Alcuni esercizi su campi e potenziali

Claudio Saccon

3 giugno 2014

1. Dati i seguenti campi vettoriali $\vec{f}$ se ne trovi il dominio e si dica – motivandolo – se sono conservativi. In caso affermativo si trovi un potenziale F per il campo $\vec{f}$.
   (a) $\vec{f}(x,y) = e^{xy}\,(1 + xy + y^2)\,\mathbf{i} + e^{xy}\,(1 + x^2 + xy)\,\mathbf{j}$
   (b) $\vec{f}(x,y) = ye^{xy}\mathbf{i} - xe^{xy}\mathbf{j}$
   (c) $\vec{f}(x,y) = \dfrac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$
   (d) $\vec{f}(x,y) = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$
   (e) $\vec{f}(x,y) = \dfrac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$
   (f) $\vec{f}(x,y,z) = 2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$
   (g) $\vec{f}(x,y) = -\dfrac{y^2}{x^2}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{x}\mathbf{j}$
   (h) $\vec{f}(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}(xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$
   (i) $\vec{f}(x,y,z) = \cos(x^2 + y^2 + z^2)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$
   (j) $\vec{f}(x,y,z) = y^2\cos(z)\mathbf{i} + 2xy\cos(z)\mathbf{j} - xy^2\sin(z)\mathbf{k}$
   (k) $\vec{f}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy - 2z)\mathbf{k}$

2. Si faccia vedere che un campo radiale, cioè del tipo:

$$\vec{f}(x,y,z) = \phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

   è conservativo nell'ipotesi in cui φ sia continua su $[0, +\infty[$ e scrivere un potenziale per $\vec{f}$.

3. Calcolare i seguenti integrali di linea $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$, dove:
   (a) $\vec{f}(x,y,z) = 2xyz^2\mathbf{i} + x^2z^2\mathbf{j} + 2x^2yz\mathbf{k}$, $\gamma(t) = (t^2 - t)\cos(t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\sin(t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ per $t \in [0,1]$;
   (b) $\vec{f}(x,y,z) = (y^2\cos(x) + z^3)\mathbf{i} + (2y\sin(x) - 4)\mathbf{j} + (3xz^2 + 2)\mathbf{k}$, $\gamma(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + t\sin(2t)\mathbf{k}$ per $t \in [0, \pi/2]$;(*) provare a fare l'integrale senza trovare un potenziale per $\vec{f}$ e nondimeno senza fare grossi calcoli (sugg. se $\vec{f}$ è conservativo si può calcolare l'integrale su una qualsiasi curva con gli stessi estremi di γ);
   (c) $\vec{f}(x,y,z) = ye^{xy+z^2}\mathbf{i} + xe^{xy+z^2}\mathbf{j} + ze^{xy+z^2}\mathbf{k}$, $\gamma(t) = \mathbf{ijk}$ per $t \in []$;
   (d) $\vec{f}(x,y,z) = xe^{x^2+y^2}\mathbf{i} + ye^{x^2+y^2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\gamma(t) = t\sin(t)\mathbf{i} + t\sin(2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ per $t \in [0, \pi]$

(e) $\vec{f}(x,y,z) = yze^{2xyz}\mathbf{i} + xze^{2xyz}\mathbf{j} + xye^{2xyz}\mathbf{k}$, $\gamma(t) = t\sin(t)\mathbf{i} + t\sin(2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ per $t \in [0,\pi]$;

(f) $\vec{f}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy-2z)\mathbf{k}$, $\gamma(t) = t\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ per $t \in [0,\pi]$;

(g) $\vec{f}(x,y,z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy-2z)\mathbf{k}$, $\gamma(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ per $t \in [0,\pi]$.

Suggerimento: si sfrutti il fatto che $\vec{f}$ è conservativo oppure che $\vec{f}$ è somma di un campo conservativo (magari complicato) e di uno "semplice" (anche se non conservativo).

4. Calcolare i seguenti integrali di linea $\int_\gamma \vec{f} \cdot d\vec{s}$, dove:

(a) $\vec{f}(x,y,z) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + x^2\cos(yz)e^{xy+z^2}\mathbf{k}$, $\gamma(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ per $t \in [0,2\pi]$;

(b) $\vec{f}(x,y,z) = ye^{x^2y^2}\mathbf{i} + xe^{x^2y^2}\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\gamma(t) = 2t(t-\pi)\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ per $t \in [0,\pi]$;

(c) $\vec{f}(x,y,z) = y\cos(x^2y^2)\mathbf{i} + y\cos(x^2y^2)\mathbf{j} + (x^2+2y^2)z^2\mathbf{k}$, $\gamma(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ per $t \in [0,2\pi]$;

(Sugg.: (a) γ è tutta nel piano $\{z=3\}$ in più è una curva chiusa – inoltre $\vec{f_1}(x,y) = ye^{xy}\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j}$ è. . . ;(b) dato che $\vec{f}$ è conservativo si può scegliere una curva più comoda, purché congiunga $(0,0,0)$ a $(0,0,1)$; (c) si "spezzi" l'integrale nella componente xy e nella componente z – si noti che $\vec{f_1}(x,y) = y\cos(x^2y^2)\mathbf{i} + x\cos(x^2y^2)\mathbf{j}$ è conservativo.)

5. Si trovi un integrale primo per le seguenti equazioni/sistemi di equazioni differenziali – quando possibile si trovi l'espressione delle soluzioni:

(a) $y' = \dfrac{3x^2+y}{x-2x^2y}$; (si cerchi $\lambda(x,y) = \lambda(x)$ fattore integrante)

(b) $y' = -\dfrac{e^y+2x+3x^2}{e^y(1+x)}$;

(c) $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^3-y^2}{xy^2} \\ \dot{y} = \dfrac{2x^3-y^2}{x^2y} \end{cases}$; $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x^3-y^2}{y} \\ \dot{y} = \dfrac{2x^3-y^2}{x} \end{cases}$;

(d) $y' = -\dfrac{2xy}{3x^2+5y^2}$; (si cerchi $\lambda(x,y) = \lambda(y)$ fattore integrante)

(e) $y' = -\dfrac{2x+x^2-y^2}{(1+x)y}$: (si cerchi $\lambda(x,y) = \lambda(x)$ fattore integrante)

(f) $y' = -\dfrac{y+3x2y^2}{x+x^2y}$ (si cerchi $\lambda(x,y) = \lambda(xy)$) fattore integrante.