Serie di Fourier e applicazioni a equazioni alle derivate parziali

prof. Claudio Saccon (*)

lezione 1, 8 marzo 2012

(*) Dipartimento di Matematica Applicata, via F. Buonarroti 1/C
email: c.saccon@dma.unipi.it
sito web: http://saccon.blog.dma.unipi.it
ricevimento: il lunedì dalle 8.30

Alcune parole chiave

- Sviluppo in serie di un numero / di una funzione

per esempio dire che un numero $x \in \mathbb{R}$ ha un certo **allineamento** decimale $x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$

$a_0 \in \mathbb{N}$, $a_1 \ldots a_n \in \{0, \ldots, 9\}$

vuol dire che $x = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$

$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{10^i} \quad \left(0{,}333 \ldots = 0{,}\overline{3} \right)$$

NOI ESPRIMEREMO DELLE FUNZIONI COME SERIE DI OPPORTUNE "FUNZIONI ELEMENTARI"

ESEMPIO

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \quad \text{(serie di potenze)}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots ,$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Problemi in cui l'incognita è una funzione $y(x)$, che deve verificare una relazione del tipo

$$F\left(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y(x), x\right) = 0$$

cioè una relazione che coinvolge x, $y(x)$, $y'(x) \dots y^{(n)}(x)$

(EQUAZIONE DI ORDINE n)

per es. $y'' + (y')^2 + x = 0$ (è un'eq. del II° ordine)

L'eq. si dice in forma normale se è del tipo

$$y^{(n)}(x) = F_1\left(y^{(n-1)}(x), \dots, y(x), x\right)$$

(la derivata massima "sta per conto suo")

L'eq. si dice lineare se è del tipo

$$a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0\, y(x) = b(x)$$

coefficienti

termine noto

(su un certo intervallo I)

OSS. L'eq. lineare si può mettere in forma normale se $a_n(x) \neq 0$ per ogni x in I.

Se $b(x) = 0$ l'eq. si dice <u>omogenea</u>.

Eq. della dinamica: $\vec{F} = m\vec{a}$

Se ho un punto di massa m che si muove su una retta, posso individuarlo mediante una coordinata $x(t)$ (= POSIZIONE AL TEMPO t). Il suo moto sarà allora descritto da:

$$m\,x''(t) = F(t, x(t), x'(t))$$

PER RISOLVERLA DEVO DICHIARARE QUALE F sto considerando

per es.

$$m\,x''(t) = -k\,x(t) - b\,x'(t) + f(t) \quad \text{dove}$$

k (costante elastica)
b (resistenza del mezzo)
sono costanti

$\rightsquigarrow$ (EQ) $\quad m x'' + b x' + k x = f(t)$ $\quad$ (eq. lineare, II° ordine a coeff. costanti)

POSSO RISOLVERE IN MANIERA UNIVOCA (E.Q.) se

ASSEGNO LA POSIZIONE $x(t_0)$ e LA VELOCITÀ $x'(t_0)$

in un istante assegnato t_0.

TEOREMA Se ho un'eq. diff lineare di ordine n

e se assegno $x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ $\Rightarrow$

l'eq. ha una e una sola soluzione

(PROBLEMA DI CAUCHY / AI DATI INIZIALI)

OLTRE A QUESTI PROBLEMI CI SONO DEI P.B.

descritti da Eq. diff. "CON DATI AL CONTORNO / AI LIMITI"

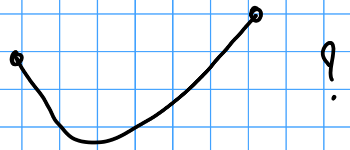
~ problemi di tipo statico ~

Si tratta di cose del tipo

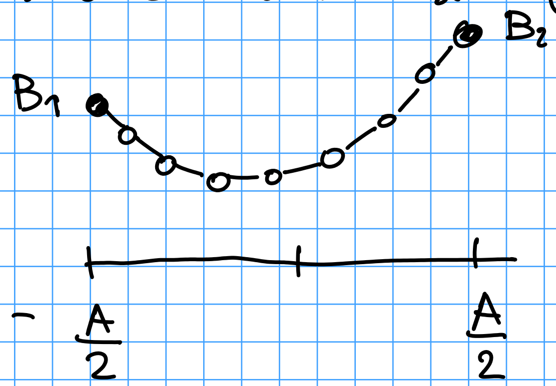
EQ. DIFF. $(\text{i} - y(x))$ nell'intervallo $[a, b]$

$+ \quad y(a) = y_1 \quad y(b) = y_2$

Un esempio di questo secondo tipo di problemi è l'equazione di una "catena" appesa agli estremi (sottoposta alla gravità)



Vediamo come si può tentare di affrontare il problema.



DISCRETIZZO IL PROBLEMA

Divido l'intervallo $\left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]$ in n parti eguali $[x_i \; x_{i+1}]$ (di coordinate (x_i, y_i))

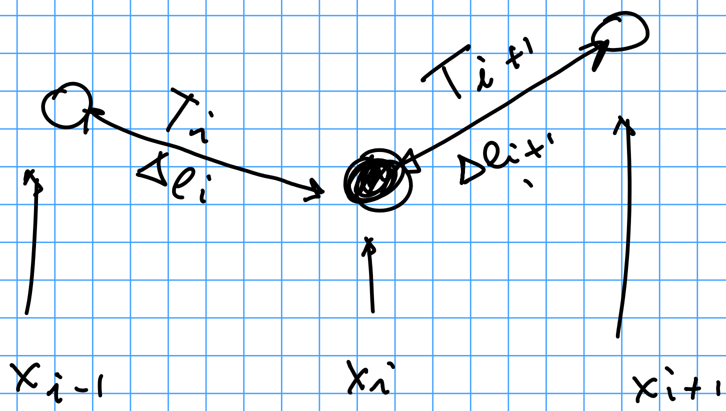
e al posto della catena considero $n-1$ palline, ognuna avente la massa m_i della "sezione di catena" relativa al tratto $[x_i, x_{i+1}]$ (potrei prendere la media tra il pezzo sinistro e il pezzo destro). La pallina i-esima ha coordinate (x_i, y_i).

NOTAZIONE

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \quad \left(= \frac{A}{n}\right)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$



Massa della pallina i-esima vale $\sigma \cdot \Delta l_{i+1} = m_i$

(σ = densità che prendo costante)

Indico con T_i la tensione (in valore assoluto) esercitata sulla pallina i-esima, verso la pallina $i-1$ esima. T_0 / T_n sono le forze esercitate dai perni.

EQUILIBRIO DELLE FORZE

Sulla pallina i-esima, in termini vettoriali, si ha

$$-\frac{T_i}{\Delta l_i}\begin{pmatrix}\Delta x_i \\ \Delta y_i\end{pmatrix} + \frac{T_{i+1}}{\Delta l_{i+1}}\begin{pmatrix}\Delta x_{i+1} \\ \Delta y_{i+1}\end{pmatrix} + \sigma \Delta l_{i+1}\begin{pmatrix}0 \\ -1\end{pmatrix} = 0$$

IN ORIZZONTALE:

$$T_{i+1}\frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta l_{i+1}} = T_i \frac{\Delta x_i}{\Delta l_i} \qquad \forall i = 1 \dots n-1$$

queste quantità sono tutte uguali tra loro e a una costante

t_n = forza orizzontale dei due pezzi

(se $n \to \infty$ $t_n \to t$, tensione orizz. dei pesi)

POSSO RICAVARE $\boxed{T_i = \frac{\Delta l_i}{\Delta x_i} t_n}$

IN VERTICALE :

$$T_{i+1} \frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta l_{i+1}} - T_i \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \sigma \Delta l_{i+1}$$

(metto la relazione) $\Downarrow$

$$t_n \left(\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) = \sigma \Delta l_{i+1}$$

Divido per Δx_{i+1}

$$\frac{t_n}{\Delta x_{i+1}} \left(\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_i} - \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right) = \sigma \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} \right)^2}$$

se $n \to \infty$ $t_n \to t$

$$t\, y''(x) = \sigma \sqrt{1 + (y')^2}$$ ← EQ. DIFF.

DEVO AGGIUNGERE $y\left(-\frac{A}{2}\right) = y_1$, $y\left(\frac{A}{2}\right) = y_2$

+ lunghezza della catena $= L$

Questa ultima condizione si esprime dicendo che

$L_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta \ell_i \longrightarrow L$, ma $L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}\, \Delta x_i$ è una

somma di Riemann e allora, per $n \to \infty$, dovrebbe venire

$L = \int_{-A/2}^{A/2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$. In definitivo:

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{\sigma g}{t} \sqrt{1+(y')^2} \quad \text{su } \left[-\dfrac{A}{2}, \dfrac{A}{2}\right] \\[2ex] \displaystyle\int_{-A/2}^{A/2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx = L \\[2ex] y\left(-\dfrac{A}{2}\right) = y_1 \qquad y\left(\dfrac{A}{2}\right) = y_2 \end{cases}$$

(deve essere $L > \sqrt{A^2 + (y_2 - y_1)^2}$ per motivi geometrici)