Alcuni esercizi sui teoremi della divergenza e di Stokes

Claudio Saccon

3 giugno 2014

1. Siano $\vec{f}(x,y,z) := (x^3+6xz)\mathbf{i}-(3x^2y+y^2)\mathbf{j}+(4x+2yz-3z^2)\mathbf{k}$ e $\Omega := \{|z| \leq 1-x^2-4y^2\}$.

   (a) Posto $S := \partial\Omega$ e indicando con $\vec{\nu}$ la normale esterna a Ω, si calcoli:
   $$\iint_S \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma.$$

   (b) Si dica se esiste un campo di vettori $\vec{F}$ tali che $\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{f}$ (cioè un potenziale vettore per $\vec{f}$) e in caso affermativo trovare un tale $\vec{F}$.

   (c) Si dica se tra i potenziali vettori di $\vec{f}$ ce n'è uno, indichiamolo con $F(x,y,z) = F_1(x,y,z)\mathbf{i}+F_2(x,y,z)\mathbf{j}+F_3(x,y,z)\mathbf{k}$, tale che $F_2(x,y,z) = F_2(x)$ (non dipende da y e z) e in caso affermativo trovare un tale $\vec{F}$.

   (d) Si calcolino
   $$\iint_{S^+} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma, \qquad \iint_{S^{++}} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma, \qquad \iint_{S^{+++}} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma.$$
   dove
   $$S^+ := S\cap\{z\geq 0\}\,, \quad S^{++} := S^+\cap\{x\geq 0\}\,, \quad S^{+++} := S^{++}\cap\{y\geq 0\}\,.$$

2. Siano $\vec{f}(x,y,z) := (xz - xy\cos(xyz))\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (-2x^3y + yz\cos(xyz))\mathbf{k}$ e $\Omega := \{y^2 \leq x^2+z^2, 1\leq y\leq 2\}$.

   (a) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso $S := \partial\Omega$.

   (b) Si calcoli il flusso di $\vec{f}$ attraverso la "superficie laterale" $S_\ell := \{y^2 = x^2+z^2, 1\leq y\leq 2\}$ (prendendo sempre come normale la normale uscente da Ω).

   (c) Si trovi un potenziale vettore $\vec{F}$ per $\vec{f}$ spiegando perché ciò è possibile.

   (d) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ sulla curva che descrive la circonferenza $\{x^2+z^2 = 1, y = 1\}$ percorsa in senso antiorario se vista dall'origine.

3. Siano
   $$\vec{f}(x,y,z) := -e^{-x^2+z}\mathbf{i} + e^{-y^2+z}\mathbf{j} + (2e^{-y^2+z}y - 2e^{-x^2+z}x)\mathbf{k}$$
   e $S := \{z = x^2-y^2, |x|\leq 1, |y|\leq 1\}$.

   (a) Si mostri che S è il supporto di una superficie (con bordo) orientabile con una normale $\vec{\nu}$ concorde con il versore $\mathbf{k}$ dell'asse z.

   (b) Si mostri che $\vec{f}$ ammette un potenziale vettore $\vec{F}$ e se ne trovi uno tale che $F_3(z) = z$.

(c) Si calcoli $\iint_S \vec{f} \cdot \nu \, d\sigma$.

4. Sia $\vec{F}(x, y, z) := (\sin(x) + y)\mathbf{i} + (\cos(y) + z^2)\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$. Si calcoli $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dove γ descrive $\{z = 2xy, x^2 + y^2 = 4\}$, orientata in verso antiorario se vista dall'origine.

5. Sia $\vec{F}(x, y, z) := yz\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + (z + xy)^3\mathbf{k}$. Si calcoli $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dove γ descrive $\{z = 0, x^2 + y^2 = 4\}$, orientata in verso antiorario se vista da sopra.

6. Sia $\vec{F}(x, y, z) := (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$. Si calcoli $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dove γ descrive il bordo del triangolo $T = \{2x + y + 2z = 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, orientata in verso orario se vista dall'origine.

7. Sia $\vec{F}(x, y, z) := (x + e^{xz})z\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + x(y + e^{xz})\mathbf{k}$. Si calcoli $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ dove $\gamma(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + \cos(2t)\mathbf{k}$ per $0 \leq t \leq 2\pi$ (suggerimento: si noti che $\gamma(t)$ è contenuta nell'iperboloide di equazione $z = x^2 - y^2$ e si applichi il teorema di Stokes).

8. Siano
$$\vec{f}(x, y, z) := \left(\frac{2xy}{1 + y^2} + 3z^2\right)\mathbf{i} + (2z - \ln\left(1 + y^2\right))\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$
e $S := \{x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4, z > 0\}$ orientata con la normale ν concorde con asse z. Si calcoli $\iint_S \vec{f} \cdot \nu \, d\sigma$.

9. Siano
$$\vec{f}(x, y, z) := x^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + xz^4\mathbf{k}$$
e $Q := \{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$. Si calcoli il flusso (uscente) di $\vec{f}$ attraverso la superficie ∂Q.

10. (*) Sia $\gamma(t) := \cos(t)\mathbf{i} + \sin(2t)\mathbf{k}$ per $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ e sia S la superficie ottenuta ruotando tale curva attorno all'asse z, Usando il teorema della divergenza si calcoli il volume del solido V racchiuso da S. Suggerimento: si cerchi un opportuno campo di vettori $\vec{f}$ tale che $\mathrm{div}(\vec{f}) = 1$.