Serie di Fourier e applicazioni
a equazioni alle derivate parziali

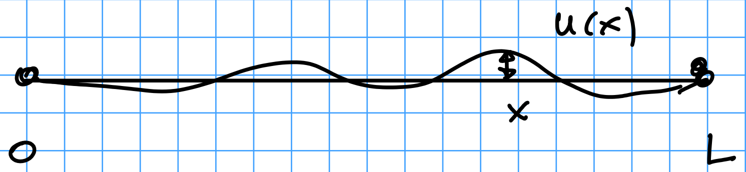
prof. Claudio Saccon (*)

lezione 11, 24 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Altra applicazione dei metodi visti:

EQUAZIONE DELLE ONDE



$u(x,t)$ = distanza della corda dalla posizione di riposo nel punto x al tempo t. (EQ. DI D'ALAMBERT)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \leftarrow \text{forza esterna} \\ u(x,0) = u_0(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \quad (u_0, v_0 \text{ assegnate}) \\ \text{(posizione e velocità all'istante } t=0) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \text{(corda fissata agli estremi)} \end{cases}$$

- c è una costante in cui entrano la costante elastica della corda e la densità - supposta costante

IDEA (già vista) $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\omega x)}$

dove $\omega = \frac{\pi}{L}$ (serie di Fourier in x, in soli seni (dato le condizioni agli estremi), con coeff. dipendenti dal tempo).

$f = 0$ – NO FORZE ESTERNE (per vedere il caso più semplice)

Se "tutto funziona"

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t) \sin(n\omega x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \left(-n^2\omega^2\right) \sin(n\omega x)$$

QUINDI MI TROVO LE CONDIZIONI:

$$\begin{cases} u_n'' = -c^2 n^2 \omega^2 u_n & \forall n \geq 1 \\ u_n(0) = A_n \\ u_n'(0) = B_n \end{cases}$$

dove $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x)$, $v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega x)$

perché $u_m(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(0) \sin(m\omega x)$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \updownarrow \\ u_0(x) & = & \sum_m A_n \sin(m\omega x) \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_n(x,0) = \sum_m u_m'(0) \sin(m\omega x)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \updownarrow \\ v_0(x) & = & \sum_m B_m \sin(m\omega x) \end{array}$$

$$\begin{cases} u_m'' = -c^2 m^2 \omega^2 u_m \\ u_m(0) = A_n \\ u_m'(0) = B_m \end{cases}$$

+ LA SO RISOLVERE

$$u_m(t) = a \cos(cn\omega t) + b \sin(cm\omega t)$$

$$\Downarrow$$

$$u_m'(t) = -m\omega a \sin(m\omega t) + m\omega b \cos(m\omega t)$$

DA CUI LE CONDIZIONI $(t=0)$ $a = A_n$ DUNQUE

$m c \omega b = B_m$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(cn\omega t) + \frac{B_n}{n\omega c} \sin(cn\omega t) \right) \sin(n\omega x)$$

$=$ (prostaferesi)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left[\sin(n\omega x + cn\omega t) + \sin(n\omega x - cn\omega t) \right] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{2n\omega c} \left[\cos(n\omega x + cn\omega t) - \cos(n\omega x - cn\omega t) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} \left[\sin(n\omega(x+ct)) + \sin(n\omega(x-ct)) \right] +$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{2n\omega c} \left[\cos(n\omega(x+ct)) - \cos(n\omega(x-ct)) \right] =$$

$$\frac{1}{2} \left[u_0(x+ct) + u_0(x-ct) \right]$$

$$+ \frac{1}{2c} \left[V_0(x+ct) - V_0(x-ct) \right]$$

se $V_0(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\omega} \cos(n\omega x)$

$$\Rightarrow V_0'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\cancel{n\omega}} \left(- \cancel{n\omega} \right) \sin(n\omega x) = \sum B_n \sin(\omega x) = v_0(x)$$

QUINDI V_0 E' UNA PRIMITIVA DI υ_0

INOLTRE $\int_0^L V_0(x)\,dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\omega} \int_0^L \cos(n\omega x)\,dx =$

$(\sigma = \omega x, \quad d\sigma = \omega\,dx) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\omega^2} \underbrace{\int_0^{\pi} \cos(n\sigma)\,d\sigma}_{=0}$

perché $\int_0^{\pi} \cos(n\sigma)\,d\sigma = \left[\frac{\sin(n\sigma)}{n} \right]_0^{\pi} = 0 - 0$

DUNQUE $V_0(x)$ è (l'unica) primitiva di $\upsilon_0(x)$ con integrale nullo su $[0, L]$.

"HO DIMOSTRATO" che

u_0 e υ_0 vanno pensate periodiche di periodo $2L$ e dispari

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+ct) + u_0(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left(V_0(x+ct) - V_0(x-ct)\right)}$$

noto che $u(x,0) = \frac{1}{2}\left(u_0(x) + u_0(x)\right) + \frac{1}{2c}\left(V_0(x) - V_0(x)\right) = u_0(x)$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \frac{c}{2}\underbrace{\left(u_0'(x+ct) - u_0'(x-ct)\right)}_{0} + \underbrace{\frac{c}{2c}\left(V_0'(x+ct) + V_0'(x-ct)\right)}_{\upsilon_0(x)}$$

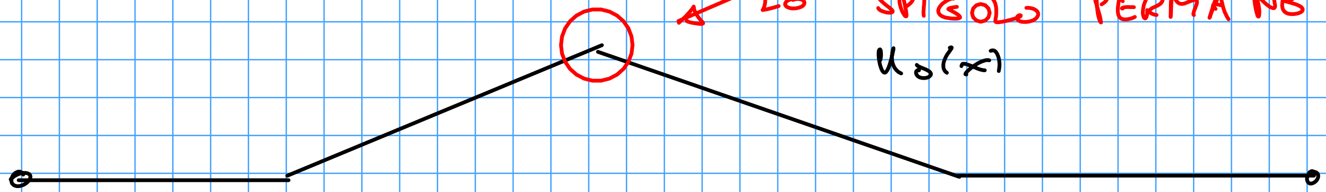
$=$

e poi dovrei fare $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \dots \quad = 0$

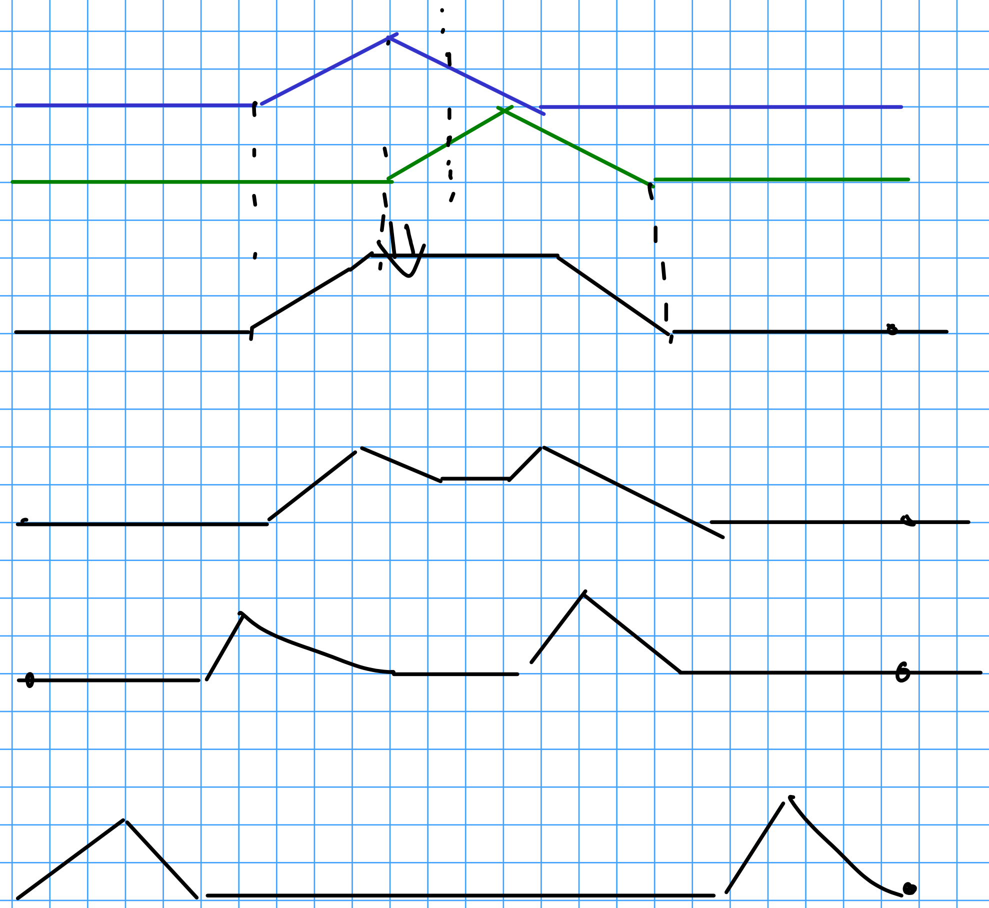
TUTTO TORNA SE SUPPONGO u_0 derivabile <u>due volte</u> e v_0 derivabile <u>1 volta</u>

PERÒ - DATO CHE L'ESPRESSIONE DI $u(x,t)$ ESISTE ANCHE SENZA TALI IPOTESI - SI POTREBBE DARE UNA NOZIONE "GENERALIZZATA" DI SOLUZIONE

LO SPIGOLO PERMANE <u>PER i $t>0$</u>



se $v_0(x)=0$, $\Rightarrow$ l'evoluzione della soluzione che parte dalla configurazione tipo



(VEDI LA DISPENSA IN RETE PER DISEGNI MIGLIORI)

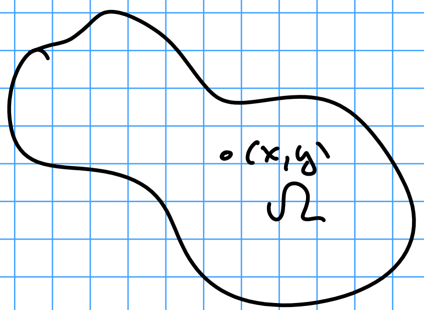
OSS (a) c è la "velocità di propagazione" FINITA (a differenza di quanto accade per il calore)

(b) Si può risolvere per $t>0$ e per $t<0$
TUTTO REVERSIBILE

(c) NON C'È REGOLARIZZAZIONE: la regolarità di $u(x,t)$ è la stessa di $u(x,0)$

CASO BIDIMENSIONALE: (TAMBURO)

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (forma del tamburo)



$u(t,x,y)$ = altezza della "membrana elastica" (ancorata al bordo di Ω) all'istante t nel punto (x,y)

L'EQUAZIONE (di d'Alembert) DIVENTA

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x,y) = c^2 \Delta_{xy} u(t,x,y)$$

dove (l'operatore di Laplace) $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

ANCHE QUI ci sono condizioni iniziali:

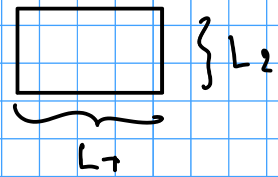
- $u(0,x,y) = u_0(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial t} u(0,x,y) = v_0(x,y)$

e le condizioni "di ancoraggio":

• $u(t,x,y)=0$ se (x,y) è sul bordo di Ω

POSSO STUDIARE TALE PROBLEMA PER ALCUNI Ω particolari: Ω = RETTANGOLO / Ω = DISCO

<u>CASO</u> $\Omega=[0,L_1]\times[0,L_2]$



$\omega_1=\frac{\pi}{L_1}$ $\quad$ $\omega_2=\frac{\pi}{L_2}$

<u>IDEA</u> cerco

$$u(t,x,y)=\sum_{n,m} u_{nm}(t)\sin(\omega_1 n x)\sin(\omega_2 m y)$$

ALLORA (come prima)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x,y)=\sum_{n,m} u''_{nm}(t)\sin(\omega_1 n x)\sin(\omega_2 m y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y)=-\sum_{n,m} u_{nm}(t)\,\omega_1^2 n^2\sin(\omega_1 n x)\sin(\omega_2 m y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x,y)=-\sum_{n,m} u_{nm}(t)\,\omega_2^2 m^2\sin(\omega_1 n x)\sin(\omega_2 m y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{xy} u =$$

$$\sum_{n,m} \left[u''_{nm}(t) + (\omega_1^2 n^2 + \omega_2^2 m^2) u_{nm}(t) \right] \sin(n\omega_1 x) \sin(m\omega_2 y)$$

DUNQUE DEVO IMPORRE

$$\begin{cases} u''_{nm}(t) = -(\underbrace{\omega_1^2 n^2 + \omega_2^2 m^2}) u_{nm}(t) \\ + \text{condizioni iniziali ricavabili dai dati iniziali} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{nm}(t) = A_{nm} \cos\left(\sqrt{\omega_1^2 n^2 + \omega_2^2 m^2}\, t\right) + B_{nm} \sin\left(\sqrt{\omega^2 n^2 + \omega_2^2 m^2}\, t\right)$$

$A_{n,m}$ e B_{nm} si ricavano da $u_0(x,y)$ e $v_0(x,y)$

L'ESAME È PER VENERDI' 13 LUGLIO ALLE 9.00 AULA A 13

ORE 9.00 AULA A13

– se ci sono problemi contattatemi