Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

lezione 09, 10 maggio 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Riassunto: dato f T-periodica definisco i suoi coeff. di Fourier: $\omega := \frac{2\pi}{T}$

$$a_n := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega n t)\,dt \qquad \text{se } n \geq 1$$

$$a_0 := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$b_n := \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega n t)\,dt$$

Chiamo "serie di Fourier" del. a f la serie:

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

FATTI (1) Se f è "regolare a tratti" $\Rightarrow$ $f(t)$ è somma della serie di Fourier in ogni t in cui f è continua. Negli altri punti t_0 (NUMERO FINITO) la serie converge a $\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$

(2) Se f è C^1 (esiste f' continua) $\Rightarrow$ la serie di

Fourier converge unif. a f.

RISULTATI "SPECULARI". Date (a_n) e (b_n):

(3) Se $\sum_n |a_n| < +\infty$, $\sum_n |b_n| < +\infty$, allora la serie definita da (F) converge uniformemente a una funzione f (CONTINUA). INOLTRE (NUOVO) f è tale che a_n e b_n sono i coeff. di Fourier di f

(3') Se $\sum_n n|a_n| < +\infty$, $\sum_n n|b_n| < +\infty$ $\left(\Rightarrow \begin{matrix} \sum |a_n| < +\infty \\ \sum |b_n| < +\infty \end{matrix} \right)$

$\Rightarrow$ la f di cui sopra è derivabile e f' è somma uniforme della serie delle derivate:

$$f' \underset{(UNIF.)}{=} -\sum_n n\omega\, a_n \sin(n\omega t) + \sum_n n\omega\, b_n \cos(n\omega t)$$

PIÙ IN GENERALE se $\sum_n n^k |a_n| < +\infty$, $\sum_n n^k |b_n| < +\infty$

$\Rightarrow$ esiste $f^{(k)}$ (derivata K-ESIMA) continua e questa è somma uniforme della serie delle derivate K-esime.

(4 a) Se $\sum |a_n|^2$ e $\sum |b_n|^2$ sono convergenti allora esiste una f T periodica tale che $\int_0^T f^2(t)\,dt < +\infty$ e la serie di Fourier (F) converge a f "IN ENERGIA" CIOÈ

$$\lim_{K\to\infty} \int_0^T \Big| \underbrace{\sum_{n=0}^{K} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{K} b_n \sin(n\omega t)}_{f_K(t) \,=\, \text{somma } K\text{-esima}} - f(t) \Big|^2 dt = 0$$

(se chiamo "energia" di f l'integrale $\int_0^T f^2(x)\,dx$ sto dicendo che energia $(f - f_K) \to 0$ per $K \to \infty$.

INOLTRE a_K e b_K sono i coeff di Fourier di f.

(4 b) Data f, T periodica e tale che $\int_0^T f^2 < +\infty$

posti a_n e b_n i coeff. di Fourier di f $\Rightarrow$

$\sum a_n^2 < +\infty$, $\sum b_n^2 < +\infty$ e la serie (F) converge in energia a f.

INOLTRE VALE LA FORMULA (di Parseval)

$$\boxed{T a_0^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \int_0^T f(t)^2\, dt}$$

COMMENTO Se chiamo "prodotto scalare" fra due due funzioni a energia finita, f e g

il numero $\int_0^T f(t)\, g(t)\, dt = \langle f, g\rangle$

(ENERGIA di f è $\langle f, f\rangle$) ALLORA

(1) Le funzioni $\sin(n\omega t)$ e $\cos(n\omega t)$ sono "ortogonali": $\langle \sin n\omega t, \cos(m\omega t)\rangle = 0$

$n \neq m$ $\langle \sin(n\omega t), \sin m\omega t\rangle = 0$

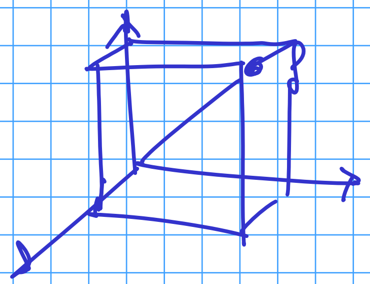
$n \neq m$ $\langle \cos(n\omega t), \cos(m\omega t)\rangle = 0$

mentre $\langle \cos(n\omega t), \cos(n\omega t)\rangle = T$

$\langle \sin(n\omega t), \sin(n\omega t)\rangle = T$

(2) gli a_n e i b_n sono le "coordinate" di f nella "base" di tali funzioni

(3) La formula di Parseval dice che la "norma al quadrato" di f è la somma dei quadrati delle coordinate

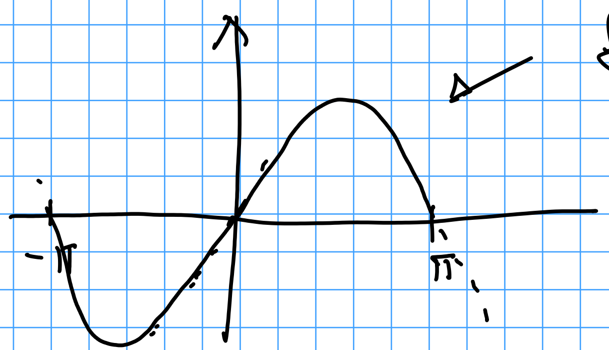


(a meno di un fattore fisso che dipende dal fatto che i vettori della base non hanno norma 1.

<u>Fatti:</u>

- Se f è pari $\Rightarrow$ $b_n = 0$
- Se f è dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0$
- Si può usare un qualunque intervallo $[a, b]$ con $b - a = T$ per calcolare i coeff di f.

Altro esempio



$$f(t) = \begin{cases} t(\pi - t) & \text{su } [0, \pi] \\ t(\pi + t) & \text{su } [-\pi, 0] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f è DISPARI ($a_n = 0 \quad \forall n$)

CALCOLIAMO i b_n

$\omega = 1 \quad (T = 2\pi)$ la "base" è data da $\sin(nt)$
(e $\cos(nt)$ ma non serve)

$$b_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi-t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \text{(per parti)} = \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[t(\pi - t)\frac{(-\cos(nt))}{n}\right]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi-2t)\cos(nt)\,dt$$

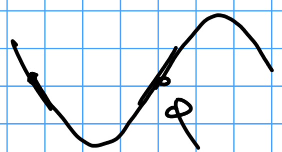
$$= \frac{2}{n\pi}\underbrace{\left[(\pi-2t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{n^2\pi}\int(-2)\sin(nt)\,dt =$$

$$\frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right) = b_n$$

DUNQUE

$$f(t) \underset{\text{UNIFORME}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)t)$$

(• sì perché f è C^1
• sì perché i $b_n \simeq \frac{1}{n^3} \Rightarrow$
$\sum n|b_n| < +\infty$)



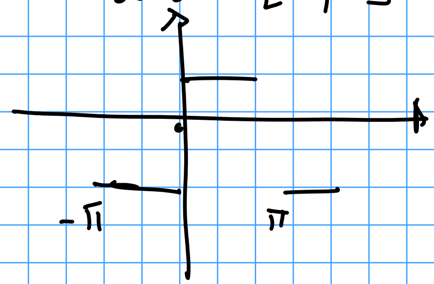
DERIVATA π (sì da dx che da sx !!)

NOTA Se metto $t = \frac{\pi}{2}$ trovo

$$\frac{\pi^2}{4} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi (2k+1)^3} \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

DA CUI $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

Se riprendo l'onda quadra $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, \pi] \\ -1 & \text{se } t \in [-\pi, 0] \end{cases}$



$$\Rightarrow \underset{\text{PUNTUALE}}{f(t) =} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{4}{(2k+1)\pi}}_{b_{2k+1}} \sin((2k+1)t)$$

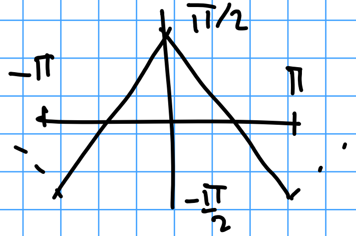
Per la formula di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt = \pi \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2 = \pi \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi$$ DUNQUE

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ESERCIZIO (?) Provare ad applicare la formula di Parseval allo sviluppo dell'onda triangolare:



(Dovrebbe venire che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)

INIZIO DI ESEMPIO (lo finiamo la prossima volta...)

Considero una "sbarra" di lunghezza L e voglio studiare come si "evolve" la temperatura

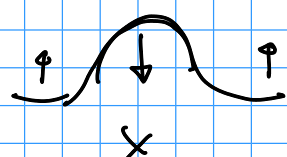
(DUE INCOGNITE: il tempo t e la posizione.

$u(x,t)$ = temperatura nel punto x ($\in [0,L]$) all'istante $t \in$?)

L'equazione che descrive il fenomeno è "l'equazione del calore"

SORGENTE DI CALORE NOTA

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x} + f(x,t) \end{cases}$$



(E.C) $\begin{cases} \left[u(0,t) = u_0(t), \quad u(L,t) = u_L(t) \quad \forall t \right] \\ u(x,0) = \bar{u}(x) \end{cases}$

$u_0(t)$ NOTO, $u_L(t)$ NOTO

$\bar{u}(x)$ ← DISTRIBUZIONE AL TEMPO $t=0$

(1) CASO SEMPLICE: $u_0(t) = u_L(t) = 0$ (TEMPERATURA $= 0$ AGLI ESTREMI)

(2) ALTRO CASO CONDIZIONE IN $x=0$ / $x=L$ DEL TIPO $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ – SBARRA ISOLATA (NO SCAMBI DI CALORE CON L'ESTERNO)

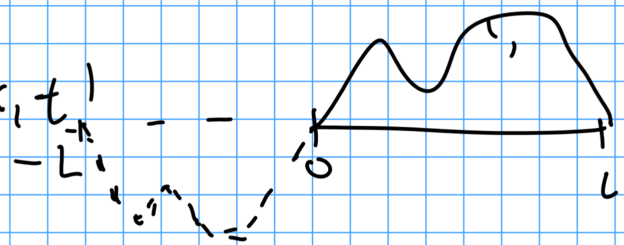
IDEA SU COME RISOLVERE (E.C) CASO 1

$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad \forall t$

- SVILUPPO $u(x,t)$ IN SERIE DI Fourier RISPETTO A X

$$\boxed{b_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t) \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) dx}$$

$f(x) = u(x,t)$



si può immaginare che $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$

se $x \in [0, L]$

IMPONIAMO L'EQUAZIONE: se tutto va bene...

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m'(t) \sin\left(\frac{\pi}{L} m x\right)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_m(t) \frac{\pi^2}{L^2} m^2 \sin\left(\frac{\pi}{L} m x\right)$$

Mettiamo che $f \equiv 0$ (per semplicità!) $\Rightarrow$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m'(t) + b_m(t) \frac{\pi^2}{L^2} m^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} m x\right) = 0$$

POSSO IMPORRE CHE $\forall m$

$$b_m' + \frac{\pi^2}{L^2} m^2 b_m = 0$$ EQ. DIFF. ORDINARIA del I° ORD.

che ha come sol. $b_m(t) = b_m(0) \, e^{-\frac{\pi^2}{L^2} m^2 t}$

E' RAGIONEVOLE CHE $b_m(0) =$ coeff di F. di $\varphi(x)$

$= \varphi_m$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{L^2} n^2 t} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n t\right)}$$