Corsi di Probabilità, Statistica e Processi stocastici per
Ing. dell'Automazione, Informatica e Inf. Gest. Azienda
20/12/2011

Esercizio 1
Una compagnia di assicurazioni classifica i propri clienti in tre fasce: basso rischio di incidente, medio rischio e alto rischio. Da rilevamenti statistici, si sa che le probabilità di avere un incidente in un anno sono l'1%, il 3% e il 6% rispettivamente.
i) Assumendo che il 30% dei clienti siano a basso rischio, il 50% a medio rischio e il 20% ad alto rischio, qual è la probabilità che un cliente abbia incidenti nel corso di un anno?
ii) Sapendo che un cliente non ha avuto incidenti nell'anno scorso, qual è la probabilità che esso appartenga a ciascuna delle tre fasce?

Esercizio 2 Un'azienda produce componenti per auto.
i) Un suo reparto produce 30 pezzi al giorno. Supponiamo che ciascun pezzo abbia probabilità 0.05 di essere scadente (si impongano inoltre le ipotesi di indipendenza che si ritiene comodo e ragionevole supporre). Che probabilità abbiamo di trovare almeno due pezzi scadenti, in un generico giorno? Descrivere dettagliatamente le v.a. che si utilizzano ed evitare approssimazioni non necessarie.
ii) Una macchina produce 40 pezzi al giorno. Molti dei pezzi prodotti, ma non tutti, hanno bisogno di rifiniture a mano. La probabilità che un pezzo necessiti di rifiniture è 0.5. Che probabilità c'è si debbano rifinire più di 25 pezzi?

Esercizio 3 Si consideri la funzione "triangolare" $f(x)$ così definita: nulla per $x < -1$ e $x > 1$, uguale ad M per $x = 0$, continua, lineare sia su $[-1, 0]$ che su $[0, 1]$ (ma definita usando rette differenti).
i) Trovare per quali valori di M la funzione f è una densità di probabilità e scrivere l'espressione matematica di f.
ii) Calcolare $E[|X|^n]$ per ogni n intero positivo.
iii) Calcolare la densità di probabilità della v.a. $Y = \sqrt{|X|}$, riassumendo alla fine la sua espressione a seconda dell'intervallo del dominio. È continua?
iv) Calcolare $P(|X| \leq Z)$, dove Z è una v.a. di Bernoulli simmetrica ($p = \frac{1}{2}$), indipendente da X.

Esercizio 4 Si consideri una catena di Markov con stati $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione P indicata a fianco.
i) Classificare gli stati e dedurne la struttura generale di tutte le misure invarianti.
ii) Calcolare le misure invarianti.
iii) Supponiamo di partire al tempo zero dallo stato 5 e sia $p_i^{(n)}$ la probabilità di trovarsi nello stato i al tempo n. Calcolare $\lim_{n\to\infty} p_i^{(n)}$, fin dove si riesce e per gli stati i per cui si riesce, accontentandosi di un risultato intuitivo per i più difficili.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\, dy$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

- $\overline{x}=\frac{x_1+...+x_n}{n}$, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}\right)^2$, $\widehat{Cov}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)$, $r=\frac{\widehat{Cov}}{S_{xi}XS_Y}=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^n(y_i-\overline{y})^2}}$. $\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-n\overline{x}^2$, $\sum_{i=1}^n\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)=\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)-n\overline{xy}$.
- $n!=n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1$, $0!=1$. $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
- $P\left(A|B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, $P\left(A\cap B\right)=P\left(A|B\right)P\left(B\right)$. A,B indipendenti: $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$, $P\left(A|B\right)=P\left(A\right)$, $P\left(B|A\right)=P\left(B\right)$. $P\left(A\right)=\sum_k P\left(A|B_k\right)P\left(B_k\right)$. $P\left(B|A\right)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.
- X discreta, valori a_j, $P\left(X=a_j\right)=p_j$, allora $E\left[X\right]=\sum_j a_jp_j$, $E\left[g\left(X\right)\right]=\sum_j g\left(a_j\right)p_j$, $E\left[X^2\right]=\sum_j a_j^2p_j$. $P\left(X\in A\right)=\sum_{i:a_i\in A}P\left(X=a_i\right)=\sum_{i:a_i\in A}p_i$. $X\in\mathbb{N}$, $P\left(X\leq n\right)=\sum_{i=0}^n p_i$, $P\left(X\geq n\right)=\sum_{i=n}^\infty p_i$.
- X continua, densità $f\left(x\right)$, allora $E\left[X\right]=\int_{-\infty}^\infty xf\left(x\right)dx$, $E\left[g\left(X\right)\right]=\int_{-\infty}^\infty g\left(x\right)f\left(x\right)dx$, in particolare $E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^\infty x^2f\left(x\right)dx$. $P\left(X\in A\right)=\int_A f\left(x\right)dx$.
- $Var\left[X\right]=\sigma_X^2:=E\left[\left(X-\mu_X\right)^2\right]$ dove $\mu_X=E\left[X\right]$. $Var\left[X\right]=E\left[X^2\right]-\mu_X^2$. $Cov\left(X,Y\right)=E\left[\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right]$, $Cov\left(X,Y\right)=E\left[XY\right]-\mu_X\mu_Y$. $\rho\left(X,Y\right)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$. $-1\leq\rho\left(X,Y\right)\leq 1$.
- $E\left[aX+bY+c\right]=aE\left[X\right]+bE\left[Y\right]+c$. $Var\left[X+Y\right]=Var\left[X\right]+Var\left[Y\right]+2Cov\left(X,Y\right)$. $Var\left[aX\right]=a^2Var\left[X\right]$. Standardizzazione di X: $\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$.
- X,Y indipendenti: $P\left(X\in A,Y\in B\right)=P\left(X\in A\right)P\left(Y\in B\right)$. Implica $E\left[XY\right]=E\left[X\right]E\left[Y\right]$, $Cov\left(X,Y\right)=0$, $\rho\left(X,Y\right)=0$, $Var\left[X+Y\right]=Var\left[X\right]+Var\left[Y\right]$.
- $F\left(x\right)=P\left(X\leq x\right)$. $F\left(t\right)=\int_{-\infty}^t f\left(x\right)dx$. $F'\left(t\right)=f\left(t\right)$. $F\left(q_\alpha\right)=\alpha$.
- $\varphi\left(t\right)=E\left[e^{tX}\right]$, $\varphi'\left(0\right)=E\left[X\right]$, $\varphi''\left(0\right)=E\left[X^2\right]$; $\varphi_{aX}\left(t\right)=E\left[e^{taX}\right]=\varphi_X\left(at\right)$. X,Y indipendenti implica $\varphi_{X+Y}\left(t\right)=\varphi_X\left(t\right)\varphi_Y\left(t\right)$.
- $X\sim B\left(n,p\right)$: $P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$, $E\left[X\right]=np$, $Var\left[X\right]=np\left(1-p\right)$, $\sigma=\sqrt{np\left(1-p\right)}$, $\varphi\left(t\right)=\left(q+pe^t\right)^n$ dove $q=1-p$. $X_1,...,X_n\sim B\left(1,p\right)$ indipendenti implica $S=X_1+...+X_n\sim B\left(n,p\right)$.
- $X\sim$ipergeometrica di parametri N, M e n : $P(X=k)=\frac{\binom{N}{k}\binom{M}{n-k}}{\binom{N+M}{n}}$ con $k=0,1,\cdots,n$.
- $X\sim\mathcal{P}\left(\lambda\right)$: $P\left(X=k\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $E\left[X\right]=\lambda$, $Var\left[X\right]=\lambda$, $\sigma=\sqrt{\lambda}$, $\varphi\left(t\right)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$. Se $np_n=\lambda$ allora $\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k\left(1-p_n\right)^{n-k}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
- $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$: $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$. $E\left[X\right]=\mu$, $Var\left[X\right]=\sigma^2$, $\varphi\left(t\right)=e^{\mu t}e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$. X,Y gaussiane indipendenti, $a,b,c\in\mathbb{R}$ implica $aX+bY+c$ gaussiana. $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ si può scrivere come $X=\sigma Z+\mu$, con $Z\sim N\left(0,1\right)$. $F_{\mu,\sigma^2}\left(x\right)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. $\Phi\left(-x\right)=1-\Phi\left(x\right)$. $q_\alpha=-q_{1-\alpha}$. Soglie $\mu\pm\sigma q_\alpha$.
- $X\sim Exp\left(\lambda\right)$: $f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x}$ per $x\geq 0$, zero per $x<0$. $E\left[X\right]=\frac{1}{\lambda}$, $Var\left[X\right]=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma=\frac{1}{\lambda}$, $\varphi\left(t\right)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$ per $t<\lambda$. $F\left(x\right)=1-e^{-\lambda x}$ per $x\geq 0$, zero per $x<0$.
- TLC: Posto $S_n=X_1+...+X_n$, si ha $P\left(\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\in A\right)\approx P\left(Z\in A\right)$, con $Z\sim N\left(0,1\right)$.

  Correzione di continuità: $P\left(S_n\leq k\right)\approx\Phi\left(\frac{k+0{,}5-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, con $k\in\mathbb{N}$
- $\overline{X}=\frac{X_1+...+X_n}{n}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$. $E\left[S^2\right]=\sigma^2$. $\frac{S^2}{\sigma^2}\left(n-1\right)\sim\chi_{n-1}^2$.
- $\mu=\overline{X}\pm\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}$; $\mu=\overline{X}\pm\frac{S\cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}}{\sqrt{n}}$.
- $\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|>q_{1-\frac{\alpha}{2}}$. $\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\right|>t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$. $P\left(\left|Z\right|>\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{S}\sqrt{n}\right|\right)$, $P_\mu\left(\overline{X}\in\left[\mu_0-\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}},\mu_0+\frac{\sigma q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right]\right)$. $\frac{S^2}{\sigma^2}\left(n-1\right)>\chi_{\alpha,n-1}^2$. $T=n\sum_{i=1}^k\frac{\left(\widehat{p}_i-p_i\right)^2}{p_i}=\sum_{i=1}^k\frac{\left(\widehat{X}_i-np_i\right)^2}{np_i}>\chi_{\alpha,k-1}^2$.
- $y=A+Bx$, $B=\frac{\widehat{Cov}}{S_X^2}=r\frac{S_Y}{S_X}$, $\overline{y}=A+B\overline{x}$.