1 Esercizi sulla segnatura di forme quadratiche

Studiare la segnatura delle seguenti forme quadratiche mediante il criterio di Sylvester:

1. $\Phi(x, y) = -x^2 + 10xy - y^2$;
2. $\Phi(x, y) = -x^2 + 2\sqrt{2}xy - 2y^2$;
3. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy$;
4. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$;
5. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy$;
6. $\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 2yz$;
7. $\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 + 2xz - 2yz$.

Negli esercizi da (1) a (6) si trovino anche gli autovalori e gli autovettori della matrice corrispondente (verificando che effettivamente il segno degli autovalori corrisponde con quello desunto dal criterio).

Risposte. 1. La forma è indefinita. In effetti $\det(A) = -24 < 0$.

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (\lambda+1)^2 - 25$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -6$.

Due possibili autovettori sono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ sono ortogonali ma non ortonormali (si possono normalizzare dividendoli per la norma che fa, in entrambi i casi $\sqrt{2}$). Anche nelle risposte che seguono non si sono normalizzati gli autovettori.

2. La forma è semidefinita negativa. In effetti $\det(A) = 0$ e $a_{1,1} = a_{2,2} = -1 \leq 0$.

   Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3$.

   Due possibili autovettori sono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. La forma è indefinita. In effetti $\det(A) = \det(A(3)) = -3 < 0$ e $\det(A(2)) = -3 < 0$ (inutile guardare $a_{1,1}$).

   Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4)$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = -1$.

   Tre possibili autovettori sono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. La forma è definita positiva. In effetti $\det(A) = \det(A(3)) = 1/2 > 0$, $\det(A(2)) = 3/4 > 0$ e $\det(A(1)) = a_{1,1} = 1 > 0$.

   Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda/4 + 1/2$. Si vede a occhio che un autovalore è $\lambda_1 = 2$ e poi, con Ruffini, si trova $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/2$.

   Tre possibili autovettori sono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathbf{e}_2$ ed $\mathbf{e}_3$ sono abbastanza arbitari: sono ortogonali e generano l'autospazio bidimensionale relativo all'autovalore doppi $\lambda = 1/2$. Qui molteplicità algebrica e molteplicità geometrica coincidono come deve essere per la simmetria di A.

5. La forma è semidefinita positiva. per vederlo bisogna verificare che tutte le matrici principali

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , (1) , (1) , (1)$$

   hanno determinante maggiore o eguale a zero.

   Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1)$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$.

   Tre possibili autovettori sono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. La forma è indefinita. In effetti $\det(A) = \det(A(3)) = -1 < 0$, $\det(A(2)) = 1 > 0$ (fino a qui potrebbe essere definita negativa), ma $a_{1,1} = 1 > 0$.

Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2-2)$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$ e $\lambda_3 = 1-\sqrt{2}$.

Tre possibili autovettori sono $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

7. La forma è definita positiva. In effetti $\det(A) = \det(A(3)) = 2 > 0$, $\det(A(2)) = 8 > 0$ e $a_{1,1} = 2 > 0$.

   Il calcolo del polinomio caratteristico porta a un polinomio di terzo grado di cui è complicato trovare le radici.

$\square$