Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

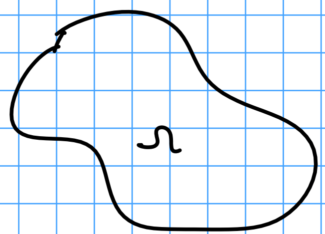
lezione 12, 30 maggio 2012

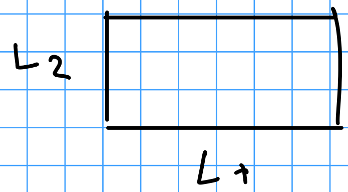
(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Eq. delle onde: Ω "dominio" in $\mathbb{R}^N$ (o $\mathbb{R}^N$)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(X,t) = c^2 \Delta u(X,t) \quad \text{su } \Omega & (X=(x,y)) \\
u(X,0) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) & (u_0, v_0 \text{ date}) \\
u(x,t) = 0 \quad \text{se } x \in \text{"bordo di } \Omega\text{"}, & t \in \mathbb{R}
\end{cases}
$$

$\left(\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right.$ è "l'operatore di Laplace" $\Big)$





SOLUZIONE "per serie di Fourier doppie in soli seni"
nel caso $\Omega = [0, L_1] \times [0, L_2]$:

$$
u(x,y,t) = \sum_{n,m} \left(A_{nm} \cos(\omega_{nm} c t) + B_{nm} \sin(\omega_n c t) \right) \cdot \sin(n \omega_1 x) \sin(m \omega_2 y) =
$$

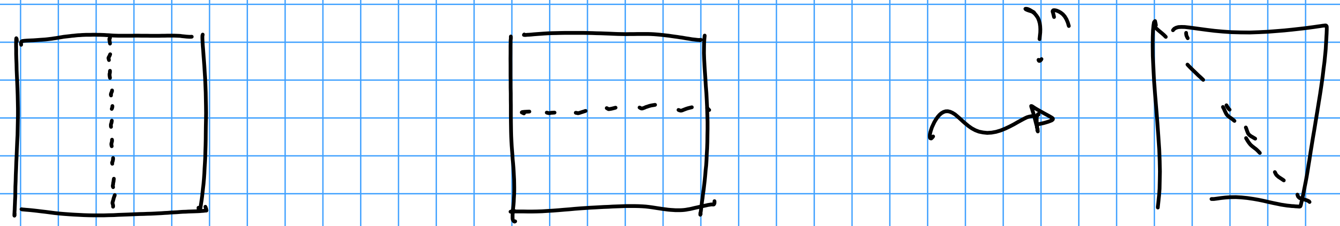
dove $\omega_1 = \dfrac{\pi}{L_1}$ $\quad \omega_2 = \dfrac{\pi}{L_2}$ $\quad \omega_{nm} = \sqrt{n^2 \omega_1^2 + m^2 \omega_2^2}$

A_{nm} e B_{nm} si trovano a partire da u_0 e v_0

$$\sum_{n,m} \underbrace{\rho_{nm}}_{\text{AMPIEZZA}} \cos(\omega_{nm} c t - \underbrace{\varphi_{nm}}_{\text{SFASAMENTO}}) \underbrace{\sin(n\omega_1 x)\sin(m\omega_2 y)}_{\text{modi fondamentali di vibrazione}}$$

$\omega_{nm} \simeq$ "frequenze fondamentali"

NOTA: Se $L_1 = L_2$ $\quad \omega_{nm} = \omega_{mn}$



$n=1 \quad m=2 \qquad\qquad n=2 \quad m=1$

$\Rightarrow$ Anche le "combinazioni lineari" dei due modi

$\simeq$ MODI MULTIPLI

Si potrebbe dim. che:

Teorema: Se u_0 e v_0 sono regolari $\Rightarrow$ (si trovano A_{nm}, B_{nm})

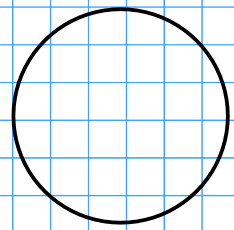
La serie scritta sopra converge unif. a una funzione regolare che risolve l'equazione.

LA FORMULA sopra, inoltre, ha senso anche se u_0 e v_0

non sono derivabili. In quel caso si può pensare alla $u(x,y,t)$ come a una "sol. generalizzata"

CASO DEL TAMBURO CIRCOLARE. $R>0$ FISSATO

$$\Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq R^2\}$$



$$\text{bordo di } \Omega = \{(x,y) : x^2+y^2 = R^2\}$$

Cerco, di nuovo, $u(x,y,t) = \phi(t)\psi(x,y)$

Se u è di questo tipo $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \phi''(t)\psi(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,y) \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \phi(t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi(x,y)$$

$\Rightarrow$ devo

$$\phi''(t)\psi(x,y) = -c^2\phi(t)\Delta\psi(x,y)$$

$$\overset{?}{\Leftarrow} \quad \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = -c^2\frac{\Delta\psi(x,y)}{\psi(x,y)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall (x,y) \in \Omega$$

qui c'è solo t qui c'è solo (x,y)

$$\Rightarrow \quad \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \lambda = \frac{c^2 \Delta \psi(x,y)}{\psi(x,y)}$$

dove λ è una costante.

$$\Longleftrightarrow \quad \phi''(t) = \lambda \phi(t) \quad + \quad (*) \begin{cases} \Delta \psi = \dfrac{\lambda}{c^2} \psi \\ + \ \psi(x,y) = 0 \text{ su } \partial\Omega \end{cases}$$

I modi fondamentali sono "autofunzioni" dell'operatore di Laplace (con dato nullo al bordo)

<u>FATTO</u> Se (ψ, λ) risolve $(*) \Rightarrow \boxed{\lambda < 0}$

<u>IDEA DI DIM.</u> Moltiplico per ψ l'equazione

$$\psi \Delta \psi = \frac{\lambda}{c^2} \psi^2$$

e integro su $\Omega \Rightarrow$
$$\int_\Omega \psi \Delta \psi = \frac{\lambda}{c^2} \int_\Omega \psi^2$$

per un teorema (Gauss/Green — se fossimo in una variabile sarebbe l'integrazione per parti:

$$\int_0^L \psi \psi'' dt = \frac{\lambda}{c^2} \int_0^L \psi^2 ds$$

$$\underbrace{[\psi\psi']_0^L}_{0} - \int (\psi')^2 ds \quad \Rightarrow \lambda = \frac{c^2 \int_0^L (\psi')^2}{\int_0^L \psi^2} > 0)$$

0 perché $\psi(0) = \psi(L) = 0$

$$\int_\Omega \psi \Delta \psi = -\int_\Omega |\nabla \psi|^2 \quad \text{se } \psi = 0 \text{ su } \partial\Omega \ \ldots$$

Quindi posso scrivere $\lambda = -\omega^2$

Allora l'equazione per ϕ è immediata

$$\phi(t) = A\cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$
$$= M\cos(\omega t - \varphi)$$

(ω è la frequenza)

RIMANE DA RISOLVERE

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi \\ \psi = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ORA CONSIDERO Ω = DISCO DI RAGGIO R e PASSO a coordinate polari. Considero

$x = \rho \cos(\theta) \qquad y = \rho \sin(\theta)$

$$\psi(x,y) = \psi_r(\rho, \theta) \qquad \Big(= \psi(\overbrace{\rho\cos\theta}^{x}, \overbrace{\rho\sin\theta}^{y}) \Big)$$

Usando la derivata (in più variabili) della funzione composta

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\psi_r(\rho,\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)\cos(\theta) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\psi_r(\rho,\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)(-\rho\sin\theta) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\psi\right)(\rho\cos\theta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\psi_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\right)\cos^2(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\cos\theta\sin\theta +$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\psi \sin\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi\right)\sin^2(\theta)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\psi_r = \ldots$$

ALLA FINE, usando $\Delta\psi = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi$, trovo

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\psi_r + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\psi_r}_{\text{Laplaciano in coordinate polari}} = -\frac{\omega^2}{c^2}\psi_r$$

che conviene mettere nella forma:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\psi_1 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\psi_1 + \rho^2 \frac{\omega^2}{c^2}\psi_1 = 0$$

Anche qui cerco $\psi_1(\rho, \theta) = V(\rho)\, W(\theta) \iff$

$$W(\theta)\left[\rho^2 V''(\rho) + \rho V'(\rho) + \rho^2 \frac{\omega^2}{c^2} V(\rho)\right] = - W''(\theta) V(\rho)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{V(\rho)}\left[\qquad\right] = - \frac{W''(\theta)}{W(\theta)}$$ $\iff$ entrambi costanti $= \gamma$

cioè:

(I) $\quad W''(\theta) = -\gamma W(\theta)$ $\quad$ + W 2π periodica

(II) $\quad \rho^2 V''(\rho) + \rho V'(\rho) + \left(\rho^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma\right) V(\rho) = 0$

$\quad V(R) = 0$

Dalla (I) ricavo $\gamma \geq 0$, $W(\theta) = W_0 \cos(\sqrt{\gamma}\,\theta - \theta_0)$

$\Rightarrow \quad \gamma = n^2$ con n intero $n \geq 0$

$\Rightarrow$ la (II) diventa

$$\begin{cases} \rho^2 V''(\rho) + \rho V'(\rho) + \left(\rho^2 \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\right) V(\rho) = 0 \\ V(R) = 0 \end{cases}$$

Prendo $V_1(r) = V\left(\frac{cr}{\omega}\right)$ (dilatazione nelle ascisse)

$$\Leftrightarrow \quad V(\rho) = V_1\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)$$

$$V'(\rho) = \frac{\omega}{c} V_1\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)$$

$$V''(\rho) = \frac{\omega^2}{c^2} V_1\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)$$

se uso l'equazione di V

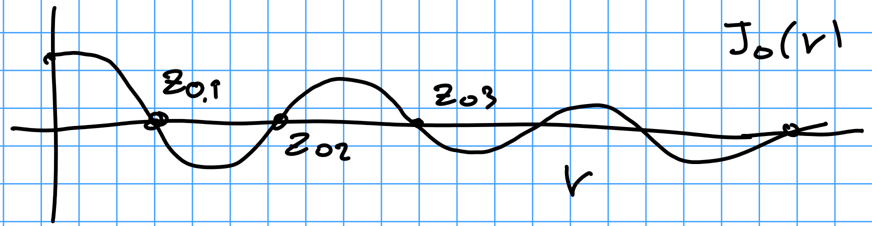
$$\underbrace{\rho^2 \frac{\omega^2}{c^2}}_{r} V_1''(r) + \underbrace{\rho \frac{\omega}{c}}_{r} V_1'(r) + \left(\underbrace{\rho^2 \frac{\omega^2}{c^2}}_{r} - n^2\right) V_1(r)$$

$$\Updownarrow$$

(EQ)
$$\begin{cases} r^2 V_1''(r) + r V_1'(r) + (r^2 - n^2) V_1(r) = 0 \\ V_1\left(\frac{\omega}{c} R\right) = 0 \end{cases}$$

eq. di Bessel di ordine n. ω è fattore incognito

PER ESEMPIO prendiamo $m=0$. La sol. è $J_0(r)$ (a meno di multipli)



J_0 ha una successione di zeri $z_{0,1}$, $z_{0,2}$, $z_{0,3}$ ..

SE vale EQ $\Rightarrow$ $\frac{\omega}{c} R = z_{0,k}$ per qualche k

$\Leftrightarrow$ $\omega = \omega_{0,k} = \frac{c}{R} z_{0,k}$

DUNQUE DATO $m=0$ c'è una successione $\omega_{0,k}$ di possibili valori di ω per cui si risolve EQ.

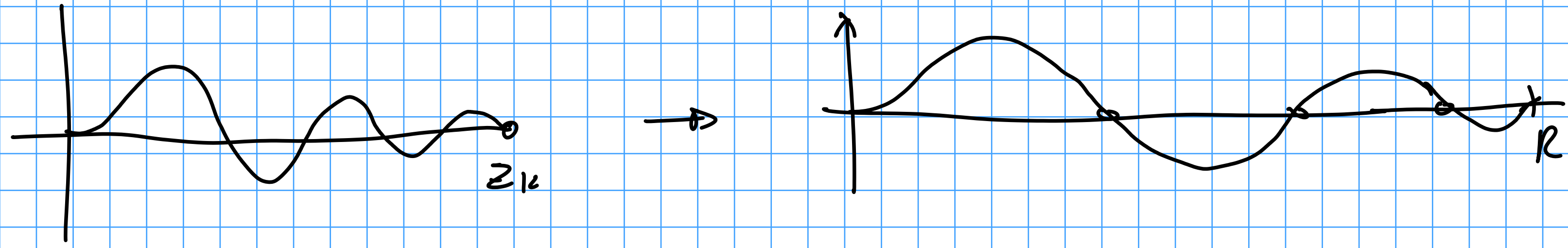
$V_1(r) = J_0(r)$ su $[0, \frac{\omega_{0,k} R}{c}]$ $\Longleftrightarrow$

$V(\rho) = J_0\left(\frac{\omega_{0,k}}{c} \rho\right)$ per $\rho \in [0, R]$

Stesso discorso per $m \geq 1$ . .

$V(\rho) = J_m\left(\frac{\omega_{m,k}\rho}{c}\right)$ per $\rho \in [0, R]$

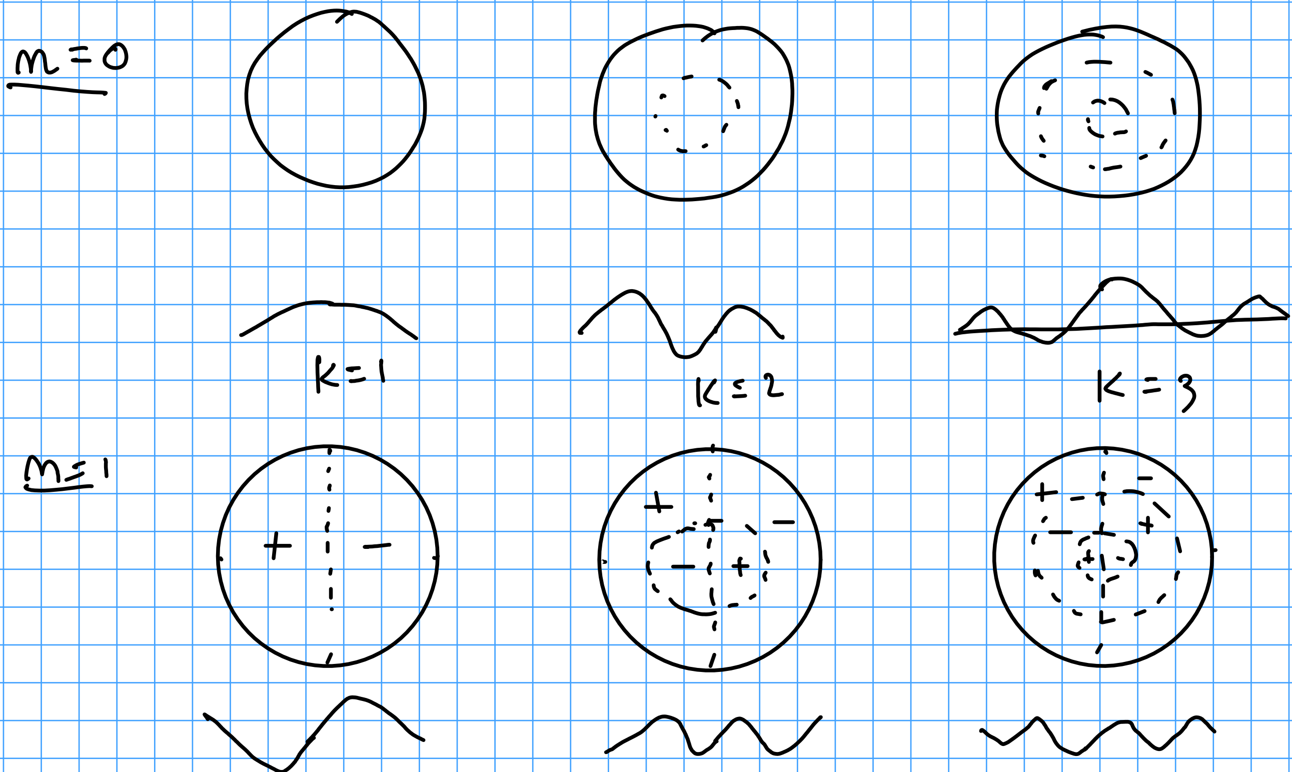
dove $\omega_{m,k} = \frac{c}{R} z_{m,k}$



IN DEFINITIVA:

$$u(\rho,\theta,t) = M\cos(\omega_{m,k}\,t - t_0)\cos(m\theta-\theta_0)\,J_m\!\left(\frac{z_{m,k}}{R}\rho\right)$$

$$\omega_{m,k} = \frac{c}{R} z_{m,k}$$



m = 2