Alcuni esercizi sulle serie di funzioni

Claudio Saccon

26 maggio 2014

1. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n(x) := \dfrac{x^2 e^{-\frac{x}{n}}}{n^\alpha}$, dove $\alpha > 0$ è un parametro reale. Si risponda ai seguenti quesiti (la risposta dipenderà da α). Se non si gradisce la presenza del parametro si considerino i due casi $\alpha = 3$ e $\alpha = 4$.

   (a) Si dica per quali x la serie converge puntualmente – indichiamo nel seguito con I_α l'insieme di questi punti e con $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ la somma della serie, definita per $x \in I_\alpha$.

   (b) Si dica se F è continua su I_α.

   (c) Si dica se F è derivabile su I_α.

   (d) (*) Si dica se la serie $\sum_n f_n$ converge uniformemente su I_α.

   Risposte veloci: (a) $I_\alpha = [0, +\infty[$ qualunque sia α; (b) Si può notare che la serie converge totalmente su $[0, +\infty[$ quando $\alpha > 3$, mentre non converge totalmente se $0 < \alpha \leq 3$ – in ogni caso F è continua perché comunque la serie converge totalmente su $[0, M]$ per qualunque $M > 0$;(c) F è derivabile perché la serie $\sum_n f_n'$ converge totalmente su $[0, M]$ per qualunque $M > 0$;(d) se $\alpha > 3$ la serie converge uniformemente dato che converge totalmente (vedi punto (b)), se invece $0 < \alpha \leq 3$ la serie non converge uniformemente su $[0, +\infty]$, perché se lo facesse ne seguirebbe $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$, ma, con un po' di accortezza, si vede che $F(m) \geq \dfrac{m^{2-\alpha}}{e}$ per tutti gli m interi.

2. Stesse domande dell'esercizio 1 con $f_n(x) := \dfrac{x^2 e^{-nx}}{n^\alpha}$.

   Risposte veloci: (a) $I_\alpha = [0, +\infty[$ qualunque sia α; (b) Si può notare che la serie converge totalmente su $[0, +\infty[$ quando $\alpha > 3$ e in questo caso essa è continua su $[0, +\infty[$, mentre non converge totalmente se $0 < \alpha \leq 3$ – in ogni caso F è continua su $]0, +\infty[$ perché comunque la serie converge totalmente su $[\varepsilon, +\infty[$ per qualunque $\varepsilon > 0$ (per vedere che non è continua nel punto $x = 0$ vedi (d)); (c) ragionando come in (b) per la serie delle derivate $\sum_n f_n'$ si vede che F è derivabile su $[0, +\infty[$ quando $\alpha > 3$, mentre lo è solo sulle $x > 0$ quando $0 < \alpha \leq 3$ (per escludere il punto $x = 0$ vedi (d)); (d) se $\alpha > 3$ la serie converge uniformemente dato che converge totalmente (vedi punto (b)), se invece $0 < \alpha \leq 3$ la serie non converge uniformemente su $[0, +\infty]$, perché se lo facesse ne seguirebbe $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = 0$ (F sarebbe continua in zero), ma, con un po' di accortezza, si vede che $F\left(\frac{1}{m}\right) \geq \dfrac{m^{2-\alpha}}{e}$ per tutti gli m interi.

3. Siano fissati $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ e sia dato il problema di Cauchy lineare:

$$xy'' + ay' + by = 0 \qquad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta.$$

Cerchiamo le soluzioni y sviluppabili in serie di potenze nel punto $x_0 = 0$, cioè $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(a) Si trovi una relazione ricorsiva per i coefficienti a_n.

(b) Si dica per quali α e β è possibile trovare tali a_n.

(c) Nel caso in cui gli a_n esistano si determini il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(d) Prendiamo $a = 1$ e $b = -2$. Si dica se esiste la soluzione $y(x)$ con $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ e in tal caso si dica quanto fa $y'''(0)$.

(e) (*) Consideriamo $a = -4$ e $b = -1$ (caso escluso all'inizio). Si faccia vedere che anche in questo caso si trova una soluzione con il metodo indicato sopra, ma che questo è possibile solo se $\alpha = \beta = 0$ ed è viceversa possibile assegnare ad arbitrio la derivata quinta $y^v(0)$.

Risposte veloci: (a) usando le regole di derivazione per le serie di potenze si perviene alla condizione $(k+1)(k+a)a_{k+1} + ba_k = 0$ – dato che $a > 0$ questa si può scrivere $a_{k+1} = -\dfrac{b}{(k+1)(k+a)}a_k$; (b) la relazione del punto (a) lascia libero $\alpha = a_0$ mentre impone che $\beta = a_1 = -\dfrac{b}{(0+1)(0+a)}\alpha = -\dfrac{b}{a}\alpha$; (c) se gli a_k sono ricavati dalla relazione scritta sopra si ha $\lim_{k\to\infty} \dfrac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim \dfrac{|b|}{(k+1)(k+a)} = 0$ e quindi il raggio di convergenza è infinito; (d) se $a = 1$ e $b = -2$ la condizione tra α e β diventa $\beta = 2\alpha$ che risulta verificata; allora $y'''(0) = 6a_3 = 6\frac{2}{3^2}a_2 = 6\frac{2}{3^2}\frac{2}{2^2}a_1 = 6\frac{2}{3^2}\frac{2}{2^2}\frac{2}{1^2}a_0 = \frac{4}{3}$; (e) ragionando come in (b) si trova la condizione $(k+1)(k-4)a_{k+1} = a_k$ che per $k = 4$ implica $a_4 = 0$, mentre lascia arbitrario $a_5 = \frac{y^{(5)}}{120}$; usando la relazione all'indietro implica $a_k = 0$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$, mentre per $k \geq 5$ la relazione permette di ricavare in modo univoco tutti gli a_k con $k \geq 6$.

4. Partendo dallo sviluppo della serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (se $|x| < 1$) e usando i teoremi di derivazione per serie, si trovino le somme delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n+1}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nx^n}{n^2-1}.$$

I risultati sono $-\ln(1-x)$, $\quad \dfrac{x}{(-1+x)^2}$, $\quad \dfrac{x + \ln(1-x) - x\ln(1-x)}{x}$,
$\dfrac{-x - \ln(1-x) + x\ln(1-x)}{(-1+x)x}$, $\quad \dfrac{-2x - x^2 - 2\ln(1-x) - 2x^2\ln(1-x)}{4x}$.

5. Si trovino gli sviluppi in serie di Fourier per le seguenti funzioni di periodo (f indica la funzione T il periodo):

$$
\begin{aligned}
&f(t) = \cos^2\left(t + \frac{\pi}{2}\right) && T = \pi \\
&f(t) = t^3 - t \quad \text{se } -1 \le t \le 1 && T = 2; \\
&f(t) = t\cos(t) \quad \text{se } -\pi \le t \le \pi && T = 2\pi; \\
&f(t) = t\cos(t) \quad \text{se } 0 \le t \le \pi && T = \pi; \\
&f(t) = t\cosh(t) \quad \text{se } -2 \le t \le 2 && T = 4; \\
&f(t) = \begin{cases} 2t & \text{se } 0 \le t \le 1, \\ 2 - t & \text{se } 1 \le t \le 3 \end{cases} && T = 3; \\
&f(t) = \begin{cases} t & \text{se } 0 \le t \le 1, \\ 2 & \text{se } 1 \le t \le 2 \end{cases} && T = 2; \\
&f(t) = t^2 - 4 \quad \text{se } -2 \le t \le 2 && T = 4; \\
&f(t) = t^2 - 4 \quad \text{se } -1 \le t \le 3 && T = 4; \\
&f(t) = \begin{cases} t(t-1) & \text{se } 0 \le t \le 1, \\ (1-t)(t-2) & \text{se } 1 \le t \le 2 \end{cases} && T = 2.
\end{aligned}
$$

6. Scrivere lo sviluppo in serie di Fourier delle funzione $f(t) := \cosh(t)$ e $\sinh(t)$ per $-\pi \le t \le \pi$ (periodiche di periodo 2π). Se ne ricavino le somme delle serie:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+1)^2}.
$$

(R: le somme delle serie sono: $\frac{\pi\cosh(\pi)-\sinh(\pi)}{2\sinh(\pi)}$, $\frac{\pi}{4\sinh(\pi/2)} - \frac{1}{2}$, $\frac{\pi^2+\pi\sinh(\pi)\cosh(\pi)-2\sinh^2(\pi)}{4\sinh^2(\pi)}$, $\frac{\pi\cosh(\pi)\sinh(\pi)-\pi^2}{4\sinh^2(\pi)}$)