Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

lezioni 07-08, 19 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Serie di Fourier

Fisso $T > 0$ (periodo) e prendo $\omega := \frac{2\pi}{T}$ (freq. ang.?)

Polinomio trigonometrico di grado n: una funzione del tipo

$$P(t) \; \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\omega t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

dove $a_0 \dots a_n, b_1 \dots b_n$ sono numeri (coefficienti)

Serie trigonometrica: una serie del tipo

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

dove $(a_k)_{k \geq 0}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$ sono due successioni

Dico che la serie trigonometrica converge puntualmente/unif. se convergono separatamente i "due pezzi"

PROBLEMA: In che ipotesi la serie converge / che regolarità ha la somma / come caratterizzo tale somma ?

① PUNTO DI VISTA: assegnate (a_n) e (b_n) mi chiedo se esiste e che proprietà ha la serie associata

OSS Se la somma esiste essa è T-periodica (dato che le funzioni $\sin(k\omega t)$ / $\cos(k\omega t)$ sono T-periodiche $\forall k$ intero:

$$\sin(k\omega(t+T)) = \sin(k\omega t + k\underbrace{\omega T}_{2\pi}) = \sin(k\omega t)$$

Viceversa: ② Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodica, in che ipotesi posso trovare (a_k) e (b_k) tale che

$$(*) \qquad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\omega k t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega k t)$$

CI SERVONO ENTRAMBI I PUNTI DI VISTA.

Supponiamo che valga la formula $(*)$ (e che tutti i passaggi che ora faccio siano leciti)

Fissiamo $n \in \mathbb{Z}$, moltiplichiamo $(*)$ per $\cos(n\omega t)$ e integriamo tra 0 e T

??

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_0^T \left(\Sigma + \Sigma\right)\cos(n\omega t)\,dt =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_k \int_0^T \cos(k\omega t)\cos(n\omega t)\,dt + \sum_{m=1}^{\infty} b_k \int_0^T \sin(k\omega t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt$$

CALCOLIAMO GLI INTEGRALI

$$\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(m\omega t)\,dt \quad = \text{per parti se } k \neq m \ (m \neq 0)$$

$$\underbrace{\left[\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}\cos(m\omega t)\right]_0^T}_{=0 \text{ (il seno si annulla in 0 e in T)}} + \frac{m\cancel{\omega}}{k\cancel{\omega}}\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(m\omega t)\,dt$$

$$\frac{m}{k}\underbrace{\left[-\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}\sin(m\omega t)\right]_0^T}_{=0} + \frac{m^2}{k^2}\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(m\omega t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{m^2}{k^2}\right)\int_0^T \cos(k\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^T \cos(k\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0 \quad (\text{se } m \neq k)$$

NELLO STESSO MODO SI VEDE CHE

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\sin(m\omega t)\,dt = 0 \qquad \text{se } m \neq k$$

$$\int_0^T \sin(k\omega t)\cos(m\omega t)\,dt = 0 \qquad \forall\, k, h$$

INVECE (caso $m = k$)

$$\int_0^T \cos^2(n\omega t)\,dt = \int_0^T \frac{1+\underbrace{\cos(2n\omega t)}_{\text{ha integrale nullo}}}{2}\,dt = \frac{T}{2}$$

e anche $\int_0^T \sin^2(n\omega t)\,dt = \frac{T}{2}$. DUNQUE

$$\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt = a_n \frac{T}{2}$$

(tutti gli altri addendi sono moltiplicati per zero)

e cioè $\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad \text{se } n \geq 1}$

Nel caso $n=0$ il ris. è lo stesso solo che

$$\int_0^T f(t)\cos(0\cdot t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt = \int_0^T 1\,dt = T$$

dunque $\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt}$ (la media di f)

e analogamente (moltiplico per $\sin(n\omega t)$ e faccio come sopra)

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t) \quad \forall n \geq 1}$$

CIOE', "se tutto funziona" i coeff. dello sviluppo in serie trigonometrica di f SONO DATI DALLE FORMULE SOPRA

Def.: Data f T-periodica e integrabile su $[0,T]$, chiamo "serie di Fourier" associata a f la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

dove

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t) \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt}$$

coeff. di Fourier di f

Il problema ② si legge "in che ipotesi (su f) f e' somma della sua serie di Fourier.

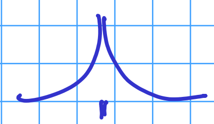
LA QUESTIONE E' DELICATA: nonostante che i coeff. di Fourier si possono costruire quasi sempre, PER ES. si possono costruire nel caso di f continua, NON E' DETTO che f CONTINUA $\Rightarrow$ f somma della sua serie di F.

Teorema Esistono funzioni continue tali che la corrispondente serie di Fourier NON conv. PUNT. in nessun t.

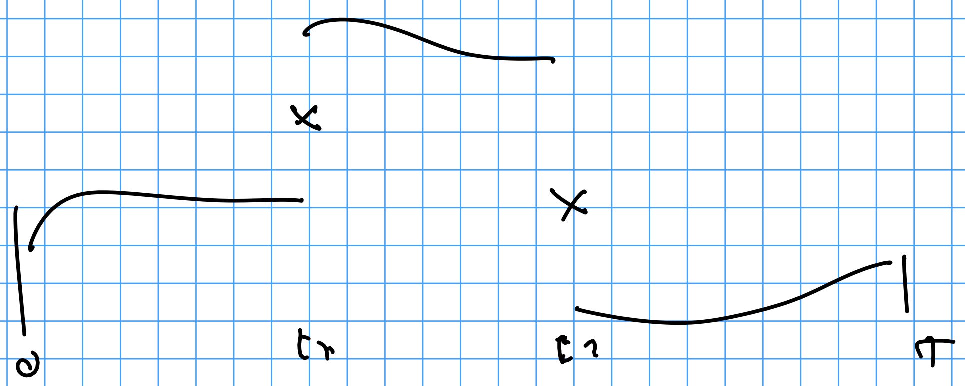
Teorema Se f è derivabile, con f' continua $\Longrightarrow$ la serie di F. converge UNIFORMEMENTE a f.

Def. Dico che f è "regolare a tratti" se ci sono un numero finito di punti $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \le T$ tali che su ogni intervallo $]t_i, t_{i+1}[$ la f è derivabile con derivata limitata $\Longrightarrow$

NO CUSPIDI



$\forall\, t_i$ esistono
$$f(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} f(t)$$
$$f(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} f(t)$$



Teorema Se f è regolare a tratti $\Rightarrow$ la sua serie di Fourier converge puntualmente a

$$\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \quad \text{in ogni } t$$

$\left(\text{se } t \neq t_1 \ldots t_k \quad \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} = f(t) \right)$

C'E' UN ALTRO RISULTATO

TEOREMA Supponiamo che f e g siano continue (basterebbe integrabili)

Siano (a'_n) (b'_n) i coeff di F. di f. (ESISTONO)

(a''_n) (b''_n) i coeff. di F. di g

Se $a'_n = a''_n$ e $b'_n = b''_n$ $\forall n$ $\Rightarrow f(t) = g(t)$

(ANCHE SENZA SAPERE CHE $f = \sum_n a'_n \cos(n\omega t) + \sum b'_n \sin(n\omega t)$

$g = \sum_n a''_n \cos(n\omega t) + \sum b''_n \sin(-)$

(se f, g fossero solo integrabili $\Rightarrow f(t) = g(t)$

per quasi tutti i t) ($\Leftrightarrow$ se $a_n = b_n = 0$ $\Rightarrow f \equiv 0$

??

NON È OVVIO

TORNIAMO AL PROBLEMA 1. Sono date (a_n), (b_n) successioni

SE: $$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Per il conto di prima gli a_n, b_n devono essere i coeff. di F. di f

Per ogni N consideriamo le somme parziali

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

(polinomio trigonometrico di grado N)

FATTI (1) Se $k > N$

$$\int_0^T f_N(t) \sin(k\omega t)\, dt = \int_0^T f_N(t) \cos(k\omega t)\, dt = 0$$

(2) Supponiamo che esista $f = \sum a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Allora per ogni g, pol. trigonometrico di grado $\le N$

$$\boxed{\int_0^T |f(t)-g(t)|^2\,dt \ge \int_0^T |f(t)-f_N(t)|^2\,dt}$$

cioè f_N MINIMIZZA L'ESPRESSIONE $\int_0^T |f-g|^2\,dt$

tra tutti i polinomi trigonometrici g di grado $\le N$

NOTA. g è determinato dai suoi $a_0' \dots a_N'$ $b_1' \dots b_N'$ che sono $2N+1$ numeri reali. Quindi i coeff. di Fourier di f sono la $2N+1$-pla che minimizza

$$\int_0^T \left| f(t) - \sum_{m=0}^{N} a_m' \cos(m\omega t) + b_m' \sin(m\omega t)\right|^2 dt$$

al variare dei coeff.

Dim (2) Prendo $\int_0^T |f(t)-g(t)|^2\,dt =$ (supponendo che f sia somma ...)

$$\int_0^T \left| \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)\right) - \left(\sum_{m=0}^{N} a_m' \cos(m\omega t) + b_m' \sin(m\omega t)\right)\right|^2 dt =$$

$$\int_0^T \left(\sum_{m=0}^{N} (a_m - a_n') \cos(m\omega t) + (b_n - b_n') \sin(m\omega t) + \right.$$

$$\left. \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_n \sin(m\omega t) \right)^2 dt =$$

$$\int_0^T \left(\sum_{m=0}^{N} (a_m - a_n') \cos(m\omega t) + (b_n - b_n') \sin(m\omega t) \right)^2 dt + \quad ①$$

$$\left. \begin{aligned} &2 \int_0^T \left(\sum_{m=0}^{N} (a_m - a_n') \cos(m\omega t) + (b_n - b_n') \sin(m\omega t) \right) \cdot \\ &\left(\sum_{m=N+1}^{N} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t) \right) dt \end{aligned} \right\} ② \quad +$$

$$\underbrace{\int_0^T \left(\sum_{m=N+1}^{\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t) \right)^2 dt}_{③ \text{ (non dipende da } g)}$$

Il pezzo ② $= 0$ perché diventa (se posso scambiare $\int$ e Σ)

$$\sum_{\substack{m=0\dots N \\ m=N+1\dots\infty}} \underbrace{\int_0^T a_m (a_m - a_n') \cos(m\omega t) \cos(m\omega t)}_{=0 \text{ per il calcolo fatto all'inizio}} + \dots$$

il pezzo (1) si può scrivere

$$\sum_{m,n=0}^{N} \int_0^T (a_n - a'_n)\cos(n\omega t)(a_m - a'_m)\cos(m\omega t) + \quad =0 \text{ se } m \neq n$$

$$\int_0^T (a_n - a'_n)\cos(n\omega t)(b_m - b'_m)\sin(m\omega t) + \quad =0$$

$$\int_0^T (b_n - b'_n)\sin(n\omega t)(a_m - a'_m)\cos(m\omega t) + \quad =0$$

$$\int_0^T (b_n - b'_n)\sin(n\omega t)(b_m - b'_m)\sin(m\omega t) = \quad =0 \text{ se } n \neq m$$

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n - a_n')^2 \frac{T}{2} + (b_n - b_n')^2 \frac{T}{2}$$

DUNQUE

$$\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt = (3) + \frac{T}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} (a_n - a_n')^2 + (b_n - b_n')^2}_{\geq 0 \text{ e vale } 0 \text{ se } a_n' = a_n \text{ e } b_n' = b_n}$$

HO TROVATO ANCHE

$$\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \geq \int_0^T |f(t) - f_N(t)|^2 dt = (3)$$

Ricordo che (3) $= \int_0^T \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)^2$

$$= \sum_{\substack{n,m \geq \\ N+1}} \int_0^T a_n a_m \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) + a_n b_m \cos(n\omega t) \sin(m\omega t)$$
$$+ b_n a_m \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) + b_n b_m \sin(n\omega t) \sin(m\omega t)$$

$$= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \frac{T}{2}$$

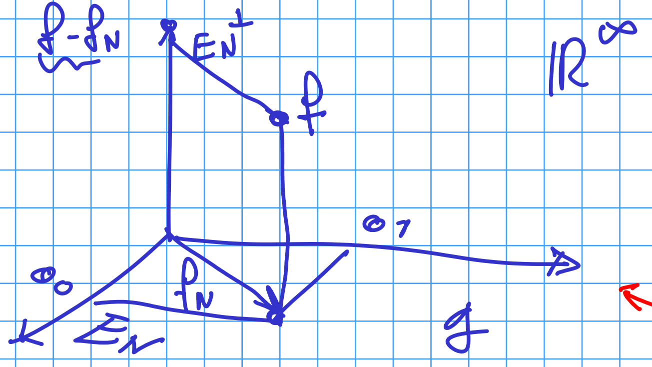
INTERPRETAZIONE Immaginiamo di considerare solo gli a_n (VEDREMO POI CHE se $f(x) = f(-x)$ tutti i b_n sono nulli)

IMMAGINIAMO DI AVERE UN $\mathbb{R}^N$ CON infiniti assi e che la successione (a_n) rappresenti le "infinite coordinate di f"

IMMAGINIAMO ora che date f e g.
$\left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 \right)^{1/2}$ sia la distanza tra f e g

CONSIDERIAMO, DENTRO QUESTO SPAZIO CON ∞ assi LO SPAZIO E_N dei polinomi di grado N

con soli coseni ($b_i = 0$) . E_N ho dimensione $N+1$



$\boxed{f_N \text{ è la "proiezione" di } f \text{ su } E_N}$

ognuno di questi "assi" è una delle funzioni $\cos(n\omega t)$ di lunghezza $(T/2)^{1/2}$

e si ha: $\int |f_N|^2 = \sum_{n=0}^{N} a_i^2 \cdot \frac{T}{2}$ ← ?

$$\int |f_N - f|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_i^2 \, \frac{T}{2} \quad \text{← pezzo (3)}$$

$$\int_0^T |f_N(t)|^2 = \sum_{n,m}^{N} \int_0^T a_n \cos(n\omega t)\, a_m \cos(m\omega t) =$$

$$\sum_m \frac{T}{2} a_m^2$$

DA QUESTI DISCORSI SI RICAVA CHE

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ "CONVERGE IN ENERGIA"

$$\Leftrightarrow \int_0^T \left(\sum_{m=N}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)^2 dt \to 0 \text{ per } N \to \infty$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 + b_n^2}_{} \to 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

converge $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$

Dove "CONVERGE IN ENERGIA" significa

$$\underbrace{\int_0^T (f_N - f)^2 dx}_{} \to 0 \quad \text{per } N \to \infty$$

---

la serie di Fourier $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

rappresenta una f "IN ENERGIA" –

se e solo se $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ è sommabile

$\Longleftrightarrow$ f^2 è integrabile

e vale la relazione

$$\frac{T}{2} \sum (a_n^2 + b_n^2) = \int_0^T f(t)^2 dt$$

$\leftarrow$ eguaglianza di Parceval

C'È UN PARALLELISMO TRA $\frac{T}{2} \sum a_n^2 + b_n^2$ e $\int f^2 dt$

L'energia $\int_0^T f^2$ è finita $\Longleftrightarrow$ $\sum a_n^2 + b_n^2 < +\infty$

ATTENZIONE La convergenza di $f_N \to f$ NON È PUNTUALE MA È SOLO NEL SENSO DELL'ENERGIA :

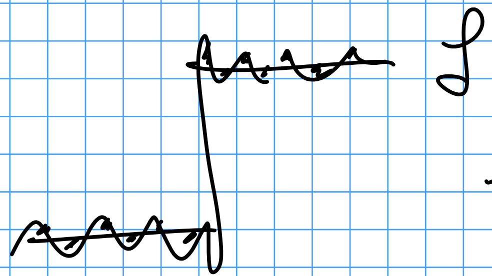
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(f_n(t) - f(t)\right)^2 = 0$$

SE PERÒ HO ALTRE INFORMAZIONI SUGLI a_n / b_n

$\Rightarrow$ posso dire di meglio

Non posso dire che $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

"t per t"



l'area diventa piccola

QUESTO È CIÒ CHE ACCADE (IN GENERALE) NEL CASO DI f CONTINUA: $f_N \to f$ IN ENERGIA MA NON PUNTUALMENTE.

QUESTO PORTA A UNA NOZIONE DI APPROSSIMAZIONE "IN ENERGIA" CHE SPESSO È SUFFICIENTE AGLI SCOPI

QUESTA CONVERGENZA DI SICURO NON CONSERVA LA CONTINUITA' (f può essere discontinua)

VEDREMO CHE C'È UN LEGAME STRETTO TRA

Regolarità di f $\longleftrightarrow$ sommabilità dei coeff. a_n, b_n

TEOREMA Se a_n e b_n sono i coeff di Fourier di f.

e se $\sum_n |a_n|$ e $\sum_n |b_n|$ sono sommabili.

$\Rightarrow$ f è continua ed è somma uniforme della sua serie di Fourier.

NOTA $\sum_n |a_n| < +\infty$ è di più di $\sum_n a_n^2 < +\infty$

infatti $a_n^2 \leq \text{cost} \cdot a_n$ dato che $a_n \to 0$

Teorema Se $\sum_n n|a_n|$ e $\sum_n n|b_n|$ sono convergenti

$\Rightarrow$ f è derivabile, f è somma unif. della sua serie

$\sum a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

f' è somma uniforme della serie delle derivate

$$\sum -a_n n\omega \sin(n\omega t) + b_n n\omega \cos(n\omega t)$$

$$\left(\sum n|a_n| < +\infty \Rightarrow \sum |a_n| < +\infty \right)$$

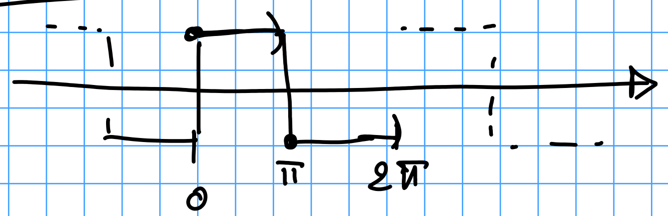
Analogamente $\sum n^k |a_n|$ e $\sum n^k |b_n|$ convergono

$\Rightarrow$ f ha derivata k esima ed è somma uniforme della serie delle derivate k-esime.

ESEMPI

$T = 2\pi \leftrightarrow \omega = 1$

$f(t) =$



ONDA QUADRA

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, \pi[\\ -1 & \text{se } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

FATTO GENERALE

Se f è pari $(f(x) = f(-x)) \Rightarrow b_k = 0 \ \forall k$

Se f è dispari $(f(x) = -f(-x)) \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k$

Inoltre gli a_k / b_k si possono calcolare integrando su un qualunque intervallo $[0, b]$ di lunghezza T; per es su $[-T/2, T/2]$

f è dispari $\Rightarrow a_k = 0 \ \forall k$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k t) \, dt = 0 \right)$$

Vediamo i (b_k)

$$b_k = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(k t) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(k t) \, dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(k t) \, dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-\cos(k t)}{k} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi} \left(1 - \cos(k\pi) \right)$$

$$= \frac{2}{k\pi} \left(1 - (-1)^k \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \dfrac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

RIASSUMENDO

$a_h = 0$

$b_{2h} = 0$

$b_{2h+1} = \dfrac{4}{(2h+1)\pi}$ (SOLO ARMONICHE DISPARI)

ordine $\dfrac{1}{h}$, serie armonica divergente

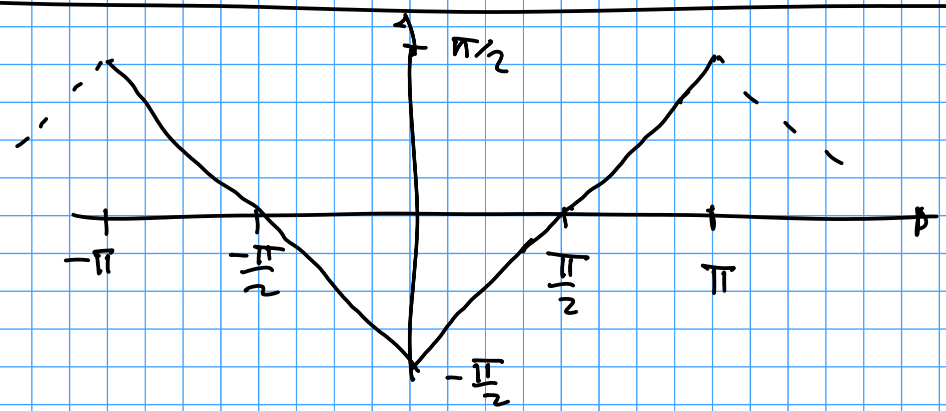
$\sum_n |b_n| = +\infty$ TORNA COL FATTO CHE f è DISCONTINUA

Dato però che f è regolare a tratti e

$$f_N(t) \longrightarrow f(t) \qquad \text{per ogni } t \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$\longrightarrow 0 \qquad \text{se } t = k\pi$$

Se si facessero i grafici delle approssimanti si vedrebbe che vicino ai punti di salto l'approssimazione peggiora e anche se prendo N grande trovo sempre una "zona cattiva" più di avvicinarmi ai salti ← SUCCEDE SEMPRE (fenomeno di Gibbs) quando f è discontinua)

Onda triangolare



$$f(t) = \left| t - \frac{\pi}{2} \right|$$

per $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

e periodica di periodo 2π

f è pari $\Rightarrow b_k = 0 \ \forall k$.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Se $n \geq 1$

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= \text{(per parti)}\ \frac{2}{\pi}\underbrace{\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}}_{0 \text{ per via del seno}} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f'(t)\sin(nt)}{n}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(n\pi)-1\right)$$

$$\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Nota che in questo caso $a_n \simeq \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ la serie converge uniformemente a f (torna col fatto che f è continua)

Invece $n a_n \simeq \frac{1}{n}$ quindi $\sum n|a_n| = +\infty$

torna con il fatto che f non è derivabile – in effetti la serie di Fourier di f' (= onda quadra) è quella dell'esempio precedente ed è data dalla serie delle