Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

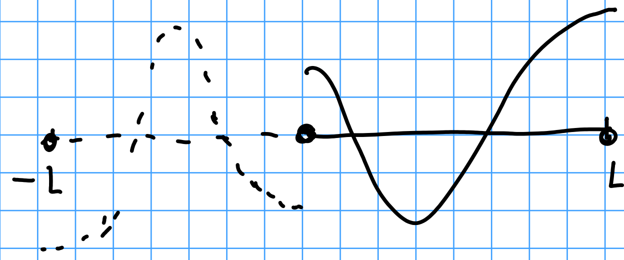
prof. Claudio Saccon (*)

lezione 10, 17 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

SVILUPPI IN SOLI SENI / COSENI.

Data una funzione $f : [0, L]$ prendiamo $\omega = \frac{\pi}{L}$



Vorrei trovare uno sviluppo del tipo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\omega x)$

Per questo:

(1) DEFINISCO $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < L \\ -f(-x) & \text{se } -L < x < 0 \end{cases}$ $\quad (\tilde{f}(0) = 0)$ $\quad (\tilde{f}(L) = \tilde{f}(-L))$

$\tilde{f}$ - $2L$ periodica

IN QUESTO MODO $\tilde{f}$ è dispari e coincide con f su $]0, L[$

(2) Posso sviluppare $\tilde{f}$ in serie di Fourier rispetto alla famiglia di funzioni $\cos(n\,\omega_1 x)$ e $\sin(n\,\omega_1 x)$

$\omega_1 \to \omega$

dove $\omega_1 = \frac{2L}{2\pi} = \omega$

Dato che $\tilde{f}$ è dispari non ci sono termini con i coseni

In altre parole scrivo

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

MA $a_n = 0 \ \forall n$, mentre i b_n sono dati da

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}L} \int_{-L}^{L} \tilde{f}(x) \sin(n\omega x)\, dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega x)$$

Per i teoremi fatti

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

questo eguale è da intendersi in diversi modi a seconda della regolarità di $\tilde{f}$:

- se $\tilde{f}$ è regolare a tratti allora "=" vale in senso puntuale (e nei punti di discontinuità la serie tende a $\frac{\tilde{f}(x_0^+) + \tilde{f}(x_0^-)}{2}$)
- se $\boxed{\tilde{f} \text{ è } C^1}$ ⇒ "=" vale in senso uniforme
  deve "ricordarsi bene" agli estremi ($f: f(0) = f(L) = 0$)
- se $\tilde{f}$ è solo a quadrato sommabile ⇒ "=" vale nel senso dell'energia

SE RESTRINGO x a $[0, L]$ $\Rightarrow$ posso mettere $f(x)$ invece di $\tilde{f}$

⊗ Nota che sto approssimando f con delle funzioni NULLE IN $x=0$, $x=L$.
Se $f(0) \neq 0$ / $f(L) \neq 0$ l'approssimazione "è BRUTTA" vicino a questi punti.

VICEVERSA DATA UNA SUCC. $\{b_n\}$ posso costruire

$$f(x) = \sum b_n \sin(n\omega x) \quad \text{su } [0, L]$$

Da quanto fatto seguono vari risultati:

(1) Se $\sum |b_n| < +\infty$ $\Rightarrow$ f è continua, $f(0) = f(L) = 0$

e la convergenza della serie è uniforme

(2) Se $\sum |b_n| n^K < +\infty$ $\Rightarrow$ f è derivabile K volte

tutte le derivate fino alla K-ESIMA SONO CONTINUE e sono somma uniforme della serie delle derivate K-esime. Inoltre tutte le derivate di ordine pari sono nulle in $x=0$, $x=L$.

ANALOGAMENTE SI PUÒ SVILUPPARE IN SOLI COSENI. Velocemente:

$f : [0, L] \to \mathbb{R}$ posso scrivere $\left(\omega = \frac{\pi}{L} \right)$

$$f(x) \underset{??}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \omega x)$$

dove $a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\omega x)\,dx$

e il senso di "=" è come nel caso dei seni.

Da farlo si definisce $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases}$

(PARI) Per la convergenza conta la regolarità di f^*.

VICEVERSA Dati degli a_n posso considerare

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n \omega x)$$

(1') se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^k < +\infty$ con $k \geq 0$ $\Rightarrow$ f è k volte der.

e le serie delle derivate fino alla k-esima convergono unif. a $f, f', \dots, f^{(k)}$

NOTA in questo caso tutte le derivate di ordine DISPARI sono nulle in $x=0$, $x=L$

IN ENTRAMBI I CASI se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty$ / $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$

la somma definisce (in energia) una funzione a quadrato sommabile, e vale la formula di Parseval

---

VEDIAMO PIÙ IN DETTAGLIO L'EQUAZIONE DEL CALORE

$L>0$: sbarra di lunghezza L.

In ogni punto x della sbarra c'è una "densità di calore" $q(x)$, che mi dice che, dati $0 \le a < b \le L$

l'energia termica $Q(a,b)$ contenuta nel pezzo di sbarra da a a b è data da

$$\int_a^b q(x)\,dx$$

IPOTESI (a) Se $T(x)$ è la temperatura $\Rightarrow$

$$T(x) = c(x) \cdot q(x)$$

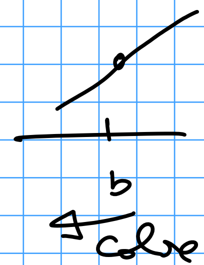
$c(x)$ è una costante dipendente dal materiale

SUPPORREMO $c(x) = c$ costante

(b) (Modello per la conduzione) ~ Il calore si muove dalle zone calde alle zone fredde ~

IPOTESI LINEARE

$$\frac{d}{dt} Q[a,b] = T'(b) - T'(a)$$



$\Rightarrow$ $Q[a,b]$ cresce

NE DEDUCO CHE

$$\frac{d}{dt} \int_a^b q(x)\, dx = T'(b) - T'(a) = \int_a^b T''(x)\, dx$$

|| (supponiamo di poterlo fare)

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \frac{T(x)}{c(x)}$$

DATO CHE DEVE VALERE $\forall\, a,b$

$$\frac{d}{dt} T(x,t) = c(x) \frac{d^2}{dx^2} T(x,t)$$

METTIAMO $c(x) = 1$ per semplicità (materiale omogeneo)

TUTTO QUESTO IN ASSENZA DI FONTI DI CALORE.
SE NO SI DEVE AGGIUNGERE UN TERMINE

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + f(t,x)$$

A questa equazione "astratta" devo aggiungere delle informazioni:

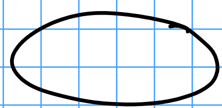
<u>DISTRIBUZIONE AL TEMPO $t=0$</u> :

$$T(x,0) = T_0(x) \quad \text{(NOTA)}$$

<u>COSA SUCCEDE AGLI ESTREMI</u> varie possibilità:

(1) condizione periodica $T(x+L,t) = T(x) \quad \forall x, \forall t$

(SBARRA CHIUSA AGLI ESTREMI / <u>ANELLO</u>



(2) condizione zero agli estremi (DIRICHLET)

$$T(0,t) = T(L,t) = 0$$

c'è un "termostato" che tiene a zero la temperatura agli estremi

Poi, più in generale considero

$$T(0,t) = T_1(t) \quad , \quad T(L,t) = T_2(t)$$

con T_1 / T_2 assegnate.

(3) $$\frac{\partial}{\partial x} T(0,t) = \frac{\partial}{\partial x} T(L,t) = 0 \qquad \forall t$$

NON CI SONO SONO SCAMBI DI CALORE CON L'ESTERNO

VEDIAMO IL CASO 2 (negli altri casi si può ragionare in maniera analoga.)

Idea: cerco $$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\omega x)$$

dove $\omega = \frac{\pi}{L}$. SE TUTTO FUNZIONA:

- $$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m'(t) \sin(m\omega x)$$
- $$\frac{\partial^2 T}{\partial^2 x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} -b_m(t)\, m^2 \omega^2 \sin(m\omega x)$$
- Se c'è anche il termine noto $f(x,t)$ lo sviluppo in serie di seni rispetto allo spazio:

$$f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin(m\omega x) \qquad \text{dove}$$

$$f_m(t) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x,t)\sin(m\omega x)\,dx$$

(il senso di "=" dipende dalla regolarità di f.)

- IMPONGO L'EQUAZIONE

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m'(t) + m^2\omega^2 b_m(t) - f_m(t) \right) \sin(m\omega x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad b_m'(t) = -m^2\omega^2 b_m(t) - f_m(t) \qquad \forall m \quad \forall t$$

SONO INFINITE EQ. DI LINEARI DI ORDINE 1 in t:

CASO $f=0$ $\qquad b_m'(t) = -m^2\omega^2 b_m(t)$

$\Longleftrightarrow \quad b_m(t) = e^{-m^2\omega_2 t}\, b_m(0)$

e $b_m(0)$ = m. coeff. di Fourier in sol. sen della funzione $T_0(x)$ e cioè

$$b_m(0) = \frac{2}{L}\int_0^L T_0(x)\sin(m\omega x)\,dx$$

• DUNQUE VIENE CHE $T(x,t)$ (se tutti i conti sono leciti)

$$(*) \quad T(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\omega^2 t}\, b_m(0)\sin(m\omega x)$$

RAGIONIAMO ORA ALL' INDIETRO PARTENDO DALLA FORMULA

$\longleftrightarrow$ La formula $(*)$ definisce $T(x,t)$ per ogni $x\in[0,L]$ e ogni $t>0$. Tale $T(x,t)$ è infinitamente derivabile e risolve l'equazione.

① Fisso $t_0>0$ e prendo $t\geq t_0$. Se chiamo $u_m = e^{-m^2\omega^2 t}\, b_m(0)$, Allora

$$|u_n|\, n^k \le n^k e^{-n^2\omega^2 t_0} |b_n(0)| \le$$
$$\frac{1}{2} n^{2k} e^{-2n^2\omega^2 t_0} + \frac{1}{2}|b_n(0)|^2$$

$T_0(x)$ HA ENERGIA FINITA

$\left(a \cdot b \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)$. Se suppongo $\sum_n |b_n(0)|^2 < +\infty$

ottengo che $\sum_n |u_n|\, n^k < +\infty$ perché
$\sum_n n^{2k} e^{-2n^2\omega^2 t_0}$ è sommabile a causa dell'esponenziale

$\Rightarrow$ $T(t,x)$ è infinitamente derivabile in x
e la derivata k-esima in x è la serie delle derivate k-esime.

② Vediamo la derivabilità in t. MOSTRIAMO che la serie delle derivate in t converge unif. In fatti: se mi metto a $t \ge t_0$

$$\sum_n -n^2\omega^2 e^{-n^2\omega^2 t} b_n(0) \sin(n\omega x)$$ ($=$ serie delle derivate in t)

Applico la conv. totale:

$$\sum_n \max_{t \geq t_0} \left| -n^2 \omega^2 e^{-n^2\omega^2 t} b_n(0) \sin(n\omega x) \right|$$

è maggiorata termine a termine da

$$\sum -n^2\omega^2 e^{-n^2\omega^2 t_0} b_n(0)$$

e per gli stessi motivi del caso (1), vedi che questa serie NUMERICA converge. Per i criteri fatti

$\Rightarrow$ $T(x,t)$ è derivabile in t su $[t_0, +\infty[$

e la derivata è data dalla serie delle derivate

(3) Vale l'equazione: basta scrivere le derivate come serie di derivate e vedere che tornano.

HO VERIFICATO CHE se $T_0(x)$ ha energia finita

($\sum b_n(0)^2 < +\infty$) $\Rightarrow$ la funzione data da $(*)$

è definita per ogni $t > 0$, è infinitamente derivabile e risolvo l'eq.

MI MANCANO ANCORA LE "CONDIZIONI"

(4) $\forall t > 0 \quad T(0,t) = T(L,t) = 0$, a causa del punto ① DATO CHE HO UNO SVILUPPO IN SULI SENI, la sommabilità vista al punto (↑) IMPLICA ANCHE CHE (tutte le derivate pari e) la funzione è nulla in $x=0$, $x=L$ $\forall t$

LA CONDIZIONE AL CONTORNO È VERIFICATA AUTOMATICAMENTE A CAUSA DELLA SCELTA FATTA ALL'INIZIO DI SVILUPPARE IN SULI SENI.

Se avessimo voluto risolvere il problema con condizione di derivate nulle al bordo avremmo sviluppato in coseni.

(5) Per quanto riguarda la condizione $T(x,0) = T_0(x)$ bisogna vedere. Nel caso più cattivo, sappiamo solo che $T_0(x)$ ha energia finita, ci

può dimostrare che, posto

$T_t(x) = T(x,t)$, si ha $T_t \to T_0$

IN ENERGIA, cioè

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^L |T(x,t) - T_0(x)|^2 \, dx = 0$$

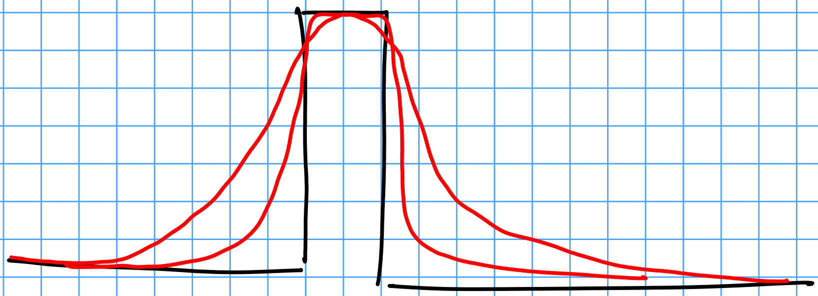
Se so di più, per esempio se so che $\sum |b_n(0)| < +\infty$

($\Rightarrow$ $T_0(x)$ è continua) $\Rightarrow$

$T_t(x) \to T_0(x)$ UNIF. rispetto a x per $t \to 0$

cioè $\lim_{t \to 0} \max_{x \in [0,L]} |T(t,x) - T_0(x)| = 0$

in particolare "$\lim_{t \to 0, \, x \to x_0} T(t,x) = T_0(x)$".



condizione iniziale

- L'EQUAZIONE DEL CALORE "REGOLARIZZA"
- L'EQ. DEL CALORE HA "VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE INFINITA":
- NON SI RISOLVE per $t<0$ (eccetto casi molto rari)

$\sim$ FENOMENO DI "DIFFUSIONE"