $(f_1, \dots, f_m)$ le componenti scalari di F, e sia $\overline{x}$ un punto interno a A. Supponiamo che ogni f_j, $j = 1, \dots, m$, ammetta derivate parziali $\partial_{x_k} f_j$ in $\overline{x}$ per ogni $k = 1, \dots, n$. I valori di queste derivate si raggruppano nella *matrice derivata*, detta anche *matrice Jacobiana*

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{x}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{x}) \end{pmatrix} = \Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\overline{x})\Big)_{j=1,\dots,m\,,\,k=1,\dots,n} ,$$

con m righe e n colonne. Si noti che

- le riga j–esima della matrice è il gradiente in $\overline{x}$ della componente f_j,
- la colonna k–esima è il vettore delle derivate parziali rispetto a x_k, o equivalentemente il vettore tangente in $\overline{x}_k$ della curva

$$\gamma_k(x_k) = F(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_{k-1}, x_k, \overline{x}_{k+1}, \dots, \overline{x}_n) .$$

Le nozioni introdotte per funzioni a valori reali si estendono come segue alle funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$.

Definizione 7.26 (**Differenziabilità e differenziale**). *La funzione F si dice* differenziabile *nel punto x interno al suo dominio se esiste un'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tale che*

$$F(x+h) - F(x) = G(h) + o\big(|h|\big) \qquad (h \to 0) . \tag{9.1}$$

La funzione lineare G, univocamente determinata dall'equazione (9.1), è detta differenziale di F in x ed è indicata con $d_x F$.

Lo studio della differenziabilità di una funzione si riduce a quello della differenziabilità delle sue componenti scalari, come mostra il seguente risultato.

Proposizione 7.27. *La funzione F è differenziabile in x se e solo se ivi sono differenziabili tutte le sue componenti scalari $f_1, \dots, f_m$.*

Dimostrazione. Nell'equazione (9.1) poniamo $G(h) = Ah$, con $A = (a_{jk})_{j=1,\dots,m\,,\,k=1,\dots,n}$ una matrice $m \times n$. Indichiamo con $v_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ la riga j–esima di A. Allora la condizione (9.1) equivale alle m condizioni

$$f_j(x+h) - f_j(x) = v_j \cdot h + o\big(|h|\big) \qquad (h \to 0) .$$

Quindi esiste un'applicazione G che soddisfi la formula (9.1) se e solo se ogni f_j è differenziabile in x. $\square$

Questa riduzione alle componenti scalari ha una serie di conseguenze sulla base dei risultati visti finora.

Corollario 7.28 (**Relazioni tra differenziale e derivate parziali e direzionali**).

(i) *Se F è differenziabile in x, nella formula (9.1) si ha $G(h) = DF(x)h$.*

[2] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

(ii) *Se F è differenziabile in x, essa ammette derivate direzionali, date da*

$$\frac{\partial F}{\partial v}(x) = DF(x)v = d_x F(v) \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \ .$$

(iii) *Se ogni f_j ammette derivate parziali in un intorno di x e continue in x, F è differenziabile in x.*

10. *Composizione di funzioni differenziabili

[3]

Siano date due funzioni $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Più in generale,

$$F = (f_1, \dots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \ , \qquad G = (g_1, \dots, g_k) : B \longrightarrow \mathbb{R}^k \ ,$$

con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $F(A) \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^m$, in modo che la funzione composta $G \circ F : A \to \mathbb{R}^k$ sia definita. Sotto opportune ipotesi sulla differenziabilità di F e G, vogliamo discutere la differenziabilità di $G \circ F$.

Teorema 7.29. *Siano F e G come sopra. Si supponga che*

(i) *F sia differenziabile in un punto $\overline{x}$ interno ad A;*
(ii) *$F(\overline{x}) = \overline{y}$ sia interno a B e G sia differenziabile in $\overline{y}$.*

Allora $G \circ F$ è definita in un intorno di $\overline{x}$, differenziabile in $\overline{x}$ e valgono le identità

$$D(G \circ F)(\overline{x}) = DG(\overline{y})DF(\overline{x}) \ , \qquad d_{\overline{x}}(G \circ F) = (d_{F(\overline{x})}G) \circ (d_{\overline{x}}F) \ .$$

Si noti che le dimensioni delle due matrici derivate rendono possibile il prodotto nell'ordine indicato.

Dimostrazione. Essendo $\overline{y}$ interno a B, esiste una palla $B_r(\overline{y}) \subseteq B$. Per la continuità di G in $\overline{y}$, esiste una palla $B_{r'}(\overline{x})$, che possiamo supporre contenuta in A, tale che $F(B_{r'}(\overline{x})) \subseteq B_r(\overline{y})$. Quindi $G \circ F$ è definita su $B_{r'}(\overline{x})$.
Si ha dunque, per $\overline{x} + h \in B_{r'}(\overline{x})$ e $\overline{y} + k \in B_r(y)$

$$F(\overline{x} + h) - F(\overline{x}) = DF(\overline{x})h + o\big(|h|\big) \qquad (h \to 0) \ ,$$
$$G(\overline{y} + k) - G(\overline{y}) = DG(\overline{y})k + o\big(|k|\big) \qquad (k \to 0) \ .$$

Ponendo

$$k = k(h) = F(\overline{x} + h) - F(\overline{x}) = F(\overline{x} + h) - \overline{y} = DF(\overline{x})h + o\big(|h|\big) \qquad (h \to 0) \ ,$$

nella seconda formula e osservando che $|k(h)| = O(|h|)$, si ottiene

$$\begin{aligned} G\big(F(\overline{x} + h)\big) - G\big(F(\overline{x})\big) &= DG(\overline{y})\Big(DF(\overline{x})h + o\big(|h|\big)\Big) + o\big(|h|\big) \\ &= DG(\overline{y})DF(\overline{x})h + o\big(|h|\big) \ , \end{aligned}$$

e questo dà la tesi. □

Corollario 7.30 (**Formula di derivazione della funzione composta**). *Nelle ipotesi del Teorema 7.29, ponendo $G \circ F = H = (h_1, \dots, h_k)$, vale la formula*

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\overline{x}) = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_p}(F(\overline{x}))\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(\overline{x}) \ , \qquad i = 1, \dots, n \ , \ j = 1, \dots, k \ .$$

[3] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

11. *Derivate di ordine superiore

[4]

Se una funzione reale f di n variabili ammette la derivata parziale $\partial_{x_j} f$ su un aperto A, e questa funzione derivata ammette la derivata parziale nella variabile x_k in un punto $\overline{x}$, il valore

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big)(\overline{x})$$

è la *derivata parziale seconda*, indicata come

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\overline{x}) \ .$$

Più in generale, data una m–upla ordinata di indici $(j_1, \ldots, j_m)$, l'espressione

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_m} \cdots \partial x_{j_1}}(\overline{x}) \ ,$$

indica che f è stata prima derivata rispetto a x_{j_1}, poi rispetto a x_{j_2}, ecc. in un intorno di $\overline{x}$, e infine rispetto a x_{j_m} in $\overline{x}$.
Le derivate di ordine superiore si chiamano *pure* se effettuate sempre rispetto alla stessa variabile e *miste* altrimenti.
Limitandoci a considerare le derivate seconde, in linea di principio una funzione di n variabili può avere fino a n^2 derivate seconde in un punto. Tuttavia è naturale porsi il problema dell'uguaglianza, per $j \neq k$, della derivata

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\overline{x}) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x}+he_k) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overline{x})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\lim_{h'\to 0} \frac{f(\overline{x}+he_k+h'e_j) - f(\overline{x}+he_k) - f(\overline{x}+h'e_j) + f(\overline{x})}{hh'} \ ,\end{aligned} \tag{11.1}$$

con l'altra derivata

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\overline{x}) &= \lim_{h'\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x}+h'e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overline{x})}{h'} \\ &= \lim_{h'\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}+he_k+h'e_j) - f(\overline{x}+he_k) - f(\overline{x}+h'e_j) + f(\overline{x})}{hh'} \ .\end{aligned} \tag{11.2}$$

Trattandosi di uno scambio d'ordine di due limiti in due variabili diverse, dobbiamo aspettarci che l'uguaglianza non sia sempre vera. Infatti si può verificare facilmente che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \ , \end{cases}$$

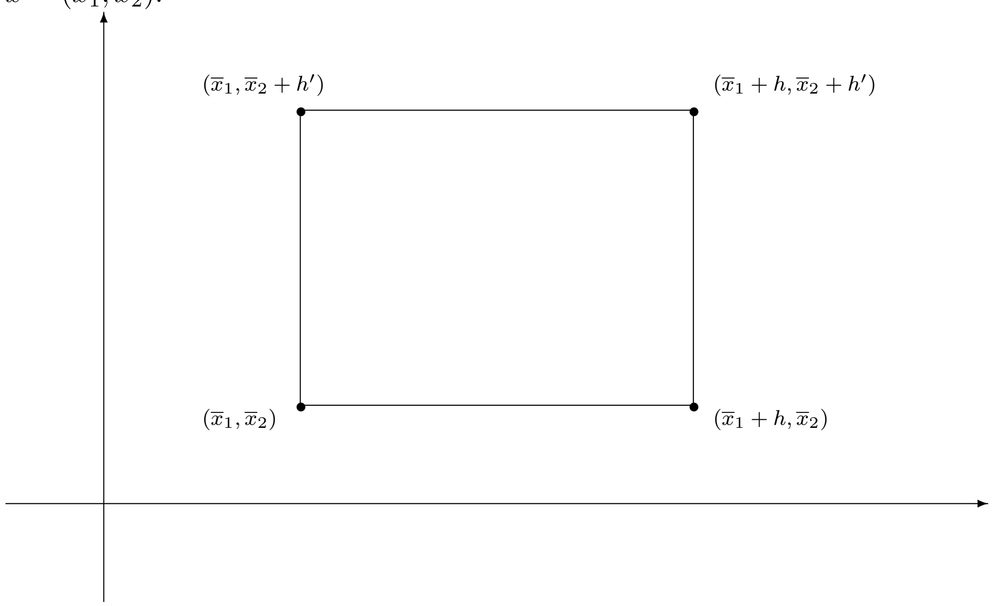
- è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$,
- è dotata di derivate seconde su $\mathbb{R}^2$,
- le due derivate miste sono continue su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ma non in $(0,0)$,
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \ , \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$

[4] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

Teorema 7.31 (**Teorema di Schwarz**). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e si supponga che la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, di classe C^1 su A, ammetta le due derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ in A. Se almeno una delle derivate seconde sia continua in $\overline{x} \in A$, si ha l'uguaglianza*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\overline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\overline{x}) \ . \tag{11.3}$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $j \neq k$. Siccome tutti gli incrementi sono presi nelle sole variabili x_j, x_k, possiamo anche supporre che f dipenda da due sole variabili x_1, x_2. Si fissino h, $h' \neq 0$ tali che il rettangolo di estremi $(\overline{x} + he_1 + h'e_2)$, $(\overline{x} + he_1 + h'e_2)$, $(\overline{x} + he_1 + h'e_2)$, $(\overline{x} + he_1 + h'e_2)$ sia contenuto in A. Per fissare le idee, supponiamo che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ sia continua in $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.



Si consideri quindi l'espressione

$$\begin{aligned} R(h, h') &= \frac{f(\overline{x} + he_1 + h'e_2) - f(\overline{x} + he_1) - f(\overline{x} + h'e_2) + f(\overline{x})}{hh'} \\ &= \frac{f(\overline{x}_1 + h, \overline{x}_2 + h') - f(\overline{x}_1 + h, \overline{x}_2) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2 + h') + f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{hh'} \ , \end{aligned}$$

che compare sia nella formula (11.1) che nella formula (11.2). Secondo il modo in cui si raggruppano a due a due gli addendi a numeratore, essa può essere espressa in due modi:

(i) ponendo

$$\varphi_{h'}(x_1) = \frac{f(x_1, \overline{x}_2 + h') - f(x_1, \overline{x}_2)}{h'} \ ,$$

si ha

$$R(h, h') = \frac{\varphi_{h'}(\overline{x}_1 + h) - \varphi_{h'}(\overline{x}_1)}{h} \ ; \tag{11.4}$$

(ii) ponendo

$$\psi_h(x_2) = \frac{f(\overline{x}_1 + h, x_2) - f(\overline{x}_1, x_2)}{h} \ ,$$

si ha

$$R(h,h') = \frac{\psi_h(\overline{x}_2+h') - \psi_h(\overline{x}_2)}{h'} \ . \tag{11.5}$$

Supponiamo che la derivata $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ sia continua in $\overline{x}$. Usiamo allora la formula (11.4). La funzione $\varphi_{h'}$ è continua sull'intervallo chiuso di estremi $\overline{x}_1$ e $\overline{x}_1+h$ e derivabile al suo interno. Per il teorema di Lagrange, esiste $\theta \in (0,1)$ tale che

$$R(h,h') = \varphi'_{h'}(\overline{x}_1+\theta h) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_1+\theta h, \overline{x}_2+h') - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_1+\theta h, \overline{x}_2)}{h'} \ . \tag{11.6}$$

Siccome $\partial f/\partial_{x_1}$ ammette derivata rispetto a x_2 su A, la funzione

$$u(x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{x}_1+\theta h, x_2) \ ,$$

è continua sull'intervallo chiuso di estremi $\overline{x}_2$ e $\overline{x}_2+h'$ e derivabile al suo interno. Esiste quindi $\theta' \in (0,1)$ tale che

$$R(h,h') = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}_1+\theta h, \overline{x}_2+\theta' h') \ .$$

Si noti che θ, θ' dipendono dalla scelta di h e h', ma sono comunque compresi tra 0 e 1.
Per la continuità della derivata mista in $\overline{x}$, si ha dunque la formula

$$R(h,h') = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + o(1) \qquad (h,h') \to (0,0) \ .$$

Prendiamo ora in considerazione la formula (11.5). Applicando il teorema di Lagrange otteniamo l'analogo della (11.6):

$$R(h,h') = \psi'_h(\overline{x}_2+\theta'' h') = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}_1+h, \overline{x}_2+\theta'' h') - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2+\theta'' h')}{h} \ ,$$

per cui

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}_1+h, \overline{x}_2+\theta'' h') - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2+\theta'' h')}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + o(1) \qquad (h,h') \to (0,0) \ .$$

Con $h \neq 0$ fissato, possiamo passare al limite per $h' \to 0$, ottenendo

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1+h, \bar{x}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + o(1) \qquad h \to 0 \ .$$

Infine con un secondo passaggio al limite, per $h \to 0$, si ha la tesi. □

12. Campi vettoriali, integrali curvilinei, potenziali

In questa sezione studiamo il problema dell'esistenza di un potenziale di un campo vettoriale $F : A \to \mathbb{R}^n$, cioè una funzione V il cui gradiente coincide con F in A (si veda la Definizione 7.12). In tutta questa sezione intenderemo sempre che A è un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$. Per studiare questo problema sarà utile avere una classe di cammini stabile rispetto alle operazioni di *concatenazione*

$$(\gamma+\eta)(t) := \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a,b] \\ \\ \eta(t) & \text{se } t \in [b,c] \end{cases} \qquad\qquad \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \ \eta : [b,c] \to \mathbb{R}^n, \ \gamma(b) = \eta(b)$$

e di *inversione*

$$-\gamma(t) := \gamma(-t) \qquad \gamma : [-b,-a] \to \mathbb{R}^n \ .$$

Ricordiamo che $f \in C^1([a,b])$ vuol dire f continua e derivabile, con derivata continua, in $[a,b]$ (intendendo agli estremi la derivata laterale appropriata).

Definizione 7.32 (**Cammini regolari a tratti**). *Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato. Indichiamo con $PC^1([a,b])$ la classe delle funzioni continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che esistono $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_k = b$ tali che $f|_{[t_i,t_{i+1}]}$ è di classe C^1 in $[t_i,t_{i+1}]$ per $0 \le i < k$, con derivata mai nulla.*
Per mappe vettoriali la definizione è analoga e scriveremo $PC^1([a,b];\mathbb{R}^n)$.

In modo equivalente, possiamo dire che γ è un arco di classe PC^1 se è concatenazione di un numero finito di archi regolari. Nei punti t_j di congiunzione, si possono avere un vettore tangente sinistro diverso dal vettore tangente destro, ma entrambi non nulli.
La nozione di equivalenza $\approx$ si estende ad archi PC^1 stabilendo che $\gamma \approx \delta$ se esistono scomposizioni

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k \ , \qquad \delta = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k \ ,$$

tali che $\gamma_j \approx \delta_j$ per ogni $j = 1, 2, \ldots, k$. [5]

Definizione 7.33 (**Integrale di un campo vettoriale lungo un arco**). *Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma \in PC^1([a,b];\mathbb{R}^n)$. L'integrale $\int_\gamma F$ è definito da*

$$\int_\gamma F := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt \ . \tag{12.1}$$

La definizione (12.1) richiede qualche precisazione in più, perché $\gamma'(t)$ potrebbe non essere definita in tutti i punti di $[a,b]$ (negli eventuali punti dove non lo è, in numero finito, ha discontinuità a salto). Tuttavia, spezzando $\int_a^b = \int_{t_0}^{t_1} + \cdots + \int_{t_{k-1}}^{t_k}$, ognuno degli addendi ha senso se sappiamo che $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ è di classe C^1. In alternativa, si può pensare di definire arbitrariamente la funzione integranda in (12.1) nei punti di discontinuità, visto che modificare una funzione in un numero finito di punti non ne altera né l'integrabilità né l'integrale.

Lemma 7.34. *Valgono le formule*

$$\int_{\gamma+\eta} F = \int_\gamma F + \int_\eta F \ , \qquad \int_{-\gamma} F = -\int_\gamma F \ . \tag{12.2}$$

Inoltre, se $\gamma \approx \delta$,

$$\int_\gamma F = \int_\delta F \ . \tag{12.3}$$

Dimostrazione. La prima identità in (12.2) segue dall'additività dell'integrale e la seconda con un semplice cambiamento di variabile di integrazione.

[5] Si noti che, qualora sia possibile definire entrambe le concatenazioni $\gamma + \eta$ e $\eta + \gamma$ (questo vale, attraverso riparametrizzazioni equivalenti, quando il punto iniziale dell'una coincide con il punto terminale dell'altra), le due operazioni danno luogo ad archi diversi e non necessariamente equivalenti tra loro.

Per provare la (12.3) possiamo limitarci ad archi regolari usando la proprietà di additività in (12.2). In tal caso, se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\delta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ con $\varphi' > 0$ e tale che $\gamma \circ \varphi = \delta$,

$$\begin{aligned}\int_\gamma F &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \\ &= \int_c^d \varphi'(s)\, F(\gamma \circ \varphi(s)) \cdot \gamma'(\varphi(s))\,ds \\ &= \int_c^d F(\gamma \circ \varphi(s)) \cdot (\gamma \circ \varphi)'(s)\,ds \\ &= \int_c^d F(\delta(s)) \cdot \delta'(s)\,ds \\ &= \int_\delta F \ . \qquad \square\end{aligned}$$

La seguente proposizione ci dà una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un potenziale.

Teorema 7.35 (**Campi conservativi ed esistenza del potenziale**). *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso e $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) *F ammette un potenziale in A;*
- (ii) *per ogni cammino chiuso γ di classe PC^1 con immagine contenuta in A, $\int_\gamma F = 0$;*
- (iii) *per ogni coppia di archi γ_1, γ_2 di classe PC^1 con immagine contenuta in A e aventi in comune gli stessi estremi nell'ordine, $\int_{\gamma_1} F = \int_{\gamma_2} F$.*

In tal caso, il potenziale è univocamente determinato a meno di una costante additiva.

Dimostrazione. Nell'ipotesi (i), applicando la regola di derivazione in catena (Proposizione 7.15) si ottiene l'identità

$$\int_\gamma F = \int_\gamma \nabla V = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(V \circ \gamma)(t))\,dt = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) \ .$$

Questo fornisce immediatamente le implicazioni (i) $\Rightarrow$ (ii) e (i) $\Rightarrow$ (iii),
L'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (iii), si osservi che dati due archi γ_1, γ_2 come nell'enunciato (iii), con lo stesso primo estremo x e lo stesso secondo estremo y, la concatenazione $\gamma_1 + (-\gamma_2)$ fornisce un arco chiuso con estremo x. Per l'ipotesi (ii),

$$0 = \int_{\gamma_1 + (-\gamma_2)} F = \int_{\gamma_1} F + \int_{-\gamma_2} F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F \ .$$

Dimostriamo infine l'implicazione (iii) $\Rightarrow$ (i). Fissato $\bar{x} \in A$, indichiamo con $\Gamma(\bar{x}, x)$ la classe dei cammini C^1 a tratti che congiungono $\bar{x}$ a x (non vuota, perché gli aperti connessi sono, per il Teorema 5.85 del Capitolo 5, connessi per archi e, per il successivo Corollario 5.87, due punti di un aperto connesso sono congiungibili con un arco lineare a tratti) e poniamo

$$V(x) := \int_\eta F \ , \qquad \eta \in \Gamma(\bar{x}, x) \ .$$

Per l'ipotesi (iii), la definizione è ben posta perché l'integrale non dipende dal cammino scelto.

Per dimostrare che $\nabla V(x) = F(x)$ per ogni $x \in A$ possiamo usare l'indipendenza della definizione di V dal cammino per scrivere

$$V(x + he_j) - V(x) = h \int_0^1 F_j(x + the_j)\, dt \qquad \forall j \in \{1, \dots, n\},\ h \in \mathbb{R}\ .$$

Infatti basta concatenare un cammino tra $\bar{x}$ e x al cammino lungo la direzione j-sima tra x e $x+he_j$. Abbiamo allora, per il teorema della media integrale,

$$\frac{V(x + he_j) - V(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h F_j(x + te_j)\, dt = F_j(x + t_h e_j)\ ,$$

con t_h compreso tra 0 e h. Passando al limite per $h \to 0$, si ha

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(x) = f_j(x)\ .$$

Il teorema del differenziale totale ci dà anche che V è differenziabile in A.
Per l'unicità del potenziale basta osservare che se $V = V_1 - V_2$ è differenza di potenziali, allora ha gradiente identicamente nullo.
Dati due punti $x, y \in A$, sia $\gamma; [a, b] \longrightarrow A$ un arco con $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$. Allora

$$V(y) - V(x) = \int_\gamma \nabla V = 0\ .$$

Dunque V è costante. □

Per aperti non connessi, segue facilmente dal Corollario 5.86 del Capitolo 5 la seguente estensione.

Corollario 7.36. *Sia F un campo vettoriale continuo su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Le condizioni* (i) *e* (ii) *del Teorema 7.35 sono equivalenti. Se esse sono verificate, il potenziale è univocamente determinato a meno di funzioni costanti su ogni componente connessa di A.*

Alla luce del Teorema 7.35, vogliamo ora capire quali ipotesi su F e A garantiscono che F sia conservativo in A. Consideriamo la condizione (che equivale a dire che il rotore del campo è nullo in dimensione $n = 3$)

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \qquad 1 \le i,\ j \le n\ . \tag{12.4}$$

Diremo che un campo vettoriale $F : A \to \mathbb{R}^n$ è *chiuso*[6] se F è differenziabile e vale la (12.4) in tutti i punti di A. Per il Teorema 7.31 di Schwarz, se le derivate parziali di F sono anche continue la condizione (12.4) è necessaria per l'esistenza di un potenziale. Mostriamo che, anche senza questa ipotesi, la (12.4) diventa sufficiente se aggiungiamo un'ipotesi sulla struttura del dominio A.
Per la dimostrazione ci sarà utile estendere alla classe delle funzioni $PC^1([a, b])$ alcune formule del calcolo integrale. La prima è la formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f(t)g'(t)\, dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\, dt\ ,$$

che si ottiene immediatamente dalla formula classica spezzando l'insieme di integrazione nell'unione degli intervalli $[t_i, t_{i+1}]$, avendo scelto i t_i in modo che f e g appartengano a $C^1([t_i, t_{i+1}])$. La seconda formula è il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, che enunciamo e dimostriamo esplicitamente.

[6] In dimensione 3 si usa il termine *irrotazionale*.

Teorema 7.37 (**Derivazione sotto il segno di integrale**). *Sia $L : [a, b] \times (c, d) \to \mathbb{R}$ continua. Allora la funzione*

$$\varphi(s) = \int_a^b L(t, s)\, dt$$

è continua su (c, d).
Se inoltre $\frac{d}{ds}L(t, s)$ è continua in $[a, b] \times (c, d)$, allora

$$\frac{d}{ds}\int_a^b L(t, s)\, dt = \int_a^b \frac{d}{ds}L(t, s)\, dt \qquad \forall s \in (c, d)\ .$$

Dimostrazione. Dimostriamo la seconda parte dell'enunciato. La dimostrazione della prima utilizza lo stesso argomento di continuità uniforme e procede in modo più semplice.
Fissati $s \in (c, d)$ e un intervallo $[s - \delta, s + \delta] \subset (c, d)$, per $h \in [-\delta, \delta] \setminus \{0\}$ abbiamo

$$\frac{\int_a^b L(t, s + h)\, dt - \int_a^b L(t, s)\, dt}{h} = \int_a^b \frac{L(t, s + h) - L(t, s)}{h}\, dt = \int_a^b \frac{d}{ds}L(t, s + \theta(s, t, h))\, dt$$

con $|\theta(s, t, h)| < h$. Grazie all'uniforme continuità di $\frac{d}{ds}L(s, t)$ in $[a, b] \times [s - \delta, s + \delta]$ garantita da (ii) abbiamo

$$\frac{d}{ds}L(t, s + \theta(s, t, h)) \to \frac{d}{ds}L(t, s) \qquad \text{uniformemente in } [a, b], \text{ per } h \to 0\ .$$

Quindi il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale[7] ci consente di concludere. □

Teorema 7.38 (**Esistenza di potenziali per campi chiusi**). *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso e $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale chiuso e di classe C^1. Allora F ha un potenziale $V \in C^2(A)$.*

Dimostrazione. Tenendo presente la Proposizione 7.35, basterà dimostrare che F è conservativo in A, i.e. $\int_\gamma F = 0$ per ogni cammino $\gamma \in PC^1([a, b]; \mathbb{R}^n)$ chiuso contenuto in A. Sia γ un tale cammino. A meno di una traslazione, possiamo supporre che $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$.
Poniamo

$$I(s) := \int_{\gamma_s} F = s\int_a^b \sum_{i=1}^n F_i\big(s\gamma(t)\big)\gamma_i'(t)\, dt\ ,$$

ove γ_s è il cammino deformato con un'omotetia rispetto all'origine, i.e. $\gamma_s(t) = s\gamma(t)$, $0 < s \leq 1$. È immediato verificare, grazie allla prima parte del Teorema 7.37, che I, estesa in 0 ponendo $I(0) = 0$, è una funzione continua in $[0, 1]$.
Calcoliamo la derivata di $I(s)$, usando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale nei domini $[t_i, t_{i+1}] \times (0, 1)$ e con la funzione

$$L(t, s) = \sum_{i=1}^n F_i(s\gamma(t))\gamma_i'(t)\ , \qquad \frac{d}{ds}L(t, s) = s\sum_{i,\, j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(s\gamma(t))\gamma_j(t)\gamma_i'(t)$$

intendendo nei valori estremi $t = t_i$,$t = t_{i+1}$ le derivate destre e sinistre rispettivamente. Usando prima il fatto che F è chiuso, poi il fatto che γ è un cammino chiuso otteniamo:

$$I'(s) \quad = \quad \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(s\gamma(t))\gamma_i'(t)\, dt + s\int_a^b \sum_{i,\, j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(s\gamma(t))\gamma_j(t)\gamma_i'(t)\, dt$$

[7] Se g_h sono funzioni integrabili secondo Riemann in $[a, b]$, convergenti uniformemente in $[a, b]$ a g, allora g è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ e $\lim\limits_{h\to\infty} \int_a^b g_h(t)\, dt = \int_a^b g(t)\, dt$.

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(s\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt + s\int_a^b \sum_{i,\,j=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(s\gamma(t))\gamma_j(t)\gamma_i'(t)\,dt \\
&= \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i(s\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt + \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}\big[F_j(s\gamma(t))\big]\gamma_j(t)\,dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^n F_j(s\gamma(t))\gamma_j(t)\Big)\,dt \\
&= \sum_{j=1}^n F_j(s\gamma(b))\gamma_j(b) - \sum_{j=1}^n F_j(s\gamma(a))\gamma_j(a) = 0 \ .
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi che I ha derivata nulla in $(0,1)$, quindi è costante in $[0,1]$. Dato che $I(0)=0$ e $I(1)=\int_\gamma F$, questo mostra che F ha integrale nullo su ogni cammino chiuso. □

Si noti che la conclusione del Teorema 7.38 non vale per un campo chiuso su un generico aperto connesso. Si consideri ad esempio $A=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e il campo

$$
F(x,y)=\Big(\frac{-y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\Big) \ .
$$

È facile verificare che il campo F è chiuso, quindi in ogni aperto convesso contenuto in A il campo ha un potenziale (ad esempio,[8] $V(x,y)=\operatorname{arctg}(y/x)$ nelle regioni in cui $x\neq 0$, $V(x,y)=\operatorname{arcctg}(x/y)$ nelle regioni in cui $y\neq 0$). Tuttavia questi potenziali locali non possono dar luogo a un potenziale globale, dato che per $\gamma(t)=(\sin t,\cos t)$ si ha $\int_\gamma F=-2\pi\neq 0$.

Osservazione 7.39 (Approfondimenti). (1) Anche se abbiamo trattato l'argomento in un fissato sistema di coordinate, è bene tenere presente che tutto quello che abbiamo detto può essere formulato nel linguaggio degli spazi vettoriali, dei vettori e dei co-vettori (si ricordi la distinzione tra gradiente e differenziale), senza far riferimento a un sistema privilegiato di coordinate. Da questo punto di vista, un campo vettoriale F va inteso in realtà come campo di *covettori*, i.e. in ogni punto di $x\in A$ è definito un funzionale lineare $F_x:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, mentre $\gamma'(t)$ è inteso come *vettore* tangente alla curva in $x=\gamma(t)$, dimodoché $F_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$ ha senso e l'integrale curvilineo diventa

$$
\int_\gamma F=\int_a^b F_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\,dt \qquad\qquad \gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n \ .
$$

La definizione di potenziale allora è $F=dV$, i.e. $F_x(v)=d_xV(v)$ per ogni vettore v. Nel sistema di coordinate canonico, usando il prodotto scalare per scrivere $d_xV(v)=\langle\nabla V(x),v\rangle$, questi concetti si riducono a quelli usuali.

(2) Osserviamo infine che in tutta questa sezione sarebbe stato sufficiente lavorare nella sottoclasse dei cammini affini a tratti (i.e. richiedendo a γ' di essere costante negli intervalli $[t_i,t_{i+1}]$), dato che gli aperti connessi sono connessi per archi affini a tratti.

(2) L'esempio precedente mostra che qualche ipotesi sull'insieme A è necessaria per poter costruire un potenziale a partire da un campo chiuso. Tuttavia, la convessità non è la condizione ottimale, ad esempio in dimensione 3 il risultato sarebbe valido per $A=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, che non è convesso. L'ipotesi ottimale richiede la possibilità di rappresentare ogni cammino *semplice e chiuso* contenuto in A come frontiera orientata in senso orario o antiorario di una superficie U interamente contenuta in

[8] Ponendo $z=x+iy$, possiamo dire che $V(z)=\arg z$ è un potenziale su ogni aperto in cui si possa scegliere in modo continuo una determinazione della funzione argomento.

A. La dimostrazione richiede la possibilità di decomporre ogni cammino chiuso γ come somma, finita (se i cammini sono affini a tratti) o numerabile (nel caso generale) di cammini semplici e chiusi γ_i che percorrono in senso orario o antiorario la frontiera di opportuni insiemi U_i, con U_i poliedrale se γ è affine a tratti; a ognuno di questi cammini γ_i si applica poi in dimensione $n = 2$ la formula di Green che lega l'integrale curvilineo lungo γ_i a un integrale doppio esteso al dominio U_i:

$$\int_{\gamma_i} F = \pm \int_{U_i} \big(\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\big)\, dxdy \qquad \text{(il segno dipende dal verso di percorrenza)}\ .$$

Tale teorema consente di concludere, se F è chiuso, che $\int_{\gamma_i} F = 0$. In dimensione $n = 3$ o superiore è necessario usare il cosiddetto teorema di Stokes, e in ogni caso le tecniche richieste per una trattazione rigorosa non sono elementari, neanche in dimensione 2.

CAPITOLO 8

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Si richiede la conoscenza di nozioni e risultati relativi all'integrale di Riemann (proprio e improprio) e all'integrazione indefinita. In particolare useremo il teorema fondamentale del calcolo integrale nella seguente formulazione: *siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ continua; allora la funzione integrale $F : I \to \mathbb{R}$ definita da*

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

(qui adottiamo la convenzione, coerente con la teoria degli integrali curvilinei, $\int_a^b = -\int_b^a$, quindi non importa che gli estremi dell'insieme di integrazione siano ordinati) è derivabile in I e la sua derivata vale f.

1. Definizioni e primi esempi

Un'*equazione differenziale ordinaria di ordine* n ha come incognita una funzione $y(x)$ definita su intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ (spesso non assegnato a priori) e ivi derivabile n volte. L'equazione consiste nel richiedere che, per ogni $x \in I$, gli $n+2$ numeri

$$x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x) \ ,$$

soddisfino una data relazione. Continuando a usare le notazioni tradizionali y', y'', y''' per derivate di ordine fino a 3, esempi di equazioni differenziali sono:

$$y' = xy \ , \qquad y^2 + {y'}^2 = 1 \ , \qquad \frac{y'''}{y' + x} = y'' \ , \qquad \text{ecc.}$$

L'aggettivo "ordinaria" attribuito all'equazione differenziale si riferisce al fatto che le funzioni incognite dipendono da una sola variabile. Il termine serve quindi a distinguere le equazioni ordinarie dalle *equazioni alle derivate parziali*. Siccome di queste non parleremo (a parte il sistema di equazioni alle derivate parziali $\nabla V = F$ trattato nel capitolo precedente), perchè argomento di corsi (molto) più avanzati di Analisi, diremo brevemente "equazione differenziale" sottintendendo il termine "ordinaria".

In generale, un'equazione differenziale è definita in termini di una funzione g di $n+2$ variabili, definita su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, ponendo

$$g\big(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \ . \tag{1.1}$$

Ovviamente, se $y(x)$, definita su un intervallo I, è soluzione di un'equazione differenziale, la sua restrizione a un qualunque sottointervallo $I' \subseteq I$ è pure una soluzione. È dunque interessante conoscere l'insieme delle *soluzioni massimali*, cioè quelle non prolungabili (mantenendo la continuità

e la differenziabilità) a soluzioni definite su intervalli più ampi. L'insieme delle soluzioni massimali si chiama *integrale generale* dell'equazione differenziale. Una singola soluzione dell'equazione differenziale si chiama anche *integrale particolare* dell'equazione.
L'equazione differenziale si dice in *forma normale* se $A = B \times \mathbb{R}$ con $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e nell'equazione (1.1) è possibile isolare l'ultima variabile, i.e. la derivata di ordine massimo, a primo membro:

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \tag{1.2}$$

per una qualche funzione $f : B \to \mathbb{R}$. Per equazioni differenziali in forma normale il *problema di Cauchy* consiste nel risolvere l'equazione (1.2) in un dato intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ con le n condizioni iniziali

$$y(x_0) = y_{0,1}\ , y^{(1)}(x_0) = y_{0,2}\ \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n}$$

per un certo $x_0 \in I$ e $y_0 = (y_{0,1}, \ldots, y_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$.

Esempi.
1. Data una funzione continua $h(x)$ su un intervallo I, l'equazione

$$y'(x) = h(x) \qquad \forall x \in I$$

ha come soluzioni massimali le primitive di h su I. Quindi, se $H(x)$ è una tale primitiva, l'integrale generale dell'equazione coincide con l'*integrale indefinito* di h, ossia l'insieme delle funzioni

$$y(x) = H(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}\ .$$

Già a livello di questa semplicissima equazione differenziale le questioni dell'esistenza e dell'unicità delle soluzioni per il problema di Cauchy (i.e. avendo assegnato $y(x_0) = y_0$) diventano interessanti. Applicando il teorema di Lagrange alla differenza di due soluzioni troviamo subito che l'unicità vale sempre, mentre una condizione sufficiente per l'esistenza è, per il teorema fondamentale del calcolo, che h sia continua in I; in tal caso la soluzione è $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} h(t)\, dt$.

2. L'integrale generale di un'equazione differenziale può avere una struttura più complessa. Per esempio, l'equazione

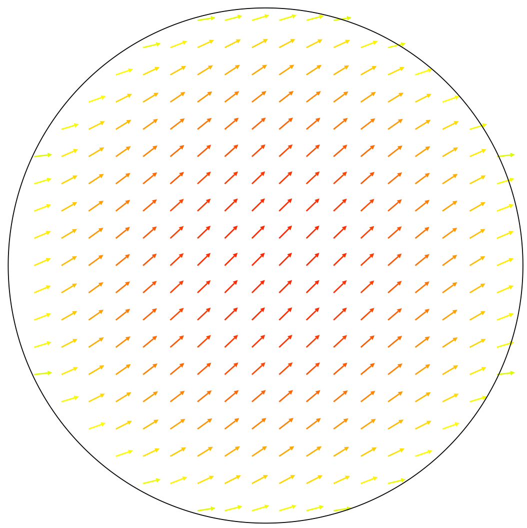
$$y^2 + {y'}^2 = 1$$

ha come soluzioni le sinusoidi $y(x) = \sin(x + \alpha)$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$, le due funzioni costanti $y(x) = \pm 1$, ma anche tutte le funzioni ottenute raccordando con continuità, su intervalli adiacenti, alternativamente sinusoidi e tratti con valore costante ± 1.

3. Per un'equazione del primo ordine in forma normale,

$$y'(x) = f(x, y)\ ,$$

il grafico delle soluzioni deve essere ovviamente contenuto nel dominio della funzione f. La funzione f assegna in ogni punto del dominio la "pendenza" che il grafico di una soluzione deve avere se passa per quel punto. La figura mostra il caso dell'equazione $y' = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.



4. Nei casi più comuni in cui serva studiare un'equazione in forma non normale, si cerca di ricondurla a una, o più, equazioni in forma normale risolvendo l'equazione implicita $g(t, u_0, u_1, \dots, u_n) = 0$ nella variabile u_n (cioè ricercando nell'equazione implicita $g = 0$ le eventuali funzioni $u_n = f(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ implicitamente definite in essa). L'equazione dell'Esempio 2 si riduce in forma normale dando luogo alle due equazioni

$$y' = \sqrt{1 - y^2} \ , \qquad y' = -\sqrt{1 - y^2} \ . \tag{1.3}$$

Si noti tuttavia che le soluzioni della prima equazione sono crescenti e quelle della seconda decrescenti. Quindi non tutte le soluzioni massimali trovate nell'Esempio 2 rientrano in uno dei due integrali generali delle equazioni in (1.3) (però rientrano "a tratti" in uno dei due alternativamente). Nel seguito ci limiteremo a considerare solo equazioni differenziali in forma normale, anche senza specificarlo esplicitamente.

2. Metodi risolutivi per alcuni tipi di equazioni del primo ordine

Poter risolvere esplicitamente un'equazione differenziale è un caso piuttosto raro. In questo paragrafo vediamo i casi più comuni in cui si possono dare metodi di calcolo esplicito.

2.1. Equazioni a variabili separabili. Si chiamano in tal modo le equazioni della forma

$$y'(x) = f(x)g(y) \ , \tag{2.1}$$

con f, g continue sugli intervalli I, J rispettivamente.
Per prima cosa si osserva che, se $\alpha \in J$ è uno zero di g, cioè $g(\alpha) = 0$, la funzione costante

$$y(x) = \alpha \tag{2.2}$$

sull'intervallo I è soluzione. Si fissi quindi un intervallo $J' \subseteq J$ che non contenga zeri di g e massimale rispetto a questa proprietà.

Si supponga che $y(x)$ sia una soluzione dell'equazione con grafico contenuto in $I \times J'$, definita su un intervallo $I' \subseteq I$ da determinarsi. Vale allora l'identità

$$\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = f(x) \ , \qquad \forall\, x \in I' \ .$$

Si prenda ora una primitiva G di $1/g$ su J' e si osservi che

$$\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = (G \circ y)'(x) \ ,$$

per cui

$$(G \circ y)'(x) = f(x) \ , \qquad \forall\, x \in I' \ .$$

Si prenda ora una primitiva F di f su I. Esiste una costante c tale che

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + c \ , \qquad \forall\, x \in I' \ .$$

Avendo g segno costante su J', G è strettamente monotona, e dunque invertibile. Quindi

$$y(x) = G^{-1}\big(F(x) + c\big) \ . \tag{2.3}$$

Il dominio di questa soluzione sarà dunque

$$I'_c = \big\{x \in I : F(x) + c \in \operatorname{im} G\big\} \ .$$

Queste funzioni, al variare degli intervalli J' scelti come sopra e insieme alle soluzioni costanti dell'equazione (2.2), consentono di esprimere l'integrale generale[1].

Un metodo pratico per trovare le soluzioni non costanti (ma che sottintende il ragionamento rigoroso esposto sopra) è il seguente. Si scriva l'equazione (2.1) nella forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \ ,$$

e la si trasformi, in modo puramente formale in

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx \ .$$

Inserendo in ambo i membri il segno di integrazione indefinita, si arriva all'espressione

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx \ .$$

Fissate due primitive, F di f e G di $1/g$, come sopra, si ottiene la relazione

$$G(y) = F(x) + c \ ,$$

dipendente dal parametro c, che va risolta in y. Questo vuol dire trovare le funzioni inverse dei singoli rami monotoni di G, e dunque arrivare alla formula (2.3).

[1] L'espressione esplicita dell'integrale generale completo può essere complicata, perché è possibile che due soluzioni tra quelle trovate sopra si raccordino in punti particolari dando luogo a possibili ramificazioni. Si veda l'esempio di non unicità (3.2) più avanti.

2.2. *Equazioni lineari. [2] Un'*equazione differenziale lineare del primo ordine* ha la forma

$$y' = a(x)y + b(x) \ , \tag{2.4}$$

con a, b funzioni continue su un intervallo I. L'equazione si dice *omogenea* se $b = 0$.
Per risolvere l'equazione (2.4), si studia prima l'equazione omogenea associata

$$y' = a(x)y \ ,$$

che è a variabili separabili. L'integrale generale (si veda la sezione precedente) è dato dalla formula seguente, dove $A(x)$ è una primitiva di a in I,

$$y(x) = ce^{A(x)} \ , \qquad c \in \mathbb{R} \ ,$$

che comprende anche la soluzione costante $y(x) = 0$.
Risolta l'equazione omogenea applicata, si trova l'integrale generale dell'equazione (2.4) con il cosiddetto *metodo della variazione delle costanti.* Si cerca cioè una soluzione della forma

$$y(x) = c(x)e^{A(x)} \ .$$

Sostituendo questa espressione nell'equazione (2.4), si ha

$$c'(x)e^{A(x)} + c(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)c(x)e^{A(x)} + b(x) \ .$$

Semplificando, si arriva a

$$c'(x) = b(x)e^{-A(x)} \ ,$$

che si risolve con una integrazione indefinita. Le soluzioni massimali dell'equazione (2.4) sono tutte e sole le funzioni definite su I della forma

$$y(x) = e^{A(x)}\Big(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\, dt + c\Big) \ , \tag{2.5}$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e x_0 è un punto di I fissato.
Tornando al problema di Cauchy, può essere utile scegliere tra tutte le primitive di a quella che si annulla in x_0, i.e. $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$. In tal caso la costante c in (2.5) coincide proprio con y_0 e possiamo anche scrivere la soluzione trovata nella forma

$$y(x) = \Big(\int_{x_0}^{x} b(t)e^{\int_t^x a(s)\, ds}\, dt + y_0\Big) \ .$$

Svolgendo i passaggi a ritroso, si mostri che questa è effettivamente l'unica soluzione del problema di Cauchy (fatto che poi ci verrà garantito, per equazioni più generali, dal teorema di Cauchy–Lipschitz).

2.3. *Equazioni di Bernoulli. Sono equazioni non lineari del tipo

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u^{\alpha}(t) \qquad \alpha \neq 0, 1$$

con a e b continue. Col cambio di variabile $v(t) = u^{1-\alpha}(t)$ si riducono a equazioni lineari del primo ordine:

$$v'(t) = (1-\alpha)a(t)v(t) + (1-\alpha)b(t) \,.$$

[2]! paragrafi 2.2-2.5 non sono compresi nel programma di esame 2018

2.4. *Inversione delle variabili. Alcune equazioni non lineari si semplificano prendendo t come variabile dipendente e u come variabile indipendente. Ad esempio l'equazione

$$u'(t) = \frac{t^3}{t^4 + u(t)}$$

diventa un'equazione del tipo di Bernoulli:

$$t'(u) = t(u) + t^{-3}(u)u\,.$$

2.5. *Equazioni omogenee. Sono del tipo $u'(t) = g(u(t)/t)$. Si riducono all'equazione a variabili separabili

$$v'(t) = \frac{g(v(t)) - v(t)}{t}$$

con il cambio di variabili $u(t) = tv(t)$.

3. Problemi di Cauchy per equazioni del primo ordine

Si consideri un'equazione differenziale del primo ordine,

$$y' = f(x, y)\ ,$$

con f definita su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, che tipicamente supporremo almeno continua.
Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, si vogliono conoscere le soluzioni dell'equazione il cui grafico passi per tale punto. Si vuole cioè studiare il sistema

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0\ . \end{cases} \tag{3.1}$$

Questo problema prende il nome di *problema di Cauchy*. Le questioni fondamentali riguardano l'*esistenza* e l'*unicità* di tali soluzioni. Si noti che, come abbiamo già detto, ha senso porsi il problema solo per funzioni il cui grafico è contenuto in A, perchè f non è definita fuori di A e in molti casi concreti non ha un'estensione continua a un insieme più grande di A. Cercheremo quindi funzioni continue e derivabili definite su intervalli aperti I contenenti x_0, il cui grafico sia contenuto in A; tali funzioni sono necessariamente di classe C^1, dato che $y'(x) = f(x, y(x))$; se poi f avesse una regolarità maggiore, di classe C^k, dall'equazione stessa si dedurrebbe anche, per induzione su k, che y è derivabile con continuità $k + 1$ volte in I.
Senza ipotesi ulteriori sulla funzione f, l'esistenza e l'unicità (o entrambe) non sono verificate in generale, come mostrano i seguenti esempi.

- Non esistenza: posto $\operatorname{sgn} y = -1$ per $y < 0$ e $\operatorname{sgn} y = 1$ per $y \geq 0$, il problema di Cauchy

  $$\begin{cases} y' = 1 + \operatorname{sgn} y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

  non può avere soluzione. Infatti una sua ipotetica soluzione avrebbe derivata $y'(0) = 2$ e sarebbe dunque strettamente negativa in un intorno sinistro di 0. Ma se $y(x) < 0$ allora $y'(x) = 0$, quindi $y(x)$ sarebbe costante (e strettamente negativa) in un intorno sinistro di 0, il che è incompatibile con il dato iniziale.

- Non unicità: il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

ha almeno due soluzioni: $y(x) = x^3$ e $y(x) = 0$.[3]

I due paragrafi successivi saranno dedicati alla dimostrazione di un fondamentale teorema che garantisce l'esistenza e l'unicità locale della soluzione di un problema di Cauchy, noto anche come *teorema di Cauchy–Lipschitz*.
Per formulare e dimostrare il teorema, abbiamo bisogno di definire la condizione di *locale Lipschitzianità in una singola variabile*, che sarà imposta sulla funzione f, e introdurre il *principio delle contrazioni* su spazi metrici completi.
Iniziamo con la nozione di Lipschitzianità (globale e locale) nella variabile y.

DEFINIZIONE 8.1 (**Funzioni Lipschitziane e localmente Lipschitziane nella variabile** y). *Sia f una funzione definita su un rettangolo $R = I \times J$. Si dice che f è Lipschitziana*[4] *nella variabile y se esiste una costante $L \geq 0$ tale che*

$$\big|f(x,y_1) - f(x,y_2)\big| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall x \in I,\, \forall y_1, y_2) \in J\ . \tag{3.3}$$

Se $f : A \to \mathbb{R}$ è definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, diremo che f è localmente Lipschitziana nella variabile y se per ogni (x_0, y_0) esiste un rettangolo $R \subseteq A$ centrato in (x_0, y_0) e tale che $f|_R$ è Lipschitziana rispetto alla variabile y.

LEMMA 8.2. *Sia f localmente Lipschitziana nella variabile y su un aperto A. Allora f è Lipschitziana nella variabile y su ogni rettangolo compatto $R \subset A$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $R = I \times J \subset A$ compatto. Per ogni punto $p = (x, y) \in R$ sia R_p un rettangolo aperto centrato in p su cui f sia Lipschitziana nella y. Per compattezza, R è ricopribile con un numero finito di rettangoli R_{p_i}, $i = 1, \dots, N$. Se L_i indica la costante di Lipschitz su R_{p_i}, sia $L = \max\{L_i : i = 1, \dots, N\}$.
Fissato $x \in I$, i rettangoli R_{p_i} intercettano sulla retta verticale $\{x\} \times \mathbb{R}$ un numero finito di intervalli aperti $\{x\} \times J_i$ dove gli intervalli $J_i = (y_i - r_i, y_i + r_i)$ ricoprono J.
Dati $y, y' \in J$ con $y < y'$, scegliamo i_1 in modo che J_{i_1} contenga y, J_{i_2} contenga l'estremo $y_{i_1} + r_{i_1}$ di J_{i_1}, e induttivamente J_{i_k} contenga l'estremo $y_{i_{k-1}} + r_{i_{k-1}}$ di $J_{i_{k-1}}$, arrestandoci al primo indice k_0 per cui $y' \in J_{i_{k_0}}$.
Essendo gli intervalli J_i aperti, è possibile selezionare punti $t_1, \dots, t_{k_0-1}$ tali che $y < t_1 < \cdots < t_{k_0-1} < y'$ e $t_k \in J_{i_k} \cap J_{i_{k+1}}$. Si ha allora

$$\begin{aligned} \big|f(x,y) - f(x,y')\big| &\leq \big|f(x,y) - f(x,t_1)\big| + \sum_{k=1}^{k_0-2} \big|f(x,t_k) - f(x,t_{k+1})\big| + \big|f(x,t_{k_0-1}) - f(x,y')\big| \\ &\leq L\big((t_1 - y) + (t_2 - t_1) + \cdots + (y' - t_{k_0-1})\big) \\ &= L(y' - y)\ . \end{aligned}$$

□

[3] Se ne trovino infinite altre.

[4] Si sottointende: uniformemente rispetto alla variabile $x \in I$.

4. Contrazioni in spazi metrici

Sia (X, d) uno spazio metrico. Una funzione $T : X \longrightarrow X$ si dice una contrazione di X se è Lipschitziana con costante di Lipschitz $\lambda < 1$.

Teorema 8.3 (**Teorema delle contrazioni**). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e sia T una contrazione di X. Esiste allora un unico punto fisso $\bar{x}$ di T in X, cioè tale che $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Dato un qualsiasi $x \in X$, vale inoltre la stima*

$$d(\bar{x}, x) \leq \frac{d(x, T(x))}{1-\lambda} \ , \tag{4.1}$$

con λ uguale alla costante di Lipschitz di T.

Dimostrazione. Preso un punto $x = x_0 \in X$, si definisca ricorsivamente

$$x_{n+1} = T(x_n) \ .$$

Essendo $d(x_n, x_{n+1}) = d(T(x_{n-1}), T(x_n))$, si verifica per induzione che vale la disuguaglianza

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1) \ .$$

Dati allora due interi $m < n$, si ha

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq (\lambda^m + \cdots + \lambda^{n-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \lambda^m \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Big) d(x_0, x_1) = \frac{\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0, x_1) \ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Essendo $\lambda < 1$, questo implica che la successione (x_n) è di Cauchy e dunque che converge a un punto $\bar{x} \in X$. Essendo T continua, si ha

$$T(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x} \ .$$

Quindi $\bar{x}$ è un punto fisso di T, e questo dimostra l'esistenza di un punto fisso.
Per dimostrare l'unicità, si supponga che $\bar{x}$, $\bar{y}$ siano punti fissi. Allora

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d\big(T(\bar{x}), T(\bar{y})\big) \leq \lambda d(\bar{x}, \bar{y}) \ .$$

Essendo $\lambda < 1$, deve essere $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, cioè $\bar{x} = \bar{y}$. Infine la stima (4.1) si ottiene scegliendo $m = 0$ e passando al limite per $n \to \infty$ nella disuguaglianza (4.2). Una dimostrazione alternativa usa le disuguaglianze

$$d(\bar{x}, x) \leq d(\bar{x}, T(x)) + d(T(x), x) = d(T(\bar{x}), T(x)) + d(T(x), x) \leq \lambda d(\bar{x}, x) + d(T(x), x). \qquad \square$$

5. Esistenza e unicità locale di soluzioni ai problemi di Cauchy

In questo paragrafo diamo i risultati generali riguardanti esistenza e unicità di soluzioni a problemi di Cauchy con dato iniziale (x_0, y_0) in un aperto A di $\mathbb{R}^2$ su cui la funzione f che definisce l'equazione differenziale sia continua e localmente Lipschitziana nella variabile y.
Il seguente enunciato è alla base di tutte le argomentazioni successive.

TEOREMA 8.4 (**Esistenza e unicità locale delle soluzioni**). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua e localmente Lipschitziana nella variabile y.*
Dato $(x_0, y_0) \in A$, sia $R = I \times J \subset A$ un rettangolo compatto centrato in (x_0, y_0). Esiste allora $\ell > 0$ tale che, per ogni intervallo aperto $I' \subset I$ contenente x_0 e di lunghezza $\ell' < \ell$ esista una e una sola soluzione $y : I' \longrightarrow J$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I' \\ y(x_0) = y_0 \ . \end{cases} \tag{5.1}$$

Inoltre tale soluzione si estende a una funzione C^1 su $\overline{I'}$ a valori in $\mathring{J}$.

La dimostrazione utilizza la riduzione del problema di Cauchy (5.1) a un'equazione integrale equivalente, sulla base del seguente enunciato.

LEMMA 8.5. *Siano $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, e $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ e con grafico contenuto in A. Fissato $x_0 \in I$ e posto $y_0 = y(x_0)$, le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

(i) *y è di classe C^1 in I e soddisfa il sistema*[5]

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I \\ y(x_0) = y_0 \ . \end{cases}$$

(ii) *y soddisfa l'equazione integrale*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt \qquad \forall x \in I \ . \tag{5.2}$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che valga la condizione (i). Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} y'(t)\, dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt \ . \end{aligned}$$

Viceversa, si supponga che valga la condizione (ii). Allora $y(x_0) = y_0$. Inoltre, posto $g(t) = f\big(t, y(t)\big)$, la funzione g è continua su I. Segue allora dal teorema fondamentale del calcolo integrale che $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$ è derivabile in I e che $y'(x) = g(x) = f\big(x, y(x)\big)$, quindi con derivata continua. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 8.4. Siano (x_0, y_0) e $R = I \times J \subset A$ come nell'enunciato. Poniamo

$$I = [x_0 - \ell_0, x_0 + \ell_0] \ , \qquad J = [y_0 - h, y_0 + h] \ .$$

Fissiamo un sottointervallo aperto I' di I contenente x_0 e indichiamo con ℓ' la sua lunghezza. Consideriamo lo spazio metrico

$$X = \big\{ y \in C(\overline{I'}) : y(\overline{I'}) \subseteq J \ , \ y(x_0) = y_0 \big\} \ ,$$

dotato della distanza del sup indotta da $C(\overline{I'})$. Chiaramente X è chiuso in $C(\overline{I'})$, che è completo, e dunque è uno spazio metrico completo.

[5] Se I contiene un estremo, in quel punto si intende per "derivata" la derivata laterale appropriata.

Definiamo una funzione $T : X \longrightarrow C(\overline{I'})$ ponendo, per $y \in X$, $T[y]$ uguale alla funzione

$$T[y](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt \ .$$

Chiaramente, la condizione (5.2) equivale a $T[y] = y$, cioè alla condizione che y sia un punto fisso di T. In base al principio delle contrazioni, se, per un dato I', T risulta essere una contrazione di $X(I')$ in sé, esiste una e una sola soluzione dell'equazione (5.2) in X.
Imponiamo per cominciare che T applichi X in sé. La condizione $T[y](x_0) = y_0$ è ovviamente verificata. Rimane da imporre che, per ogni $x \in \overline{I'}$, si abbia

$$\big|T[y](x) - y_0\big| \leq h \ .$$

Posto $M = \max_R |f|$, si ha[6]

$$\big|T[y](x) - y_0\big| = \Big|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt\Big| \leq \int_{x_0}^{x} \big|f\big(t, y(t)\big)\big|\, dt \leq \ell' M \ .$$

La condizione richiesta è soddisfatta se $\ell' M \leq h$, ma se imponiamo la disuguaglianza stretta

$$\ell M < h \ . \tag{5.3}$$

otteniamo anche che gli elementi di X, e dunque l'eventuale punto fisso che cerchiamo, sono a valori in $\overset{\circ}{J}$, come richiesto nell'enunciato.
Imponiamo ora l'ulteriore condizione che T sia una contrazione di X. Date due funzioni y, $z \in X$, si consideri la distanza tra le loro immagini,

$$d\big(T[y], T[z]\big) = \max_{x \in \overline{I'}} \big|\big(T[y]\big)(x) - \big(T[z]\big)(x)\big| \ .$$

Se L è la costante di Lipschitz nella (3.3) su R, per $x \in \overline{I'}$ si ha

$$\begin{aligned}
\big|T[y](x) - T[z](x)\big| &= \Big|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt - \int_{x_0}^{x} f\big(t, z(t)\big)\, dt\Big| \\
&= \Big|\int_{x_0}^{x} \Big(f\big(t, y(t)\big)\, dt - f\big(t, z(t)\big)\Big)\, dt\Big| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \Big|f\big(t, y(t)\big)\, dt - f\big(t, z(t)\big)\Big|\, dt \\
&\leq L \int_{x_0}^{x} \big|y(t) - z(t)\big|\, dt \\
&\leq L\ell'\, d(y, z) \ .
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$d\big(T(y), T(z)\big) \leq L\ell'\, d(y, z) \ ,$$

e la condizione da imporre è dunque

$$L\ell' < 1 \ . \tag{5.4}$$

[6] La formula che segue presuppone che sia $x \geq x_0$. Se $x < x_0$ la disuguaglianza intermedia va sostituita con

$$\Big|\int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\, dt\Big| \leq \int_{x}^{x_0} \big|f\big(t, y(t)\big)\big|\, dt \ .$$

Lo stesso vale in un'altra formula più avanti.

Quindi, ponendo

$$\ell = \min\left\{\ell_0, \frac{h}{M}, \frac{1}{L}\right\} , \tag{5.5}$$

se $\ell' < \ell$, T è una contrazione di X in sé.
Per il Lemma 8.5, l'unico punto fisso di T è dunque l'unica soluzione del problema di Cauchy (5.1) che sia definita sull'intervallo $\overline{I'}$ e abbia valori in J; in più, come già osservato, essa ha immagine contenuta in $\mathring{J}$.
Per completare la dimostrazione, dobbiamo escludere la possibilità che, sull'intervallo I' esista, oltre alla soluzione $y = y_{I'}$ ora trovata, un'altra soluzione $\tilde{y}$ del problema (5.1) che non si estenda a una funzione C^1 sulla chiusura di I'.
Supponendo per assurdo che una tale $\tilde{y}$ esista, indichiamo con E l'insieme dei punti $t \in I'$ tali che $\tilde{y}(t) = y(t)$. Questo insieme è non vuoto, essendo $x_0 \in E$, ed è un sottoinsieme chiuso di I' per la continuità di $y - \tilde{y}$. Se dimostriamo che E è anche aperto, possiamo concludere che $E = I'$ e dunque $\tilde{y} = y_I$.
Sia dunque $t \in E$ e poniamo $u = y(t) = \tilde{y}(t)$. Essendo $u \in \mathring{J}$, esiste un rettangolo compatto $R_0 = I_0 \times J_0$ contenuto in $I' \times J$ e centrato in (t, u). A meno di restringere I_0, possiamo supporre che $y(I_0) \subseteq J_0$.
Applicando la parte dell'enunciato già dimostrata con R_0 in luogo di R e (t, u) in luogo di (x_0, y_0), otteniamo che esiste un intervallo aperto I'' centrato in t e contenuto in I_0 tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in I'' \\ y(t) = u \ . \end{cases}$$

ammetta una soluzione unica a valori in J_0 e che ammetta un'estensione C^1 a $\overline{I''}$. Ma $\overline{I''}$ è un compatto contenuto in I', per cui sia y che $\tilde{y}$ soddisfano tutte queste condizioni. Dunque $y = \tilde{y}$ su I''. □

Vedremo ora varie conseguenze i questo teorema. La prima riguarda un risultato uniforme per dati iniziali (x_0, y_0) variabili su un compatto.

Corollario 8.6 (**Uniformità dell'ampiezza minima ℓ sui compatti**). *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua e localmente Lipschitziana nella variabile y sull'aperto A. Sia inoltre $K \subset A$ compatto. Esiste $\ell > 0$ tale che, per ogni $(x_0, y_0) \in K$ e ogni intervallo I' di lunghezza minore di ℓ contenente x_0 il problema di Cauchy abbia una e una sola soluzione definita su I' e grafico contenuto in A.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui K è un rettangolo $R = I \times J$ con $I = [a, b]$, $J = [\alpha, \beta]$. Esiste $\delta > 0$ tale che, posto $I_\delta = [a - \delta, b + \delta]$ e $J_\delta = [\alpha - \delta, \beta + \delta]$, sia $R_\delta = I_\delta \times J_\delta \subset A$.[7] Per ogni $(x_0, y_0) \in R$, il rettangolo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ è contenuto in R_δ, per cui, ripetendo la dimostrazione del Teorema 8.4, si ottiene che il problema di Cauchy con dato iniziale (x_0, y_0) ha soluzione unica tra le funzioni C^1 a valori in $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ e definite su un qualunque intervallo I' contenente x_0 e di lunghezza minore di

$$\ell = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M_\delta}, \frac{1}{L_\delta}\right\} ,$$

dove $M_\delta = \max_{R_\delta} |f|$, L_δ uguale alla costante di Lipschitz nella (3.3) su R_δ.

[7] Questo si dimostra come segue. Per ogni $(x, y) \in \partial R$ esiste $\delta_{x,y}$ tale che il quadrato chiuso $Q_{x,y}$ di centro (x, y) e lato $2\delta_{x,y}$ sia contenuto in A. Le parti interne di tali quadrati formano un ricoprimento aperto di ∂R. Essendo ∂R compatta, essa si ricopre con un numero finito di quadrati Q_{x_j,y_j}. Basta allora porre $\delta = \min_j \delta_{x_j,y_j}$.

Per concludere la dimostrazione nel caso $K = R$, dobbiamo rimuovere la condizione "a valori in $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$", restrittiva dell'ambito di funzioni tra cui si ha unicità.
Supponiamo allora che il problema di Cauchy con dato iniziale $(x_0, y_0) \in R$ ammetta una soluzione $\tilde{y}$ definita su un intervallo $I' = (a', b')$ di lunghezza minore di ℓ e con grafico contenuto in A, ma non in $I' \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$.
Sia $E = \tilde{y}^{-1}\big([y_0 - \delta, y_0 + \delta]\big) \subsetneq I'$. Per la continuità di $\tilde{y}$, E è un intorno di x_0. Sia allora $I'' = (a'', b'')$ il massimo intervallo aperto contenente x_0 e contenuto in E. Essendo l'inclusione $I'' \subset I'$ propria, dovrà valere almeno una delle disuguaglianze strette $a'' > a'$, $b'' < b'$. Supponiamo valga la seconda.
Allora $\tilde{y}_{|_{I''}}$ ha valori in $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ ed è dunque l'unica soluzione su I'' garantita dal Teorema 8.4, il quale però afferma anche essa si estende per continuità all'intervallo chiuso $[a'', b'']$ con valori nell'intervallo aperto $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$.
Dunque $y_0 - \delta < \tilde{y}(b'') < y_0 + \delta$, ma se così fosse, per la permanenza del segno la doppia disuguaglianza dovrebbe continuare a valere in un intorno destro di b'', in contrasto con la massimalità di I''.
Sia ora K un generico compatto contenuto in A. Esso è ricopribile con un numero finito di rettangoli compatti R_j contenuti in A. Esiste $\ell_j > 0$ per cui vale la tesi enunciata limitatamente a $(x_0, y_0) \in R_j$. Allora, con $\ell = \min_j \ell_j$, la tesi vale per ogni $(x_0, y_0) \in K$. □

E' facile rendersi conto del fatto che le soluzioni fornite dal Teorema 8.4 e dal Corollario 8.6 sono in generale facilmente prolungabili a soluzioni definite su intervalli più ampi. Per esempio, con riferimento al Teorema 8.4, si considerino due soluzioni $y_1(x), y_2(x)$ dello stesso problema di Cauchy con dato iniziale (x_0, y_0), definite su due intervalli aperti diversi, I_1, I_2 contenenti x_0 e di lunghezza minore di ℓ. Segue dall'unicità della soluzione su $I_1 \cap I_2$ che y_1 e y_2 coincidono su $I_1 \cap I_2$ e dunque la loro unione fornisce una soluzione del problema definita su $I_1 \cup I_2$.
Queste considerazioni ci portano a studiare le soluzioni massimali dell'equazione differenziale $y' = f(x, y)$. Il teorema che segue fornisce una risposta completa.

Teorema 8.7 (**Soluzioni massimali**). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}$ continua e localmente Lipschitziana nella variabile y.*

(i) *Per ogni $(x_0, y_0) \in A$ esiste una e una soluzione massimale dell'equazione $y' = f(x, y)$ il cui grafico sia contenuto in A e contenga il punto (x_0, y_0).*
(ii) *A è unione disgiunta dei grafici delle soluzioni massimali.*
(iii) *Sia y una soluzione massimale definita su un intervallo I e $z \in \mathbb{R}$ è un estremo dell'intervallo I, vale la seguente proprietà:*

$$\text{per ogni compatto } K \subset A \text{ esiste } U \text{ intorno di } z \text{ tale che } x \in U \cap I \text{ implica } (x, y(x)) \notin K. \tag{5.6}$$

(iii') *In particolare, se $A = J \times \mathbb{R}$ e l'estremo z di I è interno a J, $|y(x)| \to +\infty$ per $x \to z$.*

Dimostrazione. L'unicità della soluzione massimale è ovvia grazie alle considerazioni già svolte nei teoremi precedenti: due soluzioni massimali y_1 e y_2, rispettivamente definite su intervalli aperti I_1 e I_2 contenenti x_0 e coincidenti nel punto x_0, coincidono in $I_1 \cap I_2$; se fosse $I_1 \neq I_2$, l'unione delle due funzioni sarebbe un prolungamento di entrambe, contraddicendo la loro massimalità.
Mostriamo ora l'esistenza. Dato l'insieme delle coppie (I, y_I), con I intervallo aperto contenente x_0 e $y_I : I \to \mathbb{R}$ soluzione del problema di Cauchy, possiamo definire $I_{\max}$ come l'unione degli intervalli I e definiamo $y : I_{\max} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$y = y_I \quad \text{su } I\ .$$

La definizione è ben posta grazie alla proprietà $y_I \equiv y_{I'}$ su $I \cap I'$ e evidentemente definisce una soluzione massimale.
Mostriamo infine la proprietà (5.6). Supponiamo che esistano una soluzione massimale y definita su I e un compatto $K \subset A$ per i quali la condizione non valga in uno dei due estremi di I. Supponendo per fissare le idee che l'estremo sia $z = \sup I$, questo vuol dire che, per ogni $\delta > 0$ esiste $x \in (z-\delta, z)$ tale che $\big(x, y(x)\big) \in K$.
Per il Corollario 8.6, esiste $\ell > 0$ tale che, per ogni $(x_0, y_0) \in K$ la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale (x_0, y_0) ammetta soluzione in un qualunque intervallo I' contenente x_0 e lunghezza minore di ℓ.
Scegliendo allora, per esempio, $x \in (z - \ell/4, z)$ tale che $\big(x, y(x)\big) \in K$ e $I' = (x - \ell/4, x + \ell/2)$, si ottiene una contraddizione perché la soluzione massimale y e la funzione $\tilde{y}$, soluzione locale del problema di Cauchy con dato iniziale $\big(x, y(x)\big)$ e definita su I', assumono lo stesso valore in x, e dunque coincidono su $I \cap I'$. La loro unione è dunque soluzione dell'equazione differenziale. Ma, essendo $x + \ell/2 > z$, $I \cup I'$ è un intervallo che contiene strettamente I, in contrasto con la massimalità di y. □

6. *Lemma di Gronwall, teoremi del confronto e di esistenza globale

[8]

Vediamo ora altri due importanti strumenti nello studio delle equazioni differenziali, il teorema di confronto e il criterio di esistenza globale. Premettiamo un lemma elementare, ma estremamente utile nelle applicazioni.

LEMMA 8.8 (**Lemma di Gronwall**). *Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $L \in [0, +\infty)$. Sia $w : I \to \mathbb{R}$ derivabile in I, con derivata continua. Allora:*

(a) *$w(x_0) > 0$ e $w'(x) \geq -L|w(x)|$ per ogni $x \in I$ tale che $x > x_0$ implicano $w(x) > 0$ per ogni $x \in I$, $x \geq x_0$;*
(b) *$w(x_0) = 0$ e $w'(x) > -L|w(x)|$ (risp. $w'(x) \geq -L|w(x)|$) per ogni $x \in I$ tale che $x > x_0$ implicano $w(x) > 0$ (risp. $w'(x) \geq 0$) per ogni $x \in I$, $x > x_0$;*
(c) *$w(x_0) < 0$ e $w'(x) \leq L|w(x)|$ per ogni $x \in I$ tale che $x > x_0$ implicano $w(x) < 0$ per ogni $x \in I$, $x \geq x_0$;*
(d) *$w(x_0) = 0$ e $w'(x) < L|w(x)|$ (risp. $w'(x) \leq L|w(x)|$) per ogni $x \in I$ tale che $x > x_0$ implicano $w(x) < 0$ (risp. $w(x) \leq 0$) per ogni $x \in I$, $x > x_0$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta dimostrare i punti (a) e (b), in quanto gli altri due seguono cambiano segno a w.
Per dimostrare il punto (a), si consideri $I' = [x_0, b)$ il massimo sottointervallo di I con estremo sinistro x_0 su cui $w > 0$. Vogliamo dimostrare che

$$w(x) \geq w(x_0)e^{-L(x-x_0)} \qquad \forall x \in I' , \tag{6.1}$$

e dedurre da questo che necessariamente $b = \sup I$.
Posto

$$v(x) = w(x)e^{L(x-x_0)} , \tag{6.2}$$

la disuguaglianza (6.1) equivale a $v(x) \geq w(x_0$ per $x \in I'$.

[8]Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

Ma questo segue immediatamente osservando che $v(x_0) = w(x_0)$, che su I' si ha $w'(x) \geq -Lw(x)$ e che

$$v'(x) = e^{L(x-x_0)}\big(w'(x) + Lw(x)\big) \geq 0 \ , \qquad x \in I' \ .$$

Quindi $w > 0$ su I'. Se fosse $b < \sup I$ si avrebbe un assurdo, perché in tal caso w sarebbe definita e continua in b. La (6.1) si estenderebbe dunque a b dando la disuguaglianza

$$w(b) \geq w(x_0)e^{-L(b-x_0)} > 0 \ .$$

Esisterebbe allora $\delta > 0$ con $w > 0$ su $[x_0, b + \delta)$, contro l'ipotesi.
Per dimostrare il punto (b), supponiamo che valga la disuguaglianza debole per w'. Se, per assurdo, esistesse $x_1 > x_0$, con $x_1 \in I$ e $w(x_1) < 0$, ponendo $u(t) = -w(x_1 - t)$, avremmo $u(0) > 0$ e, per $0 < t < x_1 - x_0$,

$$u'(t) = w'(x_1 - t) \geq -L|u(t)| \ .$$

Avremmo allora la disuguaglianza (6.1)

$$u(t) \geq u(0)e^{-Lt} \ ,$$

per $< t < x_1 - x_0$, cioè

$$w(x) \leq w(x_1)e^{-L(x_1-x)} \qquad \forall\, x \in (x_0, x_1) \ .$$

Per la continuità di w, la stessa disuguaglianza varrebbe in x_0, per cui sarebbe $w(x_0) < 0$, da cui l'assurdo.
Se infine vale la disuguaglianza stretta $w'(x) > -L|w(x)|$ per $x > x_0$, consideriamo la funzione v definita in (6.2). Essendo $w \geq 0$ per $x > x_0$, si ha $v'(x) > 0$ per $x > 0$. Essendo v continua e nulla in x_0, si ha $v(x) > 0$ per $x > x_0$. Ma allora anche $w(x) > 0$ per $x > x_0$. $\square$

A volte serve anche applicare il lemma di Gronwall a sinistra di x_0. Precisamente, invertendo il verso delle disuguaglianze differenziali in (a), (b), (c), (d) (il che corrisponde a invertire l'orientamento dell'asse x), otteniamo le implicazioni:

- (a') $w(x_0) > 0$ e $w'(x) \leq L|w(x)|$ per ogni $x \in I$ tale che $x < x_0$ implicano $w(x) > 0$ per ogni $x \in I$, $x \leq x_0$;
- (b') $w(x_0) = 0$ e $w'(x) < L|w(x)|$ (risp. $w'(x) \leq L|w(x)|$) per ogni $x \in I$ tale che $x < x_0$ implicano $w(x) > 0$ (risp. $w'(x) \geq 0$) per ogni $x \in I$, $x > x_0$;
- (c') $w(x_0) < 0$ e $w'(x) \geq -L|w(x)|$ per ogni $x \in I$ tale che $x < x_0$ implicano $w(x) < 0$ per ogni $x \in I$, $x \leq x_0$;
- (d') $w(x_0) = 0$ e $w'(x) > -L|w(x)|$ (risp. $w'(x) \geq -L|w(x)|$) per ogni $x \in I$ tale che $x < x_0$ implicano $w(x) < 0$ (risp. $w'(x) \leq 0$) per ogni $x \in I$, $x < x_0$.

PROPOSIZIONE 8.9 (**Criterio di confronto**). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e siano $f, g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, con g localmente Lipschitziana nella seconda variabile. Siano u e v funzioni di classe C^1 in I, rispettivamente una "sottosoluzione" e una "soprasoluzione" dei problemi di Cauchy relativi a f e g, vale a dire*

$$u'(x) \leq f(x, u(x)) \ , \qquad v'(x) \geq g(x, v(x)) \qquad \forall x \in I,\ x > x_0 \ . \tag{6.3}$$

Supponiamo inoltre che risulti

$$f(x, u(x)) \leq g(x, u(x)) \qquad \forall x \in I,\ x > x_0 \ . \tag{6.4}$$

Allora valgono le implicazioni

$$\begin{cases} u(x_0) \leq v(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(x) \leq v(x)\ \forall x \in I,\ x \geq x_0 \ , \\ u(x_0) < v(x_0) \quad \Rightarrow \quad u(x) < v(x)\ \forall x \in I,\ x \geq x_0 \ . \end{cases} \tag{6.5}$$

Se invece le condizioni (6.3) *e* (6.4) *valgono per* $x \in I$, $x < x_0$, *allora*

$$\begin{cases} u(x_0) \geq v(x_0) & \Rightarrow \quad u(x) \geq v(x) \ \forall x \in I,\, x \leq x_0 \ , \\ u(x_0) > v(x_0) & \Rightarrow \quad u(x) > v(x) \ \forall x \in I,\, x \leq x_0 \ . \end{cases} \tag{6.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Limitiamoci a mostrare la prima delle due implicazioni, la prova dell'altra è simile. Fissato $a \in I$ con $a > x_0$, poniamo $I' = [x_0, a]$ e indichiamo con J un intervallo chiuso e limitato che contiene $u(I') \cup v(I')$. Ora, posto $w = u - v$, per $x \in I'$ vale

$$\begin{aligned} w'(x) &= u'(x) - v'(x) \leq f(x, u(x)) - g(x, v(x)) \\ &\leq g(x, u(x)) - g(x, v(x)) \leq L|u(x) - v(x)| \\ &= L|w(x)| \ , \end{aligned}$$

ove L è l'estremo superiore delle costanti di Lipschitz di $g(x, \cdot)$ in J, al variare di x in I'. La tesi segue allora dal lemma di Gronwall. □

Osservazione 8.10 (Forma stretta del principio di confronto)**.** Usando le parti del lemma di Gronwall con disuguaglianza forti, si ottengono delle disuguaglianze strette come conseguenza della disuguaglianza stretta nella formula (6.4), vale a dire $f(x, u(x)) < g(x, u(x))$ per ogni $x \in I$, $x > x_0$, garantisce la validità delle implicazioni:

$$\begin{cases} u(x_0) \leq v(x_0) & \Rightarrow \quad u(x) < v(x) \ \forall x \in I,\, x > x_0 \ , \\ u(x_0) \geq v(x_0) & \Rightarrow \quad u(x) > v(x) \ \forall x \in I,\, x < x_0 \ . \end{cases} \tag{6.7}$$

□

Spesso nella pratica, non potendo calcolare esplicitamente la soluzione u, la (6.4) si verifica usando l'informazione che $f \leq g$ globalmente. Si noti anche che avremmo potuto sostituire la (6.4) con $f(x, v(x)) \leq g(x, v(x))$, supponendo invece che sia f e non g ad essere Lipschitziana nella variabile y sui rettangoli compatti contenuti in $I \times \mathbb{R}$.
Vediamo ora un'applicazione, ottenendo un criterio di esistenza globale, e discutiamo poi alcuni esempi tratti dalla raccolta di esercizi risolti: *E.Acerbi, L.Modica, S.Spagnolo, Problemi scelti di Analisi Matematica II, Liguori, 1986.*

TEOREMA 8.11 (**Criterio di esistenza globale**). *Sia* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo aperto,* $K \in [0, +\infty)$ *e sia* $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua e localmente Lipschitziana nella seconda variabile, tale che*

$$|f(x, y)| \leq K(1 + |y|) \quad \forall (x, y) \in I \times \mathbb{R} \ . \tag{6.8}$$

Allora per ogni $x_0 \in I$ *e* $y_0 \in \mathbb{R}$, *la soluzione massimale del problema di Cauchy* (3.1) *è definita su tutto l'insieme* I.

DIMOSTRAZIONE. Sia $y : I_{\max} \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale tale che $y(x_0) = y_0$. Per studiare la crescita di y consideriamo la funzione $w(x) = \sqrt{1 + y^2(x)}$ (come sostituto di $|y(x)|$, che non è a priori derivabile). Abbiamo allora

$$\begin{aligned} |w'(x)| &= \Big| \frac{y(x) y'(x)}{\sqrt{1 + |y^2(x)|}} \Big| \leq |f(x, y(x))| \\ &\leq K(1 + |y(x)|) \leq 2K w(x) \end{aligned}$$

per ogni $x \in I$.

La formula risolutiva (2.5) delle equazioni lineari e il criterio di confronto[9] ci dicono allora che

$$|y(x)| \leq w(x) \leq w(x_0)e^{2K|x-x_0|} \qquad \forall x \in I_{\max} \ .$$

Se fosse $z = \sup I_{\max} < \sup I$, vicino a z la funzione y dovrebbe essere illimitata, per la proprietà (5.6). Discorso analogo se $\inf I_{\max} > \inf I$. □

Esempio 1. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - \log(x + y(x)) \ , & x + y(x) > 0 \\ y(x_0) = y_0 > -x_0 \ , \end{cases} \tag{6.9}$$

e studiamo il comportamento delle soluzioni al variare della condizione iniziale.
Con il cambiamento di variabili $x + y(x) = z(x)$ l'equazione diventa $z'(x) = 2 - \log z(x)$. Per il teorema di Cauchy–Lipschitz esiste un'unica soluzione massimale $z(x)$ passante per ogni punto (x_0, z_0) con $z_0 > 0$. La soluzione costante $z(x) = e^2$ e il teorema di confronto consentono di concludere che $z(x) > e^2$ o $z(x) < e^2$ a seconda che $z_0 > e^2$ o $z_0 < e^2$.
Se $z_0 > e^2$ la soluzione è globalmente definita a destra di x_0, per il criterio (5.6), inoltre z è strettamente decrescente. Il limite per $x \to +\infty$, essendo finito, deve valere e^2; infatti, grazie al teorema di Lagrange applicato in intervalli di lunghezza 1 possiamo trovare $x_n \to +\infty$ tale che $z'(x_n) \to 0$, da cui segue che il limite di $z(x_n)$, e quindi di tutta la funzione z, deve valere e^2. Per studiarne il comportamento a sinistra di x_0 usiamo la disuguaglianza $\log t \leq t - 1$ per ottenere

$$z'(x) = 2 - \log z(x) \geq 3 - z(x) \ .$$

Il teorema di confronto ci dice allora che $z(x) \leq w(x)$ per ogni $x \leq x_0$, dove $w(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $w' = 3 - w$, $w(x_0) = z_0$. Dato che w è limitata sui limitati, deduciamo per la proprietà (5.6) che la z è definita globalmente anche alla sinistra di x_0. Il fatto che il limite per $x \to -\infty$ di $z(x)$ sia $+\infty$ può essere dedotto dalla (stretta) convessità di z: vale infatti

$$z''(x) = -\frac{z'(x)}{z(x)} > 0 \ .$$

Analogamente, se $z_0 < e^2$ deduciamo che la soluzione massimale è strettamente crescente e concava, definita globalmente a destra di x_0, con $z(x) \to e^2$ per $x \to +\infty$. Per studiarne il comportamento a sinistra osserviamo che, per concavità,

$$z(x) \leq z(0) + z'(0)(x - x_0)$$

per ogni $x \in I_{\max}$ e, dato che la funzione a destra ha uno zero alla sinistra di x_0 (perchè $z(0) > 0$ e $z'(0) > 0$), deduciamo che $I_{\max} = (a, +\infty)$ con $a > -\infty$ e $y'(a_+) = +\infty$.
Per esercizio, si ridimostrino le proprietà qualitative della funzione z usando l'espressione

$$\int_{z_0}^{z(x)} \frac{1}{2 - \log u} \, du = x - x_0 \ ,$$

ottenuta per separazione delle variabili, che definisce implicitamente $z(x)$. In particolare, quando $z_0 < e^2$, vale la formula

$$a = x_0 - \int_0^{z_0} (2 - \log u)^{-1} \, du \ .$$

[9] Applicato con $f(x, y) = g(x, y) = 2Ky$ e $v(x) = e^{2K(x-x_0)}$ per $x > x_0$ e con $f(x, y) = g(x, y) = -2Ky$ e $v(x) = e^{-2K(x-x_0)}$ per $x < x_0$.

Esempio 2. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - (\operatorname{arctg} x)^2 \ , & x \in \mathbb{R} \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{6.10}$$

e dimostriamo che la soluzione massimale esiste ed è globale.
La funzione $f(x, y) = y^2 - (\operatorname{arctg} x)^2$ è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$, quindi localmente Lipschitziana. Il teorema di Cauchy–Lipschitz ci assicura l'esistenza di una soluzione massimale $y : I_{\max} = (a, b) \to \mathbb{R}$ con $1 \in I_{\max}$, di classe C^∞. Per mostrare che $I_{\max} = \mathbb{R}$ basta mostrare, tenendo conto del criterio (5.6), che non può succedere che a un estremo $z = a$, b di $I_{\max}$ la funzione tenda all'infinito. Mostreremo più precisamente che $|y(x)| \leq \pi/2$.
Osserviamo che la funzione z identicamente nulla risolve $z'(x) > f(x, z(x))$ per $x \neq 0$, quindi $y < 0$ in $(1, b)$ e $y > 0$ in $(a, 1)$ (qui abbiamo applicato la versione "stretta" del teorema di confronto, vedi l'Osservazione 8.10). Posto ora $g(x, y) = y^2 - (\pi/2)^2$, abbiamo $f > g$, confrontando quindi con le soluzioni costanti $z(x) = \pm\pi/2$ dell'equazione $z'(x) = g(x, z(x))$ otteniamo che $y(x) \leq \pi/2$ in $(a, 1)$ e $y(x) \geq -\pi/2$ in $(1, b)$. Si noti poi che, dato che

$$y^2(0) > 0 = (\operatorname{arctg} 0)^2 \qquad y^2(1) = 0 < (\operatorname{arctg} 1)^2,$$

deve esistere $c \in (0, 1)$ tale che $y'(c) = y^2(c) - (\operatorname{arctg} c)^2 = 0$. Si potrebbe poi mostrare, usando la monotonia di f nella variabile x e studiando l'equazione differenziale (**??**) soddisfatta da y', che $y(x)$ è crescente in $(0, c)$ e decrescente in $(c, +\infty)$. Analogamente, esiste $d < 0$ tale che y è decrescente in $(-\infty, d)$ e crescente in $(d, 0)$.
Per monotonia, devono allora esistere valori asintotici (finiti) $\ell_\pm$ per $t \to \pm\infty$; applicando come nell'esempio precedente il teorema di Lagrange in intervalli di lunghezza 1, troviamo successioni (x_n) divergenti a $\pm\infty$ tali che $y'(x_n)$ tende a 0. Deve allora essere $y^2(x_n) - (\operatorname{arctg} x_n)^2 \to 0$, da cui deduciamo $\ell_+ = -\pi/2$, $\ell_- = \pi/2$.

Esempio 3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \operatorname{arctg}(y(x)) - \dfrac{1}{x} \ , & x > 0 \\ y(\frac{4}{\pi}) = 1 \ . \end{cases} \tag{6.11}$$

La funzione $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y) - 1/x$ è di classe C^∞ in $A = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$, quindi localmente Lipschitziana. Il teorema di Cauchy–Lipschitz ci assicura l'esistenza di una soluzione massimale $y : I_{\max} = (a, b) \to \mathbb{R}$ con $4/\pi \in I_{\max}$, di classe C^∞. Dato che $y'(x) \leq \pi/2$, otteniamo dalla proprietà (5.6) che y è globalmente definita alla destra di $4/\pi$; per quel che riguarda il comportamento alla sinistra, basta osservare che vale la disuguaglianza

$$y'(x) \geq -\frac{\pi}{2} - n \qquad \text{per } x \in [\frac{1}{n}, +\infty)$$

per ottenere, sempre dalla (5.6), che $I_{\max} = (0, +\infty)$.
Osserviamo ora che $y'(4/\pi) = 0$, quindi studiando l'equazione differenziale linearizzata soddisfatta da y' otteniamo che y è crescente in $(4/\pi, +\infty)$ e decrescente in $(0, 4/\pi)$.
Integrando la disequazione differenziale $y'(x) \leq \pi/2 - 1/x$ otteniamo

$$y(x) \geq \frac{\pi}{2} x - 1 + \log \frac{4}{\pi} - \log x \ ,$$

quindi $y(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Analogamente, integrando la disequazione differenziale $y'(x) \geq \pi/4 - 1/x$, valida alla destra di $4/\pi$, otteniamo

$$y(x) \geq \frac{\pi}{4}x + \log\frac{4}{\pi} - \log x \ ,$$

da cui deduciamo che $y(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Mostriamo anche che y è convessa: usando l'equazione linearizzata otteniamo

$$y''(x) = \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} + \frac{1}{x^2} = \frac{\operatorname{arctg} y(x)}{1+y^2(x)} - \frac{1}{x(1+y^2(x))} + \frac{1}{x^2}.$$

Dalla prima uguaglianza ricaviamo subito la convessità per $x \geq 4/\pi$; in $(0, 4/\pi)$, nella seconda uguaglianza si verifica facilmente che il termine $1/x^2$ domina il termine $1/(x(1+y^2(x))$, grazie al fatto che $y(x) \geq 1$.

7. Sistemi di equazioni differenziali ed equazioni di ordine superiore

Un *sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale* ha la forma

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \ldots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases}$$

dove le n funzioni $f_1, \ldots, f_n$ sono definite su uno stesso insieme $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. In forma compatta, ponendo

$$Y = (y_1, \ldots, y_n) \ , \qquad F = (f_1, \ldots, f_n) : A \longrightarrow \mathbb{R}^n \ ,$$

il sistema si scrive nella forma

$$Y'(x) = F(x, Y(x)) \ , \tag{7.1}$$

dove la funzione incognita $Y(x)$ si intende definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}^n$, con grafico contenuto in A.
Un problema di Cauchy associato al sistema (7.1) è dato da

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \ , \end{cases} \tag{7.2}$$

con $(x_0, Y_0) \in A$.
Enunciato e dimostrazione del Teorema **??** e il contenuto del Paragrafo 6 si estendono ai sistemi con le ovvie modifiche notazionali e intendendo, nel Lemma 8.5, l'integrale definito $\int_{x_0}^{x} F\big(t, Y(t)\big)\, dt$ come l'n-upla degli integrali $\int_{x_0}^{x} f_i\big(t, Y(t)\big)\, dt$, $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 8.12 (**Teorema di esistenza e unicità locale per sistemi**). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto e sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ continua, localmente Lipschitziana nella variabile $Y \in \mathbb{R}^n$.*

(i) *Dato $(x_0, Y_0) \in A$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni intervallo aperto $I' \subset I$ contenente x_0 e con lunghezza minore di δ, esiste una e una sola funzione di classe C^1 definita su I' che risolva il problema di Cauchy (3.1).*

(ii) *Dato un plurirettangolo compatto $R = I \times Q \subset A$, esiste $\delta = \delta(R) > 0$ tale che, per ogni $(x_0, Y_0) \in R$ e ogni intervallo I' contenente x_0 e di lunghezza minore di δ, il problema di Cauchy (3.1) ammette un'unica soluzione di classe C^1 su I'.*

(iii) *Se* $Y_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ *e* $Y_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ *sono soluzioni del problema di Cauchy* (3.1)*, necessariamente* $Y_1 = Y_2$ *in* $I_1 \cap I_2$*.*

Si estendono a sistemi il teorema di esistenza della soluzione massimale (Teorema 8.7), il fatto che i grafici delle soluzioni massimali sono una partizione di A e il comportamento delle soluzioni massimali vicino a uno degli estremi dell'intervallo massimale (5.6). Non si estendono invece a sistemi, o almeno non si estendono facilmente, i risultati che dipendono dalla struttura di $\mathbb{R}$ come insieme ordinato, come il teorema di confronto. Tuttavia è a volte possibile associare quantità scalari alle soluzioni di sistemi, per poter applicare tecniche di confronto. Vediamo come questa idea funziona per l'estensione del criterio di esistenza globale (Proposizione 8.11) ai sistemi.

PROPOSIZIONE 8.13 (**Criterio di esistenza globale per sistemi**). *Sia* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo aperto,* $K \in [0, +\infty)$ *e sia* $F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continua e localmente Lipschitziana nella seconda variabile, tale che*

$$|F(x,Y)| \le K(1+|Y|) \quad \forall (x,Y) \in I \times \mathbb{R}^n \ . \tag{7.3}$$

Allora per ogni $x_0 \in I$ *e* $Y_0 \in \mathbb{R}$*, la soluzione massimale del problema di Cauchy* (7.2) *è definita su tutto l'insieme* I*.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $Y : I_{\max} \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale tale che $Y(x_0) = Y_0$ e, come nella dimostrazione dell'analogo risultato per funzioni scalari, per studiare la crescita di Y consideriamo la funzione $w(x) = \sqrt{1 + |Y(x)|^2}$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} |w'(x)| &= \frac{Y(x) \cdot Y'(x)}{\sqrt{1+|Y^2(x)|}} \le |Y'(x)| = |f(x, Y(x))| \\ &\le K(1+|Y(x)|) \le 2Kw(x) \end{aligned}$$

per ogni $x \in I$. La formula risolutiva (2.5) delle equazioni lineari e il criterio di confronto ci dicono allora che

$$|Y(x)| \le w(x) \le w(x_0) e^{2K|x-x_0|} \qquad \forall x \in I_{\max} \ .$$

Se fosse $z = \sup I_{\max} < \sup I$, vicino a z la funzione $|Y|$ dovrebbe essere illimitata, per la (5.6). Discorso analogo se $\inf I_{\max} > \inf I$. □

Si consideri ora un'equazione di ordine n,

$$y^{(n)}(x) = f\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big) \ , \tag{7.4}$$

con f definita su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e a valori reali.

LEMMA 8.14. *L'equazione* (7.4) *è equivalente al sistema*

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ \dots \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) \\ y_n'(x) = f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

nel senso che

(i) *se* $y(x)$ *è soluzione dell'equazione* (7.4)*, allora* $Y(x) = \big(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\big)$ *è soluzione del sistema* (7.1)*;*

(ii) *se* $Y(x) = \big(y_1(x), \dots, y_n(x)\big)$ *è soluzione del sistema* (7.1)*, allora* $y_1(x)$ *è soluzione dell'equazione* (7.4)*.*

Tralasciamo la dimostrazione, del tutto ovvia.
Da questo segue in modo naturale che i problemi di Cauchy per l'equazione (7.4) vanno posti nella forma seguente:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}, \tag{7.5}$$

con $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \in A$, ossia assegnando, per $x = x_0$, i valori della funzione incognita e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$.

Da quanto detto finora segue facilmente il seguente enunciato, ottenuto mettendo insieme parti del Teorema 8.12 e del Teorema 8.7 esteso a sistemi.

Teorema 8.15. *Sia $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ una funzione definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a valori reali, continua e localmente Lipschitziana nelle variabili $y_1, \ldots, y_n$.*

(i) *Dato $(x_0, y_0) \in A$, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni intervallo aperto $I' \subset I$ contenente x_0 e con lunghezza minore di δ, esiste una e una sola funzione di classe C^n definita su I' che risolva il problema di Cauchy (3.1).*

(ii) *A è l'unione disgiunta dei grafici delle funzioni*

$$Y(x) = \big(y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big),$$

al variare di $y(x)$ tra le soluzioni massimali dell'equazione (7.4).

In modo analogo si impostano e si discutono i problemi di Cauchy relativi a *sistemi di equazioni differenziali di ordine superiore*. In Fisica si incontrano frequentemente sistemi del tipo

$$\begin{cases} mx'' = f_1(t, x, y, z, x', y', z') \\ my'' = f_2(t, x, y, z, x', y', z') \\ mz'' = f_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{cases}$$

in cui la variabile indipendente t rappresenta il tempo, la funzione incognita $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ la posizione di un punto materiale di massa m all'istante t, e $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$ la risultante delle forze agenti su un punto che all'istante t si trovi nella posizione (x, y, z) con velocità (x', y', z'). Tali forze possono dipendere dalla posizione (campi di forze), dalla velocità (per es. attrito), e possono essere variabili nel tempo. Il sistema rappresenta la legge $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, dove l'accelerazione è $\mathbf{a} = (x'', y'', z'')$.
Come visto sopra per una singola equazione, questo sistema è equivalente a un sistema del primo ordine di 6 equazioni in 6 incognite,

$$\begin{cases} x' = p_x/m \\ y' = p_y/m \\ z' = p_z/m \\ p'_x = f_1(t, x, y, z, mp_x, mp_y, mp_z) \\ p'_y = f_2(t, x, y, z, mp_x, mp_y, mp_z) \\ p'_z = f_3(t, x, y, z, mp_x, mp_y, mp_z) \end{cases}$$

dove p_x, p_y, p_z sono le tre componenti del *momento* del punto in movimento.

Un problema di Cauchy consiste dunque nell'assegnazione, a un dato istante t_0, della posizione (x_0, y_0, z_0) e del momento $(p_{x,0}, p_{y,0}, p_{z,0})$.
Il punto (ii) del Teorema 8.15 si applica ai grafici (in $\mathbb{R}^7$) delle funzioni

$$t \longmapsto \big(x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t)\big) \ ,$$

dove $\big(x(t), y(t), z(t)\big)$ è una soluzione massimale. Lo spazio 6-dimensionale con coordinate (x, y, z, p_x, p_y, p_z) è chiamato *spazio delle fasi*.

8. *Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti e matrice esponenziale

[10]

Un *sistema differenziale lineare omogeneo a coefficienti costanti* (del primo ordine) ha la forma

$$(8.1) \qquad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AY \ ,$$

dove A è una matrice $n \times n$ (che possiamo anche supporre complessa, ammettendo soluzioni a valori complessi del sistema). Il caso $n = 1$, in cui il sistema si riduce all'equazione $y' = ay$, ha come soluzioni le funzioni $y(x) = ce^{ax}$ (si veda il Paragrafo 2).
Per n generico le soluzioni assumono una forma analoga introducendo un apposita nozione di *matrice esponenziale*. Adotteremo nello spazio delle matrici la norma euclidea, detta anche *norma di Hilbert–Schmidt*,

$$\|A\| = \Big(\sum_{i,\, j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Premettiamo la seguente proprietà della norma euclidea.

Lemma 8.16. *Siano A, B matrici $n \times n$. Allora*

$$\|AB\| \le \|A\| \|B\| \ .$$

Dimostrazione. Indichiamo con $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ la i–esima riga della matrice A e con $B^j = {}^t(b_{1j}, \ldots, b_{nj})$ la j–esima colonna della matrice B. Vale ovviamente $\|A\|^2 = \sum_i |A_i|^2$ e $\|B\|^2 = \sum_j |B^j|^2$. Allora se $C = (c_{ij}) = AB$, si ha, per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz,

$$|c_{ij}| = |A_i B^j| \le |A_i||B^j| \ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|C\|^2 &= \sum_{i,\, j=1}^{n} |c_{ij}|^2 \\ &\le \sum_{i,\, j=1}^{n} |A_i|^2 |B^j|^2 \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} |A_i|^2 \Big) \Big(\sum_{j=1}^{n} |B^j|^2 \Big) \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2 \ . \end{aligned}$$

[10] Paragrafo non compreso nel programma di esame 2018

□

Proposizione 8.17 (**Serie esponenziale e esponenziale di matrici**). *Sia A una matrice $n \times n$, reale o complessa. La serie esponenziale nello spazio delle matrici $n \times n$*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{8.2}$$

(dove si è posto $0! = 1$ e $A^0 = I$, I matrice identità $n \times n$) è convergente. Si pone

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \ ,$$

che viene detta matrice esponenziale di A. Vale inoltre $e^0 = I$ e $\|e^A\| \le e^{\|A\|}$.

Si noti che, essendo lo spazio delle matrici $n \times n$ isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$, la convergenza si può intendere componente per componente, o equivalentemente nella norma euclidea.

Dimostrazione della Proposizione 8.17. Applicando il Teorema 6.17 del Capitolo 6, studiamo la convergenza totale della serie (8.2). Per il Lemma 8.16 si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big\| \frac{A^k}{k!} \Big\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < +\infty \ .$$

□

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione

$$\exp_A(x) = e^{xA}$$

è dunque ben definita da $\mathbb{R}$ nello spazio delle matrici $n \times n$ e $\|\exp_A(x)\| \le e^{|x|\|A\|}$.

Proposizione 8.18 (**Proprietà della funzione esponenziale**). *Valgono le seguenti proprietà:*

(i) *la funzione $\exp_A$ è analitica su $\mathbb{R}$ (cioè ogni sua componente è analitica);*

(ii) *vale l'identità*

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} = e^{xA} A \ ;$$

(iii) *Per ogni x, $x' \in \mathbb{R}$ vale l'identità*

$$e^{(x+x')A} = e^{x'A} e^{xA} = e^{xA} e^{x'A} \ .$$

In particolare $(e^{xA})^{-1} = e^{-xA}$, quindi e^{xA} è non singolare per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Indichiamo con $(A^k)_{ij}$ il termine di posto (i, j) nella matrice A^k. Allora la componente $(e^{xA})_{ij}$ di e^{xA} è

$$(e^{xA})_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij}}{k!} x^k \ .$$

Essendo questa una serie di potenze convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$, il suo raggio di convergenza è infinito e, per il Teorema 6.31 del Capitolo 6, è analitica su $\mathbb{R}$. È dunque possibile derivare tale serie termine a termine, ottenendo che

$$\frac{d}{dx} (e^{xA})_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(A^k)_{ij}}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^{k+1})_{ij}}{k!} x^k \ .$$

Ricomponendo la matrice, si ha

$$\frac{d}{dx}e^{xA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{k+1}}{k!} x^k \ .$$

Da ogni termine si può raccogliere A a fattore, sia a destra che a sinistra, e il punto (ii) è dimostrato. Il punto (iii) si può ottenere svolgendo il prodotto delle due serie esponenziali di xA e $x'A$ (possibile per la loro convergenza assoluta) e ricomponendo la somma raggruppando i termini dello stesso grado in A. In alternativa, si può osservare che, fissato x', la funzione di x $e^{(x+x')A}e^{-xA}$ ha derivata[11]

$$\frac{d}{dx}(e^{(x+x')A}e^{-xA}) = e^{(x+x')A}Ae^{-xA} - e^{(x+x')A}Ae^{-xA} = 0 \ ,$$

per il punto (ii). Quindi $e^{(x+x')A}e^{-xA}$ è costante in x, e dunque uguale al suo valore in $x = 0$. Cioè

$$e^{(x+x')A}e^{-xA} = e^{x'A} \ . \tag{8.3}$$

Per $x' = 0$ questo implica che $e^{-xA} = (e^{xA})^{-1}$, e da ciò segue la prima uguaglianza, moltiplicando ambo i membri dell'identità (8.3) a destra per e^{xA}. Scambiando x con x' si ha la seconda. □

Osservazione 8.19. È anche possibile dimostrare la formula

$$\det e^{A} = e^{\mathrm{tr\,A}} \ .$$

Una dimostrazione algebrica si può ottenere usando la forma canonica di Jordan (si veda la sezione successiva). Una dimostrazione di tipo differenziale è la seguente. Per prima cosa osserviamo che $\det(e^{xA})$ è sempre non nulla e positiva per $x = 0$, quindi sempre positiva, per continuità. Passando ai logaritmi basta mostrare che la funzione scalare

$$\phi(x) := \log\big(\det e^{xA}\big)$$

soddisfa le condizioni $\phi' \equiv \mathrm{tr}\, A$, $\phi(0) = 0$, visto che queste implicano che $\det e^{xA} = e^{x\mathrm{tr\,A}}$. La seconda condizione è ovviemente soddisfatta; per la prima, basta notare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ dall'identità $e^{(x+h)A} = e^{xA}e^{hA}$ e dallo sviluppo di Taylor $\det(I + B) = 1 + \mathrm{tr}\, B + o(\|B\|)$[12] otteniamo

$$\begin{aligned}\phi(x+h) &= \phi(x) + \phi(h) = \phi(x) + \log\big(\det e^{hA}\big) = \phi(x) + \log\big(\det(I + hA + o(h))\big) \\ &= \phi(x) + \log(1 + h\mathrm{tr}\, A + o(h)) = \phi(x) + h\mathrm{tr}\, A + o(h) \ .\end{aligned}$$

Possiamo allora descrivere le soluzioni del sistema (8.1).

Teorema 8.20. *Le soluzioni massimali del sistema (8.1) sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e sono tutte e sole le funzioni*

$$Y(x) = e^{xA}v \ ,$$

al variare di $v \in \mathbb{R}^n$. In particolare, tali soluzioni formano uno spazio vettoriale di dimensione n nello spazio vettoriale reale $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ e le n colonne della matrice e^{xA} ne formano una base.

[11] Si dimostri per esercizio che anche la derivazione di funzioni a valori matrici rispetta la *regola di Leibniz*

$$(fg)' = f'g + fg' \ .$$

[12] Per dimostrarlo, osserviamo che

$$\det(I+B) = \sum_\sigma (-1)^\sigma (\delta_{1\sigma(1)} + b_{1\sigma(1)}) \cdots (\delta_{n\sigma(n)} + b_{n\sigma(n)}) \ .$$

In questa somma, tutte le permutazioni σ tranne quella identica danno un contributo $O(\|B\|^2) = o(\|B\|)$; sviluppando poi il prodotto corrispondente alla permutazione identica si ottiene che vale $1 + \mathrm{tr\,B} + O(\|B\|^2)$.

Il problema di Cauchy

$$
\begin{cases} Y'(x) = AY(x) \\ Y(x_0) = v \end{cases} \tag{8.4}
$$

ha come unica soluzione $Y(x) = e^{(x-x_0)A}v$.

DIMOSTRAZIONE. La funzione $Y(x) = e^{(x-x_0)A}v$ è soluzione del problema (8.4). D'altra parte la funzione $F(x, Y) = AY$ è continua e Lipschitziana in Y su tutto $\mathbb{R}^{n+1}$. Quindi tale soluzione è unica. Il resto segue facilmente grazie al fatto che la matrice e^{xA} è invertibile per ogni $x \in \mathbb{R}$. In effetti, al variare di $v_1, \ldots, v_n$ in una base di $\mathbb{R}^n$, i vettori $e^{xA}v_1, \ldots, e^{xA}v_n$ sono indipendenti per ciascun valore di x, quindi a maggior ragione lo sono le funzioni corrispondenti.[13] □

Ripetendo quanto visto nel Paragrafo 8, il *sistema differenziale lineare non omogeneo a coefficienti costanti*

$$
Y'(x) = AY(x) + b(x) \ ,
$$

dove $b(x)$ è una funzione continua su un intervallo aperto I a valori in $\mathbb{R}^n$ è risolto da una formula analoga alla (2.5). La soluzione massimale passante per il punto (x_0, Y_0) è data da

$$
Y(x) = e^{xA}\Big(\int_{x_0}^{x} e^{-tA}b(t)\,dt + v\Big) = \int_{x_0}^{x} e^{(x-t)A}b(t)\,dt + e^{xA}v \quad \text{con} \quad v = e^{-x_0A}Y_0 \ .
$$

9. *Calcolo della matrice esponenziale

[14]

Il calcolo esplicito delle matrici esponenziali e^{xA} a partire da una data matrice A è possibile, in linea di principio, a condizione di averne determinato la cosiddetta forma canonica di Jordan. Siccome l'espressione della forma canonica di Jordan è più semplice in ambito complesso, considereremo il caso più generale delle matrici a coefficienti complessi.
Sia dunque P una matrice complessa invertibile tale che $A' = PAP^{-1}$ sia nella forma a blocchi

$$
A' = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_r \end{pmatrix} \tag{9.1}
$$

dove i blocchi B_j, $1 \le j \le r$, sono sottomatrici quadrate di dimensione $m_j \times m_j$ con $m_j \ge 1$ (ovviamente con $m_1 + \cdots + m_r = n$) della forma

$$
B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix} . \tag{9.2}
$$

I termini λ_j che appaiono sulle diagonali dei blocchi non sono necessariamente distinti tra loro e sono gli autovalori di A. La molteplicità geometrica di un autovalore λ (cioè la dimensione del relativo

[13] In generale l'indipendenza "x per x" è ben più forte dell'indipendenza in $C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$; si mostri che, per soluzioni di sistemi lineari, i due fatti sono equivalenti.

[14] Paragrafo non nel programma di esame 2017

autospazio) coincide con il numero di blocchi in cui $\lambda_j = \lambda$. Invece la somma delle dimensioni m_j dei blocchi in cui $\lambda_j = \lambda$ è uguale alla molteplicità algebrica di λ (cioè come radice del polinomio caratteristico). Indichiamo nel seguito con I_k la matrice identità $k \times k$.
Il calcolo delle matrici esponenziali è basato sulle seguenti proprietà, che si dimostrano subito per passaggio al limite in analoghe identità che coinvolgono le ridotte parziali della serie che definisce e^{xA}:

- dall'uguaglianza $A = P^{-1}A'P$ segue che $e^{xA} = P^{-1}e^{xA'}P$;
- con riferimento alla matrice (9.1),

$$e^{xA'} = \begin{pmatrix} e^{xB_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{xB_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{xB_r} \end{pmatrix}$$

- se due matrici A_1, A_2 commutano, allora

$$e^{x(A_1+A_2)} = e^{xA_1}e^{xA_2} = e^{xA_2}e^{xA_1} \ .$$

Il calcolo di e^{xA} si riduce quindi al calcolo di un singolo blocco di Jordan. Inoltre, se $m_j = 1$ allora $B_j = \lambda_j I_1$, se $m_j > 1$

$$B_j = \lambda_j I_{m_j} + N_j \ ,$$

dove

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Allora

$$e^{xB_j} = e^{x\lambda_j I_{m_j}}e^{xN_j} = e^{\lambda_j x}e^{xN_j} \ .$$

Il calcolo di e^{xN_j} è molto semplice, perché le potenze N_j^2, N_j^3 ecc. hanno una forma simile, con un'unica diagonale di 1 spostata sempre più in alto. In particolare, $N_j^{m_j} = 0$, per cui

$$\begin{aligned} e^{xN_j} &= I + xN_j + \frac{x^2}{2}N_j^2 + \cdots + \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!}N_j^{m_j-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ 0 & 1 & x & \cdots & \frac{x^{m_j-2}}{(m_j-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

In definitiva, $e^{xB_j} = e^{x\lambda_j} I_1$ se $m_j = 1$ e

$$e^{xB_j} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j x} & xe^{\lambda_j x} & \frac{x^2}{2} e^{\lambda_j x} & \cdots & \frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} e^{\lambda_j x} \\ 0 & e^{\lambda_j x} & xe^{\lambda_j x} & \cdots & \frac{x^{m_j-2}}{(m_j-2)!} e^{\lambda_j x} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_j x} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & xe^{\lambda_j x} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_j x} \end{pmatrix} \qquad \text{se } m_j > 1 \ . \tag{9.3}$$

10. *Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore [15]

Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y \ . \tag{10.1}$$

Essa può essere ricondotta, in base al Lemma 8.14, al sistema del primo ordine $Y' = AY$, con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \ . \tag{10.2}$$

Dal Teorema 8.4 segue il seguente enunciato.

Corollario 8.21. *L'integrale generale dell'equazione* (10.1) *è uno spazio vettoriale di dimensione n in $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Per determinare una base di tale spazio, si può, sempre in base al Lemma 8.14 e al Teorema 8.4, calcolare la matrice e^{xA} ed estrarne le n componenti della prima riga. Questo richiede tuttavia il calcolo della matrice esponenziale, che si può evitare procedendo in modo diverso.

Sullo spazio vettoriale $C^\infty(\mathbb{R})$ consideriamo l'*operatore di derivazione* D, che applica una funzione f nella sua derivata f'.

L'operatore D può essere iterato un numero arbitrario di volte, di modo che

$$D^k f = f^{(k)} \ ,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ (si intende che D^0 è l'applicazione identica). Possiamo anche considerare combinazioni lineari degli operatori D^k, ossia polinomi nell'operatore D. Con questo formalismo, l'equazione (10.1) assume la forma

$$P(D)y = 0 \ ,$$

dove

$$P(\lambda) = \lambda^n - a_1 \lambda^{n-1} - a_2 \lambda^{n-2} - \cdots - a_{n-1}\lambda - a_n \ , \tag{10.3}$$

si chiama il *polinomio caratteristico* dell'equazione (10.1).

La normale algebra dei polinomi si applica ai polinomi in D. Precisamente, vale l'identità

$$P(D) \circ Q(D) = (PQ)D \ ,$$

[15] Paragrafo non nel programma di esame 2017

e dunque vale la proprietà commutativa

$$P(D) \circ Q(D) = Q(D) \circ P(D) \ .$$

Indichiamo allora con $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ le soluzioni complesse distinte del polinomio (10.3), e con $m_1, m_2, \dots, m_r$ le rispettive molteplicità. Allora

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \ ,$$

e dunque

$$P(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} (D - \lambda_2)^{m_2} \cdots (D - \lambda_r)^{m_r} \ . \tag{10.4}$$

LEMMA 8.22. *Per ogni $j = 1, \dots, r$, le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$(D - \lambda_j)^{m_j} y = 0$$

sono anche soluzioni dell'equazione (10.1).

DIMOSTRAZIONE. Essendo possibile riordinare a piacere i fattori nella (10.4), possiamo supporre che $j = r$. La conclusione è dunque ovvia. □

LEMMA 8.23. *Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione differenziale*

$$(D - \lambda)^m y = 0$$

sono tutte e sole le funzioni $p(x)e^{\lambda x}$, dove p è un polinomio di grado strettamente minore di m.

DIMOSTRAZIONE. Si ponga $y(x) = e^{\lambda x} z(x)$. Allora

$$(D - \lambda) y(x) = e^{\lambda x} z'(x) + \lambda e^{\lambda x} z(x) - \lambda e^{\lambda x} z(x) = e^{\lambda x} z'(x) \ .$$

Induttivamente si ottiene che

$$(D - \lambda)^k y(x) = e^{\lambda x} z^{(k)}(x)$$

per ogni intero k. Quindi l'equazione differenziale $(D - \lambda)^m y = 0$ si riduce a $z^{(m)} = 0$, le cui soluzioni sono per l'appunto i polinomi di grado strettamente minore di m. □

Si ottengono in questo modo le seguenti n soluzioni dell'equazione (10.1):

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} & \dots & x^{m_1 - 1} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x} & x e^{\lambda_2 x} & \dots & x^{m_2 - 1} e^{\lambda_2 x} \\ \dots & & \dots & \dots \\ e^{\lambda_r x} & x e^{\lambda_r x} & \dots & x^{m_r - 1} e^{\lambda_r x} \end{array} \ . \tag{10.5}$$

Se dimostriamo che esse sono linearmente indipendenti, possiamo concludere che l'integrale generale dell'equazione (10.1) è dato dalle loro combinazioni lineari. La dimostrazione che proponiamo si basa sull'uso di derivazioni successive; un'altra dimostrazione, che fa uso del collegamento con i sistemi del I ordine e la decomposizione di Jordan, è descritta nell'Osservazione 8.26.

PROPOSIZIONE 8.24. *Le n funzioni in* (10.5) *sono linearmente indipendenti in $C^\infty(\mathbb{R})$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $c_{i,j}$, $1 \le i \le r$, $0 \le j \le m_j - 1$ coefficienti complessi tali che

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i - 1} c_{i,j} x^j e^{\lambda_i x} = 0 \qquad \forall \, x \in \mathbb{R} \ .$$

Dobbiamo mostrare che tutti i $c_{i,j}$ si annullano. Dimostrare questo equivale a verificare che $e^{\lambda_i x}$ sono indipendenti se assumiamo come spazio dei coefficienti quello dei polinomi, i.e. se F_i sono polinomi tali che

$$\sum_{i=1}^{r} F_i(x) e^{\mu_i x} \equiv 0 \ , \tag{10.6}$$

con i $\mu_i \in \mathbb{C}$ tutti distinti, allora $F_i(x) \equiv 0$ per $1 \leq i \leq r$ (e quindi, per il principio di identità del polinomi, i loro coefficienti sono tutti nulli). Basterà allora applicare questo risultato ai polinomi

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^{m_i - 1} c_{i,j} x^j e^{\lambda_i x}$$

per ottenere l'annullamento di tutti i $c_{i,j}$.
Premettiamo l'osservazione che, per un generico polinomio P, $(P(x)e^{\mu x})' = Q(x)e^{\mu x}$, con $Q(x) = \mu P(x) + P'(x)$, quindi se $\mu \neq 0$ il polinomio Q ha grado uguale a quello di P. Useremo in particolare il fatto che Q è nullo se e solo se P è nullo.
Ragioniamo ora per induzione su r. Il caso $r = 1$ è banale. Per fare il passaggio induttivo scriviamo l'ipotesi nella forma

$$\sum_{i=1}^{r-1} F_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_r)x} \equiv -F_r(x)$$

e deriviamo $k_r + 1$ volte, con k_r pari al grado del polinomio F_r, per ottenere

$$\sum_{i=1}^{r-1} Q_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_r)x} \equiv 0 \tag{10.7}$$

per opportuni polinomi Q_i, $1 \leq i \leq r-1$, nulli se e solo se i polinomi F_i sono nulli (perché $\mu_i = \lambda_i - \lambda_r \neq 0$ per $1 \leq i \leq r-1$). Allora, essendo i μ_i, $1 \leq i \leq r-1$, tutti distinti, per ipotesi induttiva dall'identità (10.7) ricaviamo che tutti i polinomi Q_i, quindi anche tutti i F_i, sono nulli per $1 \leq i \leq r-1$. Inserendo questa informazione nell'equazione (10.6) otteniamo che $F_r \equiv 0$. $\square$

È anche utile osservare l'esistenza di un legame stretto tra il polinomio caratteristico nella (10.3) e il polinomio caratteristico della matrice corrispondente, quando scriviamo l'equazione di ordine n come sistema del I ordine.

LEMMA 8.25. *Il polinomio caratteristico $Q(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ della matrice A definita nella (10.2) è uguale a $(-1)^n P$, dove P è il polinomio nella formula (10.3).*

DIMOSTRAZIONE. Si consideri

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 - \lambda \end{pmatrix} .$$

Se $n = 2$,

$$Q(\lambda) = -\lambda(a_1 - \lambda) - a_2 = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = P(\lambda) .$$

Supponendo la tesi vera per $n-1$, chiamiamo A_{11} la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eliminando la prima riga e la prima colonna di A. Allora

$$Q(\lambda) = -\lambda \det(A_{11} - \lambda I) + (-1)^{n+1} a_n \ , \tag{10.8}$$

e, per ipotesi induttiva,

$$\det(A_{11} - \lambda I) = (-1)^{n-1}(\lambda^{n-1} - a_1\lambda^{n-2} - \cdots - a_{n-2}\lambda - a_{n-1}) \; . \tag{10.9}$$

La conclusione è dunque immediata, inserendo l'espressione a destra della (10.9) nella (10.8). □

Osservazione 8.26 (Dimostrazione alternativa della Proposizione 8.24). In base alla formula (9.3), la matrice $e^{xA} = P^{-1}A'P$ può contenere nella prima riga solo combinazioni lineari delle funzioni (10.5)[16], e dunque ogni soluzione è combinazione lineare di queste. Per il Corollario 8.21, le funzioni (10.5) formano una base dell'integrale generale. □

[16]Anzi, la presenza di $x^{m_j-1}e^{\lambda_j x}$ tra le soluzioni (10.5) indica che, necessariamente, la forma canonica di Jordan di A contiene un unico blocco, di dimensione $m_j \times m_j$, con autovalore λ_j.

Libri Utili o per Approfondire

1. E. Acerbi, L. Modica, S. Spagnolo, *Problemi scelti di analisi matematica I*, Liguori Editore, 1985.
2. A. Bruckner, *Differentiation of real functions*, CRM Monograph Series, vol. 5, AMS, 1994.
3. F. Conti, *Calcolo. Teoria e applicazioni*, McGraw–Hill, 1993.
4. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
5. B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Holden–Day, 1964.
6. P. R. Halmos, *Naive set theory*, D. Van Nostrand Co., 1960.
7. J. L. Kelley, *General topology*, D. Van Nostrand Co., 1955.
8. A. B. Kharazishvili, *Strange functions in real analysis*, Pure and Applied Mathematics, vol. 272, Chapman & Hall/CRC, 2006.
9. J. E. Marsden, *Elementary classical analysis*, W. H. Freeman and Co., 1974.
10. L. C. Piccinini, G. Stampacchia, G. Vidossich, *Equazioni differenziali ordinarie in* $\mathbb{R}^n$ *(problemi e metodi)*, Liguori Editore, 1978.
11. G. Prodi, *Analisi matematica*, Bollati Boringhieri, 1972.
12. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw–Hill, 1976.
13. L. A. Steen, J. A. Seebach Jr., *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, 1970.