Serie di Fourier e applicazioni
a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

lezione 2, 15 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Eq. della catena

$$\begin{cases} y'' = K\sqrt{1+y'^2} \\ L = \int_{-A/2}^{+A/2} \sqrt{1+y'^2}\,dx \\ y\left(-\frac{A}{2}\right) = -\frac{B}{2}, \quad y\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{B}{2} \end{cases}$$

su $[-A/2, A/2]$ + condizioni

INCOGNITE : $y(t)$ e K $\qquad \left(K = \frac{g\sigma}{t} \quad t = \text{tensione oriz.}\right)$

Per risolverla pongo $v = y'$

$v' = K\sqrt{1+v^2}$ divido

$\frac{v'}{\sqrt{1+v^2}} = K$ "integro"

$\operatorname{arcsinh}(v(t)) = Kt + \alpha$ $\qquad \left(\text{dato che } \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\,dv = \operatorname{arcsinh}(v)\right)$

$(\alpha \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow \quad v(t) = \sinh(Kt+\alpha)$, faccio un altro integrale

$y(t) = \frac{1}{K}\cosh(Kt+\alpha) + \beta \qquad (\beta \in \mathbb{R})$

INSERISCO LE CONDIZIONI

$$-\frac{B}{2} = y\left(-\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{K}\cosh\left(\alpha - \frac{KA}{2}\right) + \beta = \frac{1}{K}\cosh(\alpha)\cosh\left(\frac{KA}{2}\right) + \beta - \frac{1}{K}\sinh(\alpha)\sinh\left(\frac{KA}{2}\right)$$

$\frac{KA}{2} - \alpha$

$$\frac{B}{2} = y\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{K}\cosh(\alpha)\cosh\left(\frac{KA}{2}\right) + \frac{1}{K}\sinh(\alpha)\sinh\left(\frac{KA}{2}\right) + \beta$$

INOLTRE
$$L = \int_{-A/2}^{A/2} \sqrt{1+\sinh^2(Kt+\alpha)}\,dt = \int_{-A/2}^{A/2} \cosh(Kt+\alpha)\,dt =$$

$$\frac{1}{K}\sinh(Kt+\alpha)\Big|_{-A/2}^{A/2} \Rightarrow$$

$$\sinh\left(\frac{KA}{2}+\alpha\right) + \sinh\left(\frac{KA}{2}-\alpha\right) = KL$$

$$\parallel$$

$$\sinh\left(\frac{KA}{2}\right)\cosh(\alpha) + \cancel{\cosh\left(\frac{KA}{2}\right)}\sinh(\alpha) + \sinh\left(\frac{KA}{2}\right)\cosh(-\alpha) + \cancel{\cosh\left(\frac{KA}{2}\right)}\sinh(-\alpha) = 2\sinh\left(\frac{KA}{2}\right)\cosh(\alpha)$$

IN DEFINITIVA

(1) $$\sinh\left(\frac{KA}{2}\right)\cosh(\alpha) = \frac{KL}{2}$$

(2) $$\cosh\left(\frac{KA}{2}\right)\cosh(\alpha) + \sinh\left(\frac{KA}{2}\right)\sinh(\alpha) = -K\beta + \frac{KB}{2}$$

(3) $\cosh\left(\frac{KA}{2}\right)\cosh(\alpha) - \sinh\left(\frac{KA}{2}\right)\sinh(\alpha) = -K\beta - \frac{KB}{2}$

SOMMO (2)+(3) / SOTTRAGGO (2)−(3)

(2') $\cosh\left(\frac{KA}{2}\right)\cosh(\alpha) = -K\beta$

(3') $\sinh\left(\frac{KA}{2}\right)\sinh(\alpha) = \frac{KB}{2}$

DIVIDO (3') per (1) $\Rightarrow$

$\tanh(\alpha) = \frac{B}{L}$ (numero < 1 se $L > B$ $\rightarrow \sqrt{A^2+B^2} > B$)

ha senso dire che $\boxed{\alpha = \operatorname{artanh}\left(\frac{B}{L}\right)}$ $\cancel{}$

ricordiamo che

$$\tanh^2(x) - 1 = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\cosh^2(x)} = -\frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$\Rightarrow$ $\cosh(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$

$$\sinh(x) = \tanh(x)\cosh(x) = \frac{\tanh(x)}{\sqrt{1-\tanh^2(x)}}$$

$$\Rightarrow \cosh(a) = \frac{1}{\sqrt{1-(B/L)^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2-B^2}}$$

$$\sinh(a) = \frac{B}{\sqrt{L^2-B^2}}$$

TORNIAMO INDIETRO (nella (3'))

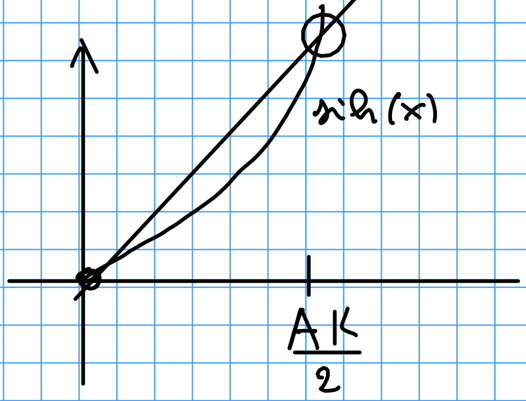
$$\sinh\left(\frac{KA}{2}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{L^2-B^2}}{A}}_{m>1} \frac{KA}{2}$$

NOTO CHE IL NUMERO

$$m = \frac{\sqrt{L^2-B^2}}{A} > \frac{\sqrt{A^2+B^2-B^2}}{A} = 1$$

Se faccio i grafici delle funzioni $y = \sinh(x)$

$y = mx$



vedo che il coeff angolare della retta è > derivata di $\sinh(x)$ per $x=0$. $\Rightarrow$ trovo una intersezione >0

$\Rightarrow$ <u>TROVO il valore di K</u>

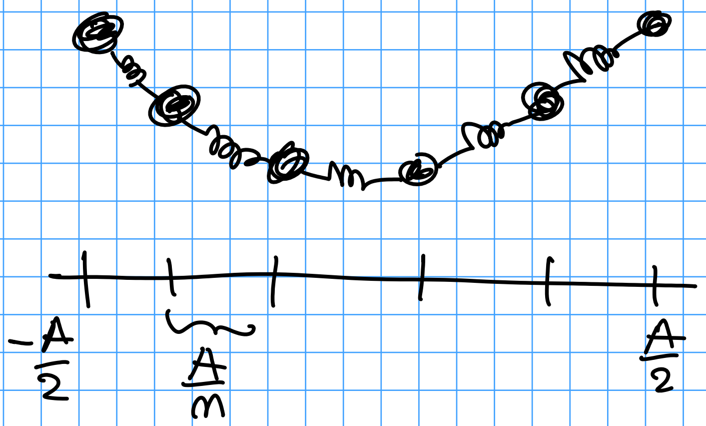
Infine dalla (2') ricavo β. Volendo posso scrivere

$$\left(\cosh(x) = \sqrt{\sinh^2(x)+1} \right)$$

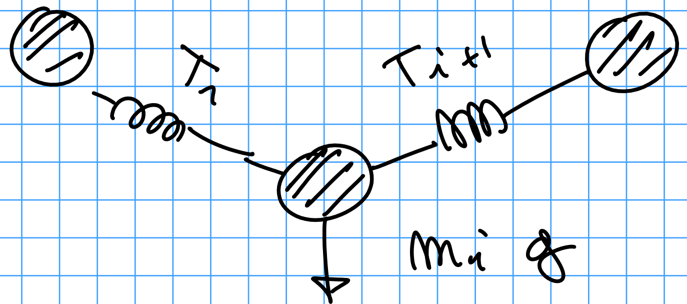
$$\sqrt{\frac{L^2 - B^2}{4} k^2 + 1}\ \frac{L}{\sqrt{L^2 - B^2}} = -k\beta$$

QUINDI IL PROBLEMA SI RISOLVE ESPLICITAMENTE

Altro caso: corda elastica. Se "discretizzo" come prima — penso a n palline di massa m_i (tutte eguali) con delle "molle" di allegamenti



Considerando il Bilanciamento delle forze



Schematizzo le forze elastiche con delle molle di lunghezza a riposo NULLA e coeff. elastico nK

(se voglio che il coeff elastico complessivo sia K devo fare così). Con le vecchie notazioni $\left(\Delta x_i = \frac{A}{n}\right)$

$$-\frac{T_i}{\Delta l_i}\begin{pmatrix}\Delta x_i\\ \Delta y_i\end{pmatrix} + g\sigma\,\Delta x_i\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix} + \frac{T_{i+1}}{\Delta l_{i+1}}\begin{pmatrix}\Delta x_{i+1}\\ \Delta y_{i+1}\end{pmatrix}$$

se uso l'espressione di $T_i = nK\,\Delta l_i$ trovo

COMPONENTE ORIZZ. $\Delta x_i = \Delta x_{i+1} = \frac{A}{n}$

COMP. VERTICALE

$$-\frac{A}{\Delta x_i}K\,\Delta y_i - g\sigma\,\Delta x_i + \frac{A}{\Delta x_{i+1}}K\,\Delta y_{i+1} = 0$$

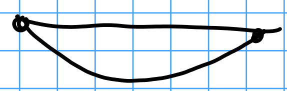
$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\Delta x_i}\left(\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} - \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right) = \frac{g\sigma}{AK}$$; se $n \to \infty$ trovo

$$\boxed{y'' = \frac{g\sigma}{AK}}$$

DEVO AGGIUNGERE LE CONDIZIONI AGLI ESTREMI

$$\boxed{y\left(-\frac{A}{2}\right) = -\frac{B}{2} \qquad y\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{B}{2}}$$



Si vede facilmente che la soluzione è una parabola.

Se al posto della gravità costante avessi avuto una forza $F(x)$ dipendente dal punto $x \in [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ (per esempio σ dipendente da x), avrei trovato

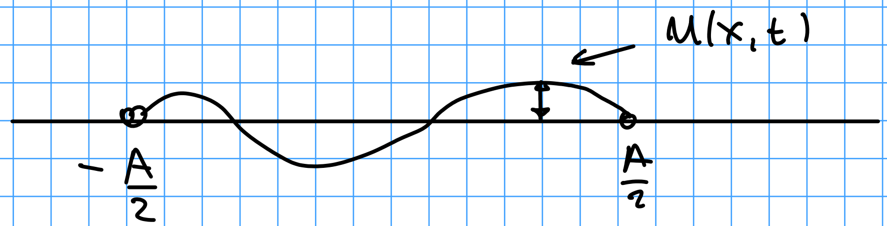
$$\begin{cases} y'' = \text{cost} \cdot F(x) \\ y(-\frac{A}{2}) = -\frac{B}{2}, \quad y(\frac{A}{2}) = \frac{B}{2} \end{cases}$$

QUELLI VISTI FINO A ORA SONO PROBLEMI STATICI (stati di equilibrio)

COSA SUCCEDE SE LA CORDA / CATENA SI MUOVONO (a priori anche senza forze esterne)

L'INCOGNITA DIVENTA UNA $u(x,t)$

$u(x,t)$ dice l'altezza (rispetto alla posizione di equilibrio - ora $B=0$) all'istante t



(fotografia all'istante T)

Si può vedere che (nel caso più semplice) la u verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \\ u\left(-\frac{A}{2}, t\right) = 0 \quad \left(-\cancel{B/2}\right) \\ u\left(\frac{A}{2}, t\right) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{(NOTA)} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,0) = v_0(x) \quad \text{(NOTA)} \end{cases}$$

dove $F(x,t)$ è la (eventuale) forza esterna

$\forall t \in \mathbb{R}$

EQUAZIONE DELLE CORDE VIBRANTI (D'Alembert)

<u>CONDIZIONI</u>: AGLI ESTREMI NELLO SPAZIO

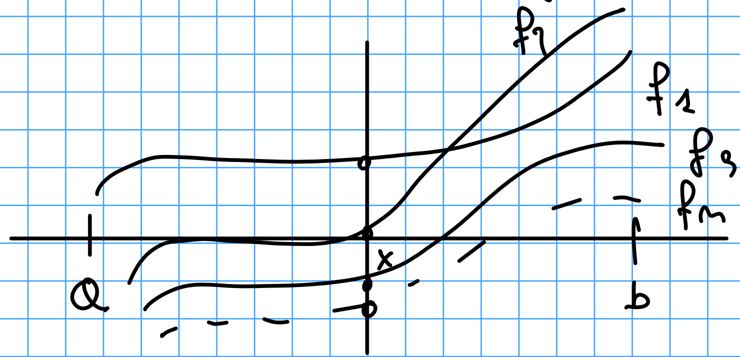
: AI DATI INIZIALI NEL TEMPO

COSA FAREMO ? Prima di tutto dobbiamo "discutere" la nozione di limite quando gli oggetti che si considerano sono funzioni (invece di numeri)

NOI SAPPIAMO COSA VUOL DIRE CHE

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \qquad \text{se } a_n \text{ è una succ. di numeri}$$

SUPPONIAMO ORA che per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia data una funzione $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$



Dirò che $\{f_n\}$ è una successione di funzione

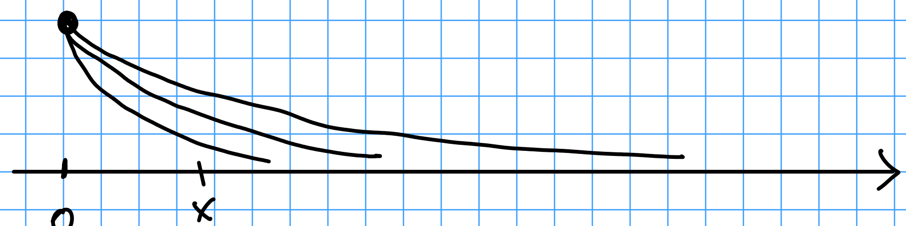
(potrei anche pensarla come una $f(n, x)$)

__Def.__ Dico che la successione $\{f_n\}$ tende __puntualmente__ alla funzione f. su un intervallo I (per es. $[a, b]$)

se per ogni x di I si ha $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

__Esempio__

$f_n(x) = e^{-nx}$ su $[0, +\infty[$



(NOTA $f_n(0) = 1$ per $\forall n$.

se faccio $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$

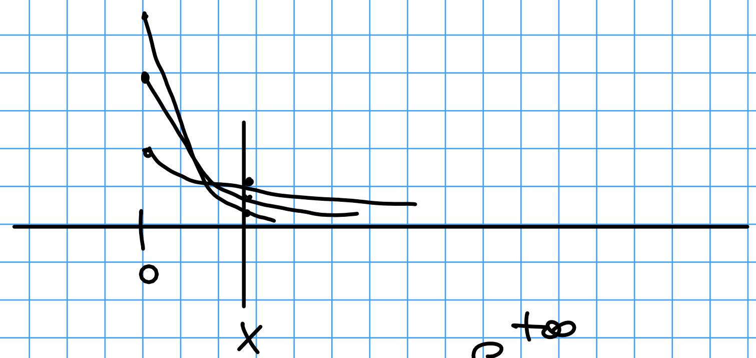
Quindi le f_n convergono puntualmente alla f def. da $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$

<u>NOTA</u>: le f_n sono continue, ma f è discontinua

<u>Altro esempio</u>

$g_n(x) = n e^{-nx}$ su $]0,+\infty[$

Si ha $\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = 0 \Rightarrow g_n \to 0$ puntualmente su $]0,+\infty[$



<u>NOTIAMO</u> CHE $\int_0^{+\infty} g_n(x) = \int_0^{+\infty} n e^{-nx} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1$

$(y = nx \quad n\,dx = dy)$

QUINDI $1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx \neq \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = 0$

<u>MORALE</u> La conv. puntuale

- NON CONSERVA LA CONTINUITÀ

  (non posso scambiare limiti in n e limiti in x)

- Non posso scambiare limite in n e integrale

LA CONV. PUNTUALE NON SEMBRA COSÌ BUONA PER DIRE CHE $f_n \sim f$