Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

lezione 04, 29 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

- Per quali x $S(x)$ esiste (la serie converge)

$\forall x$ la serie è sommabile $\Rightarrow$ $S(x)$ esiste

dato che $\dfrac{x}{1+n^2x^2} \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{n^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ e $\sum \dfrac{1}{n^2} < +\infty$

- che proprietà ha $S(x)$; per es. $S(x)$ è continua?

Per dire che $S(x)$ è continua in x "mi serve" (è sufficiente) la conv. uniforme:

fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, per avere che S è continua in x_0 mi "serve" la conv. unif. su un intervallo $[a,b]$ con $a<b$, tale che $x_0 \in [a,b]$

NEL NOSTRO CASO LA PRIMA COSA CHE È SPONTANEO CERCARE è la conv. unif. su $\mathbb{R}$

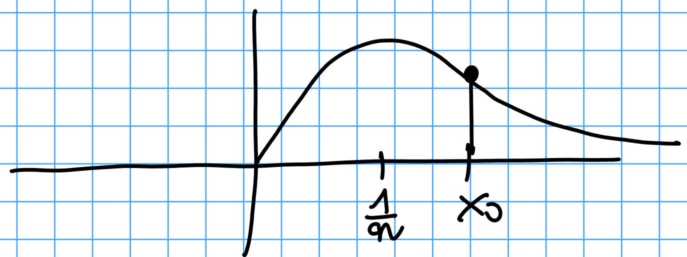
NON VA! (la vediamo poi) Disegniamo una funzione la cons. TOTALE su $\mathbb{R}$, cioè la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \quad \text{NON CONV.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty$$

SE PERÒ prendo $x_0 \neq 0$ (per es. $x_0 > 0$)

$\Rightarrow$ per n grande $(n \geq \bar{n})$ $\frac{1}{n} < x_0 \Rightarrow \max_{x \geq x_0} |f_n(x)| = f_n(x_0)$



Se mi metto su $[x_0, +\infty[$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \max_{x \geq x_0} |f_n(x)|$ ha lo stesso comportamento

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \max |f_n(x)| = \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \frac{x_0}{1+n^2 x_0^2} \quad \text{CONV.}$$

Mentre la serie non conv. totalmente su $[0, +\infty[$ essa conv. totalmente su $[x_0, +\infty[$ per ogni $x_0 > 0$

$\Rightarrow S(x)$ è continua su $[x_0, +\infty[$ $\forall x_0 > 0$

$\Rightarrow$ $S(x)$ è continua su $]0,+\infty[$

FATTO S **NON** è continua in zero

($\Rightarrow$ la serie **NON** conv. unif. su $\mathbb{R}$)

IN EFFETTI prendiamo m intero e "stimiamo"

$$S\left(\frac{1}{m}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/m}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \geq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{1+\left(\frac{n}{m}\right)^2} \geq \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2}$$

$= \frac{1}{m} \cdot m \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Dunque $\forall m \in \mathbb{N}$ $S\left(\frac{1}{m}\right) \geq \frac{1}{2}$

PERÒ $S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{1+0} = 0$. È quindi impossibile

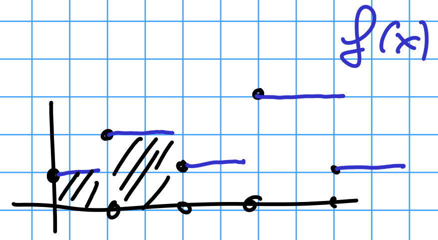
che $\lim_{m\to\infty} \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\vee\!\!\!\vee}{S\left(\frac{1}{m}\right)}} = S(0) = 0$; DUNQUE S NON È CONTINUA IN ZERO

VOLENDO POSSO FARE UN ALTRO RAGIONAMENTO

(LEGAME TRA SERIE E INTEGRALI IMPROPRI)

→ $\{a_n\}$ successione ; si chiama

$f(x) = a_n$ per $[n, n+1[$



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \left(\begin{array}{c} \text{conv. la serie} \\ \Updownarrow \\ \text{conv. l'int.} \end{array} \right)$$

NOTA $f(x) = a_{[x]}$

TORNIAMO A $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+(nx)^2} =$ $\qquad (y \le [y] < y+1)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+([y]x)^2}\,dy \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+(y+1)^2x^2}\,dy < S(x) \le \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+(yx)^2}\,dy$$

$\parallel$ $s = t+1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+s^2x^2}\,ds = \quad (xs = t)$$

per $yx = t$ $\quad x\,dy = dt$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\arctan(t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)$$ Dunque

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2} \qquad \forall x > 0$$

Se $x \to 0$ trovo $\lim_{x \to 0^+} S(x) = \frac{\pi}{2}$

CONSIDERIAMO ORA UNA CLASSE PARTICOLARE E CIOÈ LE <u>SERIE DI POTENZE</u>

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$ dove a_n sono numeri reali e $x_0 \in \mathbb{R}$

$F(x)$ è individuato dalla successione $\{a_n\}$ e da x_0

– Per semplicità considero $\underline{x_0 = 0}$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

<u>PROBLEMI</u>: (a) Per quali x la serie converge

(per quali x $F(x)$ risulta definita).

(b) Regolarità di F (continua, derivabile ...)

FATTO 1 Data $\{a_n\}$ poniamo

$$M = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \left(\in [0, +\infty] \right)$$

(Se $\{c_n\}$ è una successione il $\max\lim_{n\to\infty} c_n$ esiste sempre, ed è "moralmente" il più grande tra i possibili limiti di sottosuccessioni estratte da c_n

ESEMPIO TIPICO: $c_n = (-1)^n$ NON HA LIM.

$\max\lim c_n = 1$

$\min\lim c_n = -1$

E SI SA CHE $\exists \lim c_n \iff \max\lim c_n / \min\lim c_n$ coincidono.)

Prendiamo $\bar{R} = \dfrac{1}{M} \left(\begin{array}{ll} 0 & \text{se } M = +\infty \\ +\infty & \text{se } M = 0 \end{array} \right)$

$\bar{R}$ si chiama "raggio di convergenza" della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

e valgono le seguenti proprietà:

(1) se $|x| < \bar{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge (assolutamente)

(2) se $|x| > \bar{R}$ la serie $\sum a_n x^n$ NON CONVERGE

(1') Se $0 < R < \bar{R}$ $\Rightarrow$ la serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

conv. TOTALMENTE (e quindi uniformemente) su $[-R, R]$

$\Rightarrow$ Risulta definita la somma $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

sull'intervallo aperto $]-\bar{R}, \bar{R}[$.

A causa di (1') $\Rightarrow$ S è continua in $]-\bar{R}, \bar{R}[$

(se avessi lasciato x_0 , avrei trovato gli stessi risultati

in $]x_0 - \bar{R}, x_0 + \bar{R}[$)

Se prendessi a_n, e x_0 nei complessi (e facessi variare $x \in \mathbb{C}$)

$\Rightarrow$ al posto dell'intervallo $]x_0-\bar{R}, x_0+\bar{R}[$

trovare il cerchio aperto di centro x_0 e raggio $\bar{R}$.

<u>ESEMPI</u> (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (serie geometrica di ragione x)

Qui $a_n = 1$ $\forall n$. $M = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow \bar{R} = 1$

Quindi si trova (cosa che in realtà si vede direttamente) che

$S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ è definita (e continua) su $]-1,1[$

IN REALTÀ NOI SAPPIAMO CHE $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ In questo caso

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si vede che anche in questo caso $\bar{R} = 1$

(svolto $M = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\left(\begin{array}{ll} 0 & \text{se } n \text{ dispari} \\ 1 & \text{se } n \text{ pari} \end{array} \right) \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{M}$)

$$S_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$ è definita per $-1 < x < 1$

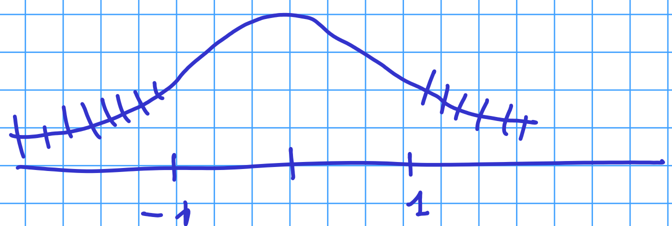
Peraltro questa S_T si può anche vedere come $\sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n$

(serie geometrica di ragione $-x^2$) $\Rightarrow$

$$S_T(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

DUNQUE la serie $\sum (-1)^n x^{2n}$ converge a $\frac{1}{1+x^2}$ $\iff$

$x \in]-1, 1[$ (c'è un problema da trattare a parte in ± 1)



Peraltro se guardo la serie in $\mathbb{C}$ vedo che $\frac{1}{1+x^2}$ diventa singolare in $\pm i$, che hanno modulo $= 1$

ALTRI ESEMPI

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad a_n = \frac{1}{n!} \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$$

Per calcolare tale limite posso usare il "criterio del rapporto"

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \bar{R} = \frac{1}{0} = +\infty$$

LA SERIE CONV. SU $\mathbb{R}$. Usando i polinomi di Taylor si vede (. . .) che la somma di questa serie è e^x.

DIM. (del "FATTO 1") . (1') Sia $R < \bar{R}$. Prendiamo

$$M_n = \max_{-R \leq x \leq R} |a_n x^n| = |a_n| R^n$$

Vediamo se converge la serie $\sum_n M_n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n$

Applico a questa serie numerica il criterio della radice:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| R^n} = R \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$ (si può fare anche con max lim)

$$= R \cdot M = \frac{R}{\bar{R}} < 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{CONV.}}}$$

FATTO 2 Se considero la serie delle derivate (termine a termine) trovo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

è un'altra serie di potenze di raggio

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n+1} (n+1)}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n n} =$$

$$\frac{1}{R}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{=1} = \frac{1}{R}$$ LO STESSO DI PRIMA

$\Rightarrow$ La serie delle derivate converge totalmente su ogni $[-R,R] \subset]-\bar{R},\bar{R}[$ (come la serie originaria)

DUNQUE $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ È DERIVABILE

SU $]-\bar{R},\bar{R}[$ e

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad \forall x \in]-\bar{R},\bar{R}[$$

ITERANDO $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$, $S'''(x) = \cdots$ $\forall x \in]-\bar{R},\bar{R}[$

UNA SERIE DI POTENZE DEFINISCE AUTOMATICAMENTE UNA FUNZIONE INFINITAMENTE DERIVABILE SUL SUO INTERVALLO DI CONVERGENZA.

IN GENERALE, per $|x| < \bar{R}$ si ha

$$(*) \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1) x^{n-k}$$

NOTA Se metto $x=0$ in $(*)$ spariscono tutti i termini con potenza >0, rimane solo il termine con $n=k$:

$$S^{(k)}(0) = a_k \, k!$$

DUNQUE se $S(x)$ è la somma di una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$ i coeff. a_n verificano

$$(**) \qquad a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

cioè gli a_n sono i coeff. di Taylor di $S(x)$

$$\downarrow$$

DATI $\{a_n\} \Rightarrow$ TROVO $S(x) \Rightarrow$ SCOPRO CHE vale $(**)$

IN GENERALE NON È DETTO CHE

DATA UNA $S(x)$, posto $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$ si abbia

$$S(x) = \sum a_n x^n$$

LE SERIE DI FUNZIONI SONO "SOMMA DELLA PROPRIA SERIE DI TAYLOR", PERÒ QUESTA PROPRIETÀ NON È VERA PER UNA FUNZIONE (INFINITAMENTE DERIVABILE) QUALUNQUE.

TALI FUNZIONI SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE DALLE LORO DERIVATE IN ZERO !!

<u>ESEMPIO</u>

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Se $x \to 0$ $\quad f(x) = o(x^k)$ $\quad \forall\, k$ intero

$\Rightarrow$ tutte le derivate di $f(x)$ sono nulle in $x=0$

$\Rightarrow$ la serie di Taylor di questa f è identicamente nulla

MA $f(x) \neq 0$

Questa funzione NON è somma della sua serie di Taylor.