Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

lezione 03, 22 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Limite di una successione di funzioni.

Abbiamo: $\forall n$, $f_n : I \to \mathbb{R}$ $\quad$ I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$

(1) Diciamo che f_n tende puntualmente a f se

per ogni $x \in I$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

Tale convergenza – IN GENERALE – non permette di dire che

- $$\lim_{x\to x_0} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{f(x)} = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_m(x)$$

- $$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

INTRODUCO UNA NOZIONE PIÙ FORTE

(2) Dico che la successione di funzioni $\{f_n\}$ converge a f <u>UNIFORMEMENTE</u> su I se:

$$(*)\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \forall x \in I \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

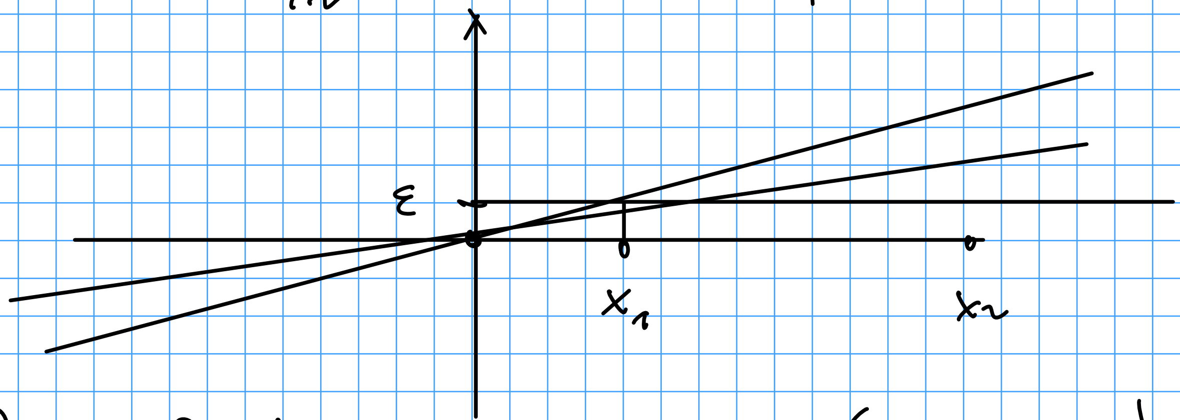
Considerazione "formale": se esamino la conv. puntuale vedo che essa corrisponde a

$\forall\, x \in I \quad f_n(x) \to f(x)$ cioè

$(**)\ \forall\, x \in I,\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} : \ \forall n \geq \bar{n} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

- NELLA PROPRIETÀ $**$ $\bar{n}$ dipende da ε e da x
- NELLA PROPRIETÀ $*$ $\bar{n}$ dipende solo da ε

Esempio $\quad f_n(x) = \dfrac{x}{n} \quad I = \mathbb{R},\ f(x) = 0$



È chiaro che, fissato x, $\dfrac{x}{n} \to 0$ (per $n \to \infty$)

DUNQUE $f_n \to f$ puntualmente.

Però, dato x, quanto velocemente $f_n(x) \to 0$??

Cioè fissato $\varepsilon > 0$ come devo prendere $\bar{n}$ in modo che $|f_n(x)| < \varepsilon \iff \frac{|x|}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{|x|}{\varepsilon}$

[Per l'ostesso errore ε devo prendere n via via più grande se x diventa grande]

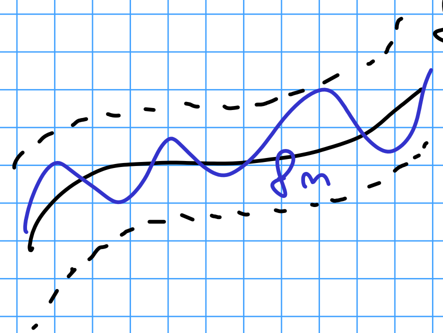
NON C'È UN $\bar{n}$ che vada bene per tutte le x

$$\boxed{f_n \text{ NON CONVERGONO UNIFORMEMENTE A } f \text{ su } \mathbb{R}}$$

(però se mi metto su $[a,b]$ $f_n \to f$ UNIF.)

VISUALIZZAZIONE

$f_n \to f$ se



$\forall \varepsilon > 0$ definitivamente i grafici di f_n sono nel "tubo" "$[f-\varepsilon, f+\varepsilon]$"

FATTI (a) Se $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE su I $\Rightarrow$ $f_n \to f$ puntualmente su I

dunque la conv. puntuale INDIVIDUA il (possibile) limite uniforme.

(b) Se $x_0 \in \overline{I}$ (anche $\pm\infty$), se $f_n \to f$ UNIF. su I, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

(ammesso che $\exists$)

In particolare f_n continue in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0

(c) Se $I = [a,b]$ LIMITATO, $f_n \to f$ UNIF., allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(ammesso che le f_n siano tutte integrabili - per es se f_n sono continue).

Se I è illimitato, la tesi è falsa: $f_n(x) = \frac{1}{n}$,

le $f_n \to 0$ UNIF. MA $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = +\infty$

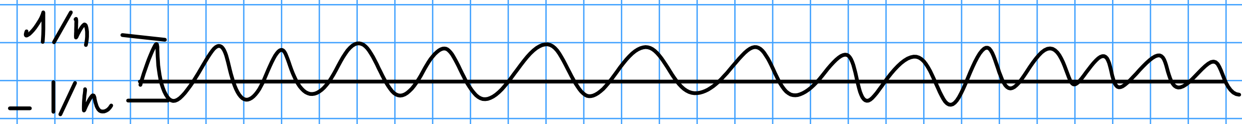
$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 0$

CONFRONTO CON LA DERIVAZIONE:

Posso dire che $f_n \to f$ UNIF $\Rightarrow f_n' \to f'$

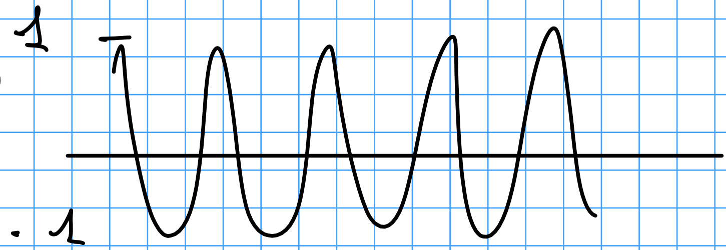
IN GENERALE NO

Per es. $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$



è chiaro che $f_n \to 0$ unif. ma

$f_n'(x) = \cos(nx)$



non tendono (neanche puntualmente) a $f' = 0$

VALE PERÒ

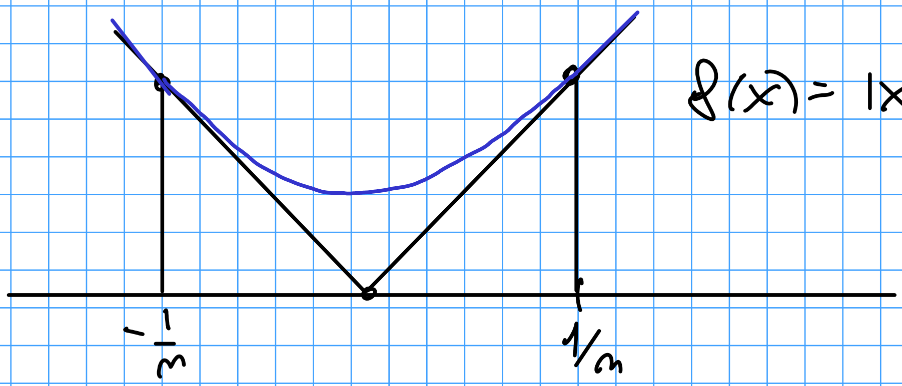
(d) Se f_n sono derivabili, $f_n \to f$ uniformemente

$f_n' \to g$ uniformemente $\Rightarrow$

f è derivabile e $g = f'$

se le derivate tendono a "qualcosa" quella è la derivata del limite.

ALTRO CONTROESEMPIO RELATIVO ALLA DERIVATA



$f(x) = |x|$

Dato n costruisco la parabola per i punti

$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

con derivata 1 in $\frac{1}{n}$ e -1 in $-\frac{1}{n}$

$f_n(x) = a x^2 + b$

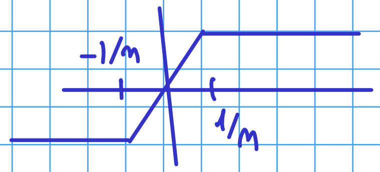
impongo $\frac{a}{n^2} + b = \frac{1}{n}$

$\frac{2a}{n} = 1$

trovo $a = a_n = \frac{n}{2}$

$b = b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow f_n(x) = \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}$ per $-\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}$, $|x|$ se $|x| > \frac{1}{n}$

Si vede che $f_n' \rightsquigarrow$ 

è anche chiaro che $f_n \to |x|$ ma chiaramente $|x|$ non ha derivata e le f_n' <u>non hanno limite uniforme</u>.

La conv. unif. sembra più adatta ai nostri scopi.

• CASO DELLE SERIE DI FUNZIONI

Ricordo che (caso delle serie numeriche)

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri reali, si considerano le "SOMME PARZIALI"

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

($\{S_n\}$ è un'altra successione)

Dico che (1) $\{a_n\}$ è <u>sommabile</u> se esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

② La serie degli a_n è divergente se $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty / -\infty$

③ La serie degli a_n è indeterminata se

$$\nexists \lim_{n\to\infty} S_n$$

(o più brevemente la SERIE)

Chiamo SOMMA DELLA SERIE il numero

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Spesso il simbolo $\sum_k a_k$ indica la succ. $\{S_n\}$

ESEMPI

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente (si sa)

serie geometrica : $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ (è conv.) e fa $\frac{1}{1-A}$

SE $|A| < 1$ (A = ragione)

serie armonica : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$

diverge ($a + \infty$) se $\alpha \leq 1$

NOTA Se la serie è sommabile, il termine a_n deve tendere a zero, MA QUESTO, in generale, non BASTA (per es. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge nonostante $\frac{1}{n} \to 0$)

Def. Data una succ. di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ posso considerare le somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

Dirò che la serie di funzioni

CONVERGE PUNTUALMENTE se, per $\forall x$, $\exists\ S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$

CONVERGE UNIFORMEMENTE se esiste una $S(x)$ tale che $S_n \to S$ unif. su I

Valgono i teoremi di prima:

(a) SE $\sum_n f_n$ conv. unif $\Rightarrow$ conv. puntualmente

SE la serie converge unif.

(b) $$\lim_{x\to x_0} \sum_n f_n(x) = \sum_n \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

(purché i limiti in x esistano)

In particolare se f_n sono tutte continue $\Rightarrow$ la somma $S(x) = \sum_n f_n(x)$ è continua

(c) Se la serie conv. unif su $[a,b]$ e le f_n sono integrabili su $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b \left(\sum_n f_n(x)\right) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(d) Se f_n sono derivabili, se le due serie

$$S(x) = \sum_n f_n(x) \qquad T(x) = \sum_n f_n'(x)$$

convergono unif. (entrambe) $\Rightarrow$

S è derivabile e $T = S'$

<u>Teorema</u> Siano $f_n : I \to \mathbb{R}$. Indico con

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$$

(se $I = [a,b]$ e se le f_n sono continue $\|f_n\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f_n(x)|$)

Se so che la serie numerica $\boxed{\sum_n \|f_n\|_\infty}$ è conv.

$\Rightarrow$ la serie di funzioni $\sum_n f_n$ è unif. conv.

(se la serie $\sum_n \|f_n\|_\infty$ è conv. dico che la $\sum f_n$ è TOTALMENTE CONVERGENTE)

Esempio $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Voglio studiare $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$

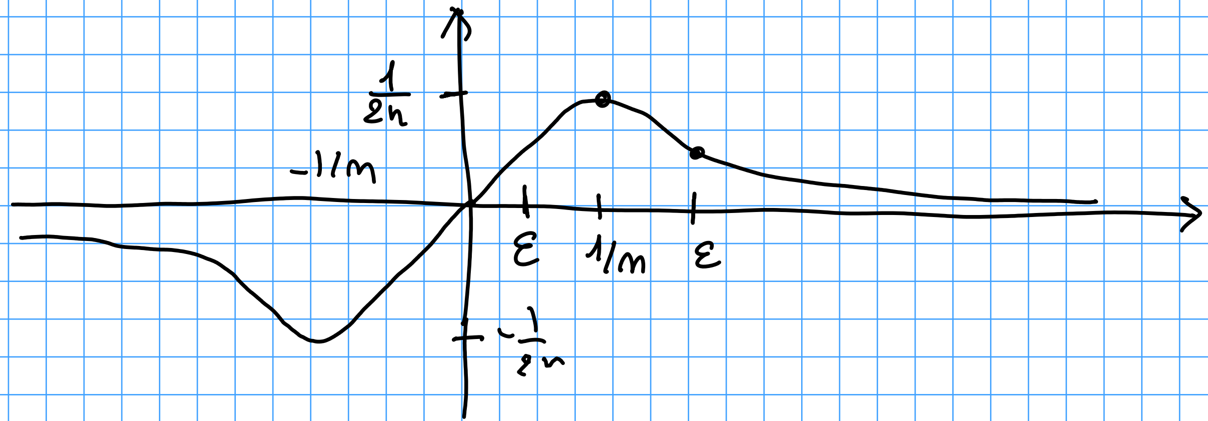
Faccio il grafico di $f_n(x)$, def. da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$f_n(-x) = -f_n(x)$. $f_n(0) = 0$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+n^2} = 0 \quad (\text{lo stesso per } x\to-\infty)$$

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x\,2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$f_n'(x) > 0 \iff -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, $f_n'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{1}{n}$



$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+n^2/n^2} = \frac{1}{2n}$$

- È chiaro che $f_n \to 0$ UNIF. (dato che $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2n} \to 0$)

NOTA In generale $f_n \overset{\text{UNIF.}}{\to} 0 \iff \|f_n\|_\infty \to 0$

$f_n \to f$ UNIF $\iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$

PERÒ $\sum_n \frac{1}{2n} = +\infty$ $\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ conv. se } \alpha > 1 \right)$

cioè la serie $\sum_n f_n$ NON È TOTALMENTE CONV. SU $\mathbb{R}$.

D'altra parte i punti $x_n = \frac{1}{n}$ in cui f_n ha max si muovono verso zero! <u>IDEA</u> se ci allontaniamo da $x=0$ le cose dovrebbero andare meglio (?)

FISSO $\varepsilon > 0$, mi metto in $I = [\varepsilon, +\infty[$ e faccio

$$M_n = \sup_{\varepsilon \leq x < +\infty} |f_n(x)| = f_n(\varepsilon) \quad \text{per } n \text{ grande } \left(n > \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$\| \qquad\qquad$$

$$\frac{\varepsilon}{1+n^2\varepsilon^2} \simeq \frac{1}{n^2}\frac{1}{\varepsilon^2} \quad \left(\text{e } \sum_n \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{n^2} < +\infty\right)$$

Dunque $\sum_n M_n$ è conv. $\Rightarrow$ la serie $\sum_n f_n$

conv. unif. su $[\varepsilon, +\infty[$ $\Rightarrow$

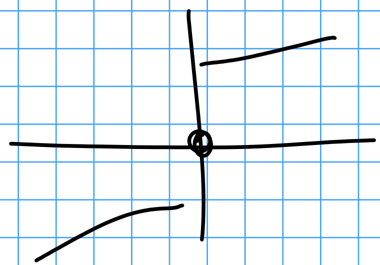
$\sum_n \frac{x}{1+n^2x^2}$ è continua su $[\varepsilon, +\infty[$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario trovo che $\sum_n \frac{x}{1+n^2x^2}$ è

continua su $]0, +\infty[$

SI PUÒ VEDERE CHE LA SERIE NON È CONT.

IN $x=0$



Con discorsi analoghi si può vedere che

$$\sum f_n' \quad \text{conv. unif} \quad \text{su ogni } [\varepsilon, +\infty[$$

$$\Rightarrow \quad \sum_n f_n \text{ è derivabile su }]0, +\infty[\text{ e}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_n f_n(x)\right) = \sum_n f_n'(x) dx$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}$$

DAI DISCORSI FATTI si può dedurre anche

$$\lim_{x \to \infty} S(x) = 0$$