Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

lezioni 05 e 06, 12 aprile 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Serie di potenze. RIASSUNTO

- Data una successione (a_n) $\quad a_n \in \mathbb{R} \quad (\mathbb{C}\,?)$

  - si definisce: $\bar{R}$ (raggio di convergenza)

$$\bar{R} = 1 \Big/ \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (\in [0, +\infty])$$

  - se $\bar{R} > 0$ si può considerare la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{per} \quad -\bar{R} < x < \bar{R}$$

  - tale f è infinitamente derivabile e si ha

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\substack{n=k \\ (n=0)}}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k} \qquad -\bar{R} < x < \bar{R}$$

e $f^{(k)}$ è ancora una serie di potenze con raggio $\bar{R}$

Inoltre (mettendo $x=0$ nella formula sopra)

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

~ f è "somma della sua serie di Taylor"

Ci si potrebbe porre il "problema inverso":

Data una funzione f, definita in un intorno di $x=0$, infinitamente derivabile (C^∞), posto $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

POSSO DIRE che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ha raggio di conv. positivo e la sua somma vale f ??

IN GENERALE NO. L'esempio visto fa vedere che esiste una f tale che

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \qquad \text{ma } f(x) \neq 0 \text{ se } x \neq 0$$

Tale f non può essere somma di $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \; (=0)$

IN CERTI CASI LA RISPOSTA È SÌ:

<u>Teorema</u> Se f è C^∞ in $]-R, R[$ $(R>0)$.

$$|f^{(n)}(x)| \leq M^n \qquad \forall n .$$

per una costante (fissa) M. $\Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \text{se } -R < x < R$$

Dim Uso la valutazione del resto di Taylor

SECONDO LAGRANGE

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_{n,x})}{(n+1)!} x^{n+1}}_{R_n(x)}$$

dove $\xi_{n,x}$ è un punto compreso tra 0 e x

($\xi_{n,x}$ dipende sia da x, che da n)

Mostriamo che $R_n(x)$ tende a zero se $n \to \infty$ (dopo di che il resto segue facilmente). Si ha

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_{n,x})| \, |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M^{n+1} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0$$

(dato che il fattoriale "vince") #

CONSEGUENZE

(a) $$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

infatti se $f(x) = e^{ax}$ $f^{(n)}(x) = a^n e^{ax}$

$\Rightarrow$ se $|x| < R$ $\Rightarrow$

$$|f^{(n)}(x)| \leq a^n e^{Ra}$$ (R lo posso prendere come mi pare)

Analogamente $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

⋮

Esempi (di uso dei risultati trovati)

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Vorrei calcolare la somma. NOTO che la serie è del tipo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ con $x = \frac{1}{2}$

f è una serie di potenze che ha come raggio

$$\bar{R} = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1 \quad \left(\text{in } x = \frac{1}{2} \text{ CONVERGE !} \right)$$

CERCO DI RICONDURMI ALLA SERIE $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

di cui so la somma : $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\quad |x| < 1$

Usando i teoremi posso dire :

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \frac{1}{x} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n}_{h(x)} = \frac{1}{x} h(x)$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{x} h(x) \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Derivo $h(x)$ $\Rightarrow$ $h' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \dfrac{1}{x} f(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = x\, h'(x) = x \frac{d}{dx} x (1-x)^{-2} =$$

$$x \quad (1-x)^{-2} - 2x^2 (1-x)^{-3}(-1) = \frac{1-x+2x}{(1-x)^3} \quad x$$

$$= \frac{(1+x)\,x}{(1-x)^3} \quad \Rightarrow \quad \text{trovo } f\left(\tfrac{1}{2}\right) \ldots$$

Esercizio Trovo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

RISOLUZIONI DI EQ. DIFF. "per serie"

Problema modello $\quad I$ intervallo in $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} a(x)\, y'' + b(x)\, y' + c(x)\, y = f(x) & \text{su } I \\ + \text{ condizioni} \end{cases}$$

EQUAZIONE LINEARE (c'è una teoria nel caso in cui $a \neq 0$ - DEVO METTERE L'EQ. IN FORMA NORMALE
$\Rightarrow$ ($x_0 \in I$) Fissati $y(x_0)$, $y'(x)$ esiste unica la sol su tutto I

+ certa struttura delle sol.

VORREI CERCARE LE SOL. $y(x)$ come SERIE DI POTENZE $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\left(\text{o } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right)$

ESEMPIO SEMPLICE

$$\begin{cases} y'' - y = x \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

(caso dei coeff. costanti)

Usando le tecniche standard si sa che:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) \qquad \text{dove}$$

$$\boxed{y_0'' - y_0 = 0} \qquad \text{(eq. omogenea)}$$

$\bar{y}$ è una sol. particolare

$$y_0(x) = A e^{x} + B e^{-x} \qquad \text{al variare di } A, B \in \mathbb{R}$$

La $\bar{y}$ si vede a occhio $\bar{y}(x) = -x$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = A e^{x} + B e^{-x} - x} \qquad \left(y' = A e^{x} - B e^{-x} - 1 \right)$$

Devo scegliere A e B in modo che $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} A = 1 \\ B = 0 \end{matrix}$$

DUNQUE $\qquad y(x) = e^{x} - x$

Proviamo ora a "risolvere per serie". Cerco

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Se "tutto funziona"

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} (m+2)(m+1) x^m$$

$$\left(m = n-2 \qquad n = m+2 \right)$$

Se impongo che valga l'eq. :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+2} (n+2)(n+1) - a_n \right) x^n = x$$

$$\iff \boxed{\begin{aligned} a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n &= 0 \quad \text{se } n \neq 1 \\ &= 1 \quad \text{se } n = 1 \end{aligned}} \quad (*)$$

Inoltre $y(0) = a_0$ $\quad y'(0) = a_1$ $\quad$ DUNQUE

$\underline{a_0 = 1}$ $\quad$ $\underline{a_1 = 0}$ $\quad$ (che insieme a $(*)$ dovrebbero individuare tutti gli a_n)

Le cond. (*) si possono scrivere

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \quad \text{se } n \neq 1$$

PER SEMPLICITÀ ELIMINIAMO X e cerchiamo

la sol di $y'' - y = 0$ con $y'(0)=0$ $y(0)=1$

$\Rightarrow$ viene $a_0 = 1$ $a_1 = 1$

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \quad \forall n \geq 0$$

È chiaro che a_n è <u>definita $\forall n$.</u>

HA SENSO CONSIDERARE LA SERIE DI POTENZE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

<u>DOVE CONVERGE</u> Proviamo a cercare di indovinare

gli a_n.

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{a_0}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$,

$a_3 = \frac{a_1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{a_2}{3 \cdot 4} = \frac{1}{24}$

CONGETTURA: $a_n = \frac{1}{n!}$. Lo dimostro

per induzione: VALE se $n=0$ e $n=1$ $(0!=1,\ 1!=1)$

Se $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)\,n!} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$

che è la relazione che definisce a_n !!

$$\Longrightarrow \quad y(x) = \sum \frac{x^n}{n!} = e^x$$

MODO COMPLICATO DI TROVARE LA SOL. DI

$y'' = y$ con $y(0)=1$ $y'(0)=1$

ALTRO ESEMPIO (non banale)

$x\,y'' = y$ NON È IN FORMA NORMALE (SU $\mathbb{R}$)

(NON HO A DISPOSIZIONE FORMULE RISOLUTIVE)

Cerco la sol. del tipo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1}, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, x^{n-2}$$

$$x\, y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (n+1)\, n\, x^{n}$$

* anche $n=0$ dato che c'è n nel coeff.

$$(m = n-1 \iff n = m+1)$$

IMPONGO CHE VALGA L'EQ.

$$\sum_{n=0} \left(a_{n+1}\, n(n+1) - a_n \right) x^n = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{n+1}\, n(n+1) = a_n \qquad \forall n \geq 0$$

$n = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ (e a_1 è "libero")

se $n \geq 1$ posso scrivere $\boxed{a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n(n+1)}}$

$\Rightarrow$ a_n è determinato una volta che io fisso a_1

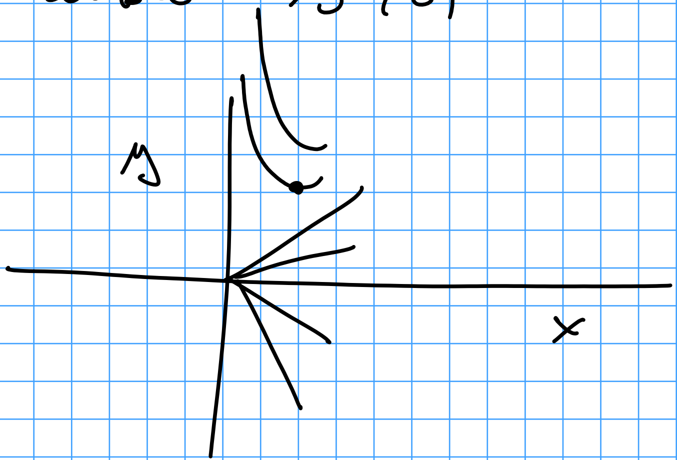
Se per esempio fisso $a_1 = 1$ trovo una $\tilde{a}_n$, $n \geq 1$

$$(*) \quad \begin{cases} \tilde{a}_{n+1} = \dfrac{\tilde{a}_n}{n(n+1)} & n \geq 1 \\ \tilde{a}_1 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se cerco il caso generale ovvio $a_n = a_1 \tilde{a}_n$

$\Rightarrow$ l'eq. $xy'' = y$ per essere risolubile

devo imporre $y(0) = 0$, mentre rimane libero $y'(0)$



La (a_n) definita sopra $(*)$ che raggio di conv. produce? Posso usare il criterio del rapporto:

$$\bar{R} = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Big/ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1/0 = \infty$$

EQ. DI "BESSEL"

$N \in \mathbb{N}$

(N parametro)

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - N^2) y = 0$$

(legato a problemi di elasticità)

Cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Se "tutto va bene"

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} \Rightarrow x y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1) x^{n-2} \Rightarrow x^2 y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n$$

$$x^2 y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2}\, x^m$$

$$m = n+2 \Leftrightarrow n = m-2$$

IMPONENDO CHE VALGA L'EQUAZIONE TROVO

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ a_n \left[n(n-1) + n - N^2 \right] + a_{n-2} \right\} x^n - N^2 a_0 - N^2 a_1 x + a_1 x = 0$$

$$\begin{cases} N^2 a_0 = 0 \\ a_1 (1 - N^2) = 0 \\ a_n (n^2 - N^2) + a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

$(\star)$

NOTA   La rel. ricorsiva fa passare da $n \to n+2$

$\Rightarrow$ gli a_n con n pari si trovano indipendentemente dagli a_n con n dispari

ATTENZIONE: per passare alla forma

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2 - N^2}$$

devo avere $n \neq N$

Andiamo per gradi. $\boxed{\text{CASO } N=0}$

a_0 è arbitrario

$a_1 = 0$

posso scrivere $\boxed{a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2} \quad \forall n \geq 2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{a_n = 0 \text{ se } n \text{ è dispari}}$

GLI a_n per n pari li trovo a partire da a_0. METTIAMO $a_0 = 1$ e poniamo $b_k = a_{2k}$. Su b_k so che

$b_0 = a_0 = 1$

$b_k = a_{2k} = \frac{-a_{2k-2}}{(2k)^2} = \frac{-b_{k-1}}{(2k)^2}$, cioè

$$\begin{cases} b_k = -\dfrac{b_{k-1}}{4k^2} & k \geq 1 \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

$$b_0 = 1 \ ; \ b_1 = -\frac{1}{4\cdot 1^2} = -\frac{1}{4} \ ; \ b_2 = -\frac{b_1}{4\cdot 2^2} = \cdot \frac{1}{4^2}\cdot\frac{1}{2^2}$$

$$b_3 = -\frac{b_2}{4(3^2)} = \frac{1}{4^3}\,\frac{1}{(2\cdot 3)^2}$$

CONGETTURA: $$b_k = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}$$

SI VERIFICA PER INDUZIONE CHE LA FORMULA VALE.

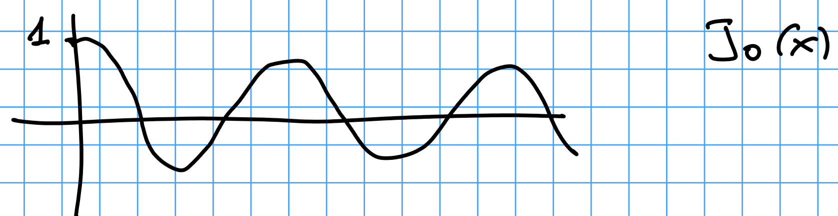
$\Rightarrow$ nel caso $N=0$ la sol. generale è

$$b_0 \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k} = b_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}_{J_0(x)}$$

& Si vede che $\sqrt[n]{b_n} \to 0$

J_0 è la funzione di Bessel di ordine 0. (crit. rapporto)

$J_0(0) = 1$



CASO $N=1$ $\quad a_0 = 0$, a_1 è libero, (METTIAMOLO 1)

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2-1} = -\frac{a_{n-2}}{(n-1)(n+1)}$$

$a_n = 0$ $\forall n$ PARI. Poniamo $c_k = a_{2k+1}$ $\Rightarrow$

$c_0 = 1$

$$c_k = \frac{-c_{k-1}}{2k(2k+2)} = \frac{-c_{k-1}}{4k(k+1)}$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{-1}{4(1\cdot 2)}, \quad c_2 = \frac{1}{4(1\cdot 2)}\cdot\frac{1}{4(2\cdot 3)} = \frac{1}{4^2}\frac{1}{1\cdot 2}\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$c_3 = -\frac{1}{4^2}\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4(3\cdot 4)} = -\frac{1}{4^3}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$c_k = \frac{(-1)^k}{4^k}\frac{1}{k!\,(k+1)!} \quad \text{(SI VEDE PER INDUZIONE)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k+1} = 2 a_1 \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}_{J_1(x)}$$

J_1 è la funzione di Bessel di ordine 1

$J_1(0)=0 \qquad J_1'(0) = \frac{1}{2}$

CASO $N > 1$ generico.

$$\begin{cases} N^2 a_0 = 0 \\ a_1(1-N^2) = 0 \\ a_n(n^2-N^2) + a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2 \end{cases}$$

$a_1 = a_0 = 0 \Rightarrow$ SE N è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$ pari

SE N è pari $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n$ dispari

Inoltre $a_n = 0 \quad \forall n < N$

RIMANE LIBERO a_N, PRENDIAMO $a_N = 1$

si trovano, non nulli, tutti gli a_n con $n \geq N$ con lo stesso parità di N.

Ragionando come nei casi $N=0$, $N=1$ si trova

$$y(x) = \underbrace{(\text{costante}) \left(\frac{x}{2}\right)^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+N)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}_{J_N(x)}$$

$J_N(x)$ (FUNZIONE DI BESSEL DI ORDINE N)

se la costante è scelta in modo che $J^{(N)}(0) = \frac{1}{2^N}$

(NOTA CHE $J_N(0) = J_N'(0) = \dots J_N^{(N-1)}(0) = 0$)

DI QUESTE FUNZIONI SONO IMPORTANTI GLI <u>ZERI</u>

<u>OSS.</u> Quelle che abbiamo trovato sono le sol. dell'eq. diff. <u>CHE SI PROLUNGANO IN $x=0$</u> (in cui l'eq. è "singolare")