

Note per il corso *Analisi Complessa e Funzioni
Armoniche in due variabili*

Claudio Saccon

10 marzo 2011

Capitolo 1

Funzioni di più variabili

1.1 Limiti e continuità in \mathbb{R}^N

Quello che segue è un “riassunto” del calcolo differenziale in più variabili. I concetti che seguono serviranno nel caso in cui si abbiano funzioni di due variabili (dato che i numeri complessi sono una “copia” di \mathbb{R}^2). Alcuni dettagli sono inseriti per completezza e non sono strettamente necessari, per cui - in prima lettura - è forse consigliabile guardare solo le definizioni e le formule principali. Chi abbia già un’idea di cosa siano le derivate parziali potrebbe forse saltare il primo capitolo e passare al secondo (tornando indietro quando si accorga che gli manca qualcosa). Oltre a quanto richiamato qui di seguito, per la comprensione di questo corso è necessaria la conoscenza degli integrali (in una variabile) e delle serie.

Ricordiamo che, se N è un numero intero, \mathbb{R}^N è lo spazio N -dimensionale i cui punti si possono rappresentare come N -uple di numeri reali: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$. Notiamo che

si usa la convenzione per cui i punti sono dei vettori colonna; ciò sarà utile per utilizzare il formalismo dell’algebra lineare. Se $N > 1$ useremo nel seguito anche la convenzione di indicare in grassetto i punti di \mathbb{R}^N e in carattere normale le sua coordinate: \mathbf{x} ha coordinate x_1, \dots, x_N . Vogliamo introdurre la nozione di limite per funzioni di più variabili. Per questo premettiamo alcune definizioni riguardanti \mathbb{R}^N . Ricordiamo innanzitutto che, se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ la sua *norma* è il numero positivo

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$$

mentre se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ la *distanza* tra di loro è data da

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_N - x_N)^2}$$

Se $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$ chiamiamo *disco* di centro \mathbf{x}_0 e raggio r l’insieme

$$I(\mathbf{x}_0, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\}$$

Siano ora A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N : $A \subset \mathbb{R}^N$ e \mathbf{x}_0 un punto di \mathbb{R}^N . Diciamo che:

- \mathbf{x}_0 è interno ad A se esiste $r > 0$ tale che $I(\mathbf{x}_0, r) \subset A$;
- \mathbf{x}_0 è esterno ad A se esiste $r > 0$ tale che $I(\mathbf{x}_0, r) \cap A = \emptyset$;
- \mathbf{x}_0 è di frontiera per A se non è né interno né esterno ad A .

Non è difficile vedere che le tre definizioni sopra si escludono mutualmente e viceversa ogni punto di \mathbb{R}^N ricade in una delle tre. Quindi, dato A , \mathbb{R}^N si spezza in tre insiemi disgiunti:

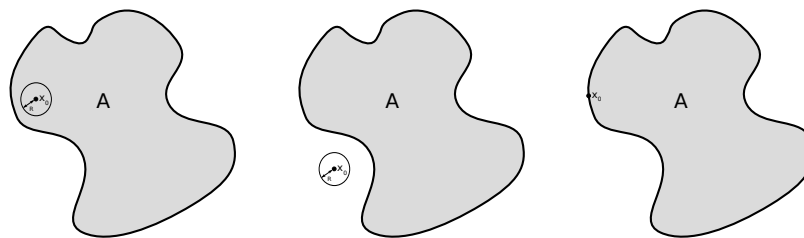


Figura 1.1: Punti interni esterni e di frontiera

- la *parte interna* di A , denotata con $\text{int}(A)$, cioè l'insieme di tutti i punti interni ad A ;
- la *frontiera* di A , denotata con ∂A , cioè l'insieme di tutti i punti di frontiera per A ;
- la *parte esterna* di A , cioè l'insieme dei punti esterni ad A , che però risulta essere (come si vede facilmente) la parte interna del complementare di A , $\text{int}(\mathbb{R}^N \setminus A)$.

Notiamo che:

- \mathbf{x}_0 è di frontiera per A se e solo se ogni disco $I(\mathbf{x}_0, r)$ contiene almeno un punto di A (eventualmente lo stesso \mathbf{x}_0) e almeno un punto di $\mathbb{R}^N \setminus A$;
- dire che \mathbf{x}_0 è interno ad A è di più che $\mathbf{x}_0 \in A$.

Inoltre chiamiamo *chiusura* di A l'insieme $\bar{A} := A \cup \partial A$. Diciamo anche che:

- A è aperto se tutti i suoi punti sono interni; questo è equivalente a dire che A coincide con la sua parte interna: $A = \text{int}(A)$ - o anche che A non contiene nessun punto di frontiera: $A \cap \partial A = \emptyset$;
- A è chiuso se A contiene tutta la sua frontiera: $\partial A \subset A$; questo è equivalente a dire che A coincide con la sua chiusura: $A = \bar{A}$.

Notiamo che ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi. Per esempio, in \mathbb{R} , si può prendere $A =]0, 1]$ (intervallo “semiaperto”); in \mathbb{R}^N è chiaro che la situazione può essere assai più complicata.

Infine diciamo che \mathbf{x}_0 è di *accumulazione* per A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto \mathbf{y} tale che

$$\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0 \quad , \quad \mathbf{y} \in A \quad , \quad \mathbf{y} \in I(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$$

In altre parole \mathbf{x} è di accumulazione per A se e solo se si possono trovare punti di A *diversi da* \mathbf{x} , vicini quanto si vuole a \mathbf{x} .

1.1.1 Esempio. Consideriamo in \mathbb{R}^2 l'insieme $A := I(0, 1) = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < 1\}$. Allora

- A è aperto;
- $\partial A = S := \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ (la sfera unitaria);
- S è chiuso.

Diremo infine che un insieme A è limitato se è contenuto in un qualche disco, cioè se esiste $R > 0$ tale che

$$\|\mathbf{x}\| \leq R \quad \forall \mathbf{x} \in A.$$

1.2 Limiti di funzioni di più variabili

Consideriamo un sottoinsieme A di \mathbb{R}^N e una funzione $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Supponiamo inoltre che \mathbf{x}_0 in \mathbb{R}^N sia un punto di accumulazione per A .

1.2.1 Definizione (di limite). Un punto \mathbf{l} di \mathbb{R}^M si dice limite di \mathbf{f} per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0 , e si scrive

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\rho > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, x \in A, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_N < \rho \implies \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\|_M < \varepsilon$$

(si sono usati gli indici N ed M per indicare le norme relative a \mathbb{R}^N e \mathbb{R}^M).

Spesso, quando il punto \mathbf{x}_0 è chiaro dal contesto useremo la scrittura più concisa $\mathbf{f}(x) \rightarrow \mathbf{l}$.

Elenchiamo ora le principali proprietà del limite.

1.2.2 Proposizione (unicità). *Se il limite esiste, allora è unico.*

In altre parole se, per \mathbf{x} tendente a \mathbf{x}_0 , si ha $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$, deve essere $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$.

1.2.3 Proposizione (linearità). *Se per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ si ha $\mathbf{f}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1$ e $\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_2$, e se c_1, c_2 sono numeri reali, allora*

$$c_1 \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + c_2 \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) \rightarrow c_1 \mathbf{l}_1 + c_2 \mathbf{l}_2$$

1.2.4 Proposizione (prodotto). *Siano $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A . Allora*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l}_1, g(\mathbf{x}) \rightarrow l_2 \implies g(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow l_2 \mathbf{l}_1$$

1.2.5 Proposizione (reciproco). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A . Allora*

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow l \neq 0 \implies \frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow \frac{1}{l}$$

1.2.6 Proposizione (composizione/cambio di variabile nei limiti). *Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$, $\mathbf{f} : A \rightarrow B$, $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^P$. Sia \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A , \mathbf{y}_0 un punto di accumulazione per B . Supponiamo che*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \quad , \quad \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} \mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{l}$$

per \mathbf{l} in \mathbb{R}^P . Supponiamo ancora che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{y}_0 \quad \text{se } \mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \text{ è vicino a } \mathbf{x}_0.$$

Allora risulta

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{l}.$$

Notiamo ora che dire $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ significa che per ogni \mathbf{x} di A è definito $\mathbf{f}(x)$ in \mathbb{R}^M . Ma allora $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è una m -pla di numeri $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix}$. Possiamo allora definire $f_1(\mathbf{x}) := y_1, \dots, f_M(\mathbf{x}) := y_M$; in questo modo abbiamo definito M funzioni reali $f_1 : A \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_M : A \rightarrow \mathbb{R}$ che vengono dette *le componenti* di \mathbf{f} :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \dots, x_N) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_N) \\ \vdots \\ f_M(x_1, \dots, x_N) \end{pmatrix}$$

1.2.7 Proposizione. Se $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_M \end{pmatrix}$ si ha (per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{l} \Leftrightarrow f_1(\mathbf{x}) \rightarrow l_1, \dots, f_M(\mathbf{x}) \rightarrow l_M$$

L'ultima proposizione dice che calcolare il limite di una funzione vettoriale è come calcolare gli M limiti delle sue componenti. Quindi *in arrivo* si potrebbe sempre considerare di avere una sola variabile ($f : A \rightarrow \mathbb{R}$); ben diverso è il ruolo delle variabili *in partenza*.

1.2.8 Definizione. Chiamiamo successione di punti di \mathbb{R}^M una qualunque funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^M$, cioè una funzione definita sugli interi a valori in \mathbb{R}^M . Come nel caso unidimensionale è convenzione indicare con a_n il valore del termine $a(n)$ e con $\{a_n\}$ l'intera successione.

Ovviamente la definizione generale di limite si applica in particolare alle successioni. Vediamo ora una relazione tra i limiti di funzione e i limiti di successioni (notiamo che le successioni sono "unidimensionali in partenza").

1.2.9 Proposizione. Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$. Allora:

x_0 è di accumulazione per $A \Leftrightarrow$ esiste una succ. $\{x_n\}$ di punti di A con $x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0$

1.2.10 Proposizione (limiti di funzioni e limiti di successioni).

Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A e \mathbf{l} in \mathbb{R}^M . Allora sono equivalenti i due fatti che seguono.

1. $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$;
2. per ogni successione $(\mathbf{x}_n)_n$ di punti di A tale che $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0 \forall n, \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ si ha che $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \rightarrow \mathbf{l}$.

L'enunciato precedente significa che per fare il limite di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per \mathbf{x} che tende a \mathbf{x}_0 è necessario considerare *tutti i modi possibili* di raggiungere \mathbf{x}_0 tramite dei punti vicini \mathbf{x} (in A). Non sarebbe lo stesso se, per esempio, si arrivasse a \mathbf{x}_0 solo sulle rette, come vediamo ora.

1.2.11 Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y)$ definita su $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da

$$f(x, y) := \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}.$$

È chiaro che $(0, 0)$ è di accumulazione per A e dunque possiamo chiederci se esiste il limite di $f(x, y)$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Potremmo ritenere utile il considerare la restrizione di f sulle rette che passano per $(0, 0)$, cioè considerare $f(x, mx)$ per $x \rightarrow 0$, avendo assegnato ad arbitrio un coefficiente angolare m (in questo modo si perde la retta verticale $y = 0$) - per ovviare a ciò si potrebbe considerare $f(at, bt)$ per $t \rightarrow 0$, avendo prefissato $(a, b) \neq (0, 0)$. Si vede subito che

$$f(x, mx) = \frac{m^2 x^6}{x^8 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x^2}{x^4 + m^4} \rightarrow 0 \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

È chiaro altresì che sulla retta $y = 0$ $f(x, y) = f(x, 0) = 0$ e dunque *sulle rette* $f(x, y)$ tende a zero (per evitare di distinguere i due casi si poteva anche considerare $f(at, bt)$ per $t \rightarrow 0$, avendo prefissato $(a, b) \neq (0, 0)$).

Però $f(x, y)$ non tende a 0 per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Infatti si può arrivare a $(0, 0)$ *sulle parabole* $y = mx^2$ (di nuovo m è un arbitrario numero reale). Si ha

$$\mathbf{f}(x, mx^2) = \frac{m^2 x^8}{x^8 + m^4 x^8} = \frac{m^2}{1 + m^4}$$

Quindi $f(x, mx^2) \rightarrow \frac{m^2}{1 + m^4}$ per $x \rightarrow 0$ e tale limite **dipende da** m , mentre se esistesse il limite nelle due variabili dovrei trovare un risultato costante (anzi dovrei trovare zero per il calcolo precedentemente fatto sulle rette). Se ne deduce che **non esiste** il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

1.2.12 Definizione (limiti infiniti). Nei casi in cui c'è una sola variabile, in partenza o in arrivo, si possono dare le definizioni di limiti infiniti.

- Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e \mathbf{x}_0 è di accumulazione per A possiamo dire che il limite di $f(\mathbf{x})$ per \mathbf{x} tendente a \mathbf{x}_0 è più infinito (meno infinito), e scrivere

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad (-\infty)$$

(o più brevemente $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty / -\infty$) se per ogni M in \mathbb{R} esiste $\rho > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in A, 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \rho \Rightarrow f(\mathbf{x}) > M \quad (< M).$$

A volte si usa dire che f tende all'infinito ($f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$) se si ha che $|f(x)| \rightarrow +\infty$.

- Se $A \subset \mathbb{R}$, se A non è superiormente (inferiormente) limitato e se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$, allora possiamo dire che il limite di $\mathbf{f}(x)$ per x tendente a $+\infty$ ($-\infty$) è \mathbf{l} ($\in \mathbb{R}^M$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste c in \mathbb{R} tale che

$$x \in A, x > c \quad (x < c) \Rightarrow \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{l}\| < \varepsilon$$

In questo caso scriviamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty / -\infty} \mathbf{f}(x) = \mathbf{l}$$

- Se $A \subset \mathbb{R}$, se A non è superiormente (inferiormente) limitato e se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, allora possiamo combinare le due definizioni sopra e dire che f tende a $+\infty / -\infty$ per x tendente a $+\infty$ ($-\infty$) se per ogni M in \mathbb{R} esiste c in \mathbb{R} tale che

$$x \in A, x > c \quad (x < c) \Rightarrow f(x) > M / f(x) < M$$

- Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ e se A non è limitato, possiamo dire che il limite di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per $\|\mathbf{x}\|$ tendente all'infinito è \mathbf{l} ($\in \mathbb{R}^M$) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x}\| \geq R \Rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}\| < \varepsilon$$

In questo caso scriviamo

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}$$

- Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$ e se A non è limitato, possiamo dire che il limite di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ per $\|\mathbf{x}\|$ tendente all'infinito è più infinito (meno infinito) se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $R > 0$ tale che

$$\mathbf{x} \in A, \|\mathbf{x}\| \geq R \Rightarrow f(\mathbf{x}) > M \quad (f(\mathbf{x}) < M)$$

In questo caso scriviamo

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad (-\infty)$$

1.2.13 Proposizione (algebra dei limiti infiniti). Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, \mathbf{x}_0 un punto di accumulazione per A , e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Allora valgono i seguenti risultati

- Se $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ($f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$) e se $g(\mathbf{x})$ è superiormente limitata ($g(\mathbf{x})$ è inferiormente limitata) in un intorno di \mathbf{x}_0 , allora:

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0).$$

- Se $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ ($f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$) e se $g(\mathbf{x}) \rightarrow l$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ con $l \in]0, +\infty]$, allora:

$$f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0).$$

Se invece $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ ($f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$) e $g(\mathbf{x}) \rightarrow l$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ con $l \in [-\infty, 0]$, allora:

$$f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad (f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0).$$

- Se $f(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ($f(\mathbf{x}) \rightarrow -\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$). allora

$$\frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow 0^+ \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad \frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow 0^- \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

Viceversa se $f(\mathbf{x}) \neq 0$ in un intorno di \mathbf{x}_0 e se $\frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow 0^+$ ($\frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow 0^-$) per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, allora

$$\frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow +\infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad \frac{1}{f(\mathbf{x})} \rightarrow 0 - \infty \text{ per } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0.$$

Come nel caso scalare rimangono indeterminate le situazioni in cui si presentino forme del tipo $+\infty - \infty$, $\pm\infty 0$ e quelle derivate da queste.

Nel caso che anche A sia contenuto in \mathbb{R} si può ammettere $\mathbf{x}_0 = \pm\infty$ (ricadendo nel caso completamente scalare, peraltro già noto).

1.3 Continuità per funzioni di più variabili

1.3.1 Definizione. Siano A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N e \mathbf{x}_0 un punto di A . Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ diciamo che f è continua nel punto \mathbf{x}_0

- se \mathbf{x}_0 non è un punto di accumulazione per A (\mathbf{x}_0 è isolato in A),
- se \mathbf{x}_0 è un punto di accumulazione per A e

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

Diremo che f è continua in A se f è continua in tutti gli \mathbf{x}_0 di A .

Le proprietà viste in precedenza per i limiti danno immediatamente delle analoghe proprietà per le funzioni continue.

1.3.2 Proposizione. $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ è continua in un punto \mathbf{x}_0 di A se e solo se tutte le componenti f_1, \dots, f_M sono continue in \mathbf{x}_0 .

1.3.3 Proposizione (linearità della classe delle funzioni continue). Se $f_1, f_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ sono due funzioni continue in un punto \mathbf{x}_0 di A e se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora la combinazione lineare $c_1 f_1 + c_2 f_2$ è continua in \mathbf{x}_0 .

1.3.4 Proposizione (continuità del prodotto). Se $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue in un punto \mathbf{x}_0 di A , allora il prodotto fg è continuo in \mathbf{x}_0 .

1.3.5 Proposizione (continuità della composizione). Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$, $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}^P$. Siano inoltre \mathbf{x}_0 un punto di A e $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$. Se f è continua in \mathbf{x}_0 e g è continua in \mathbf{y}_0 , allora la composizione $g \circ f$ è continua in \mathbf{x}_0 .

1.3.6 Proposizione (continuità tramite le successioni).

Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, \mathbf{x}_0 un punto di A e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Allora sono equivalenti i due fatti che seguono.

1. f è continua in \mathbf{x}_0 ;
2. per ogni successione $(\mathbf{x}_n)_n$ di punti di A tale che $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ si ha che $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$.

1.3.7 Teorema (Weierstrass). Sia A un sottoinsieme limitato e chiuso di \mathbb{R}^N e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione (reale) continua su A . Allora f ammette massimo e minimo su A , cioè esistono \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 in A tali che

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_2) \quad \forall \mathbf{x} \text{ in } A.$$

Ricordiamo che in tal caso \mathbf{x}_1 si dice punto di minimo per f su A mentre $f(\mathbf{x}_1)$ è il minimo di f su A ; analogamente \mathbf{x}_2 si dice punto di massimo per f su A mentre $f(\mathbf{x}_2)$ è il massimo di f su A .

Dal teorema di Weierstrass si possono derivare le seguenti conseguenze.

1.3.8 Proposizione. Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = +\infty \quad \left(\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = -\infty \right),$$

allora f ha minimo (f ha massimo) su tutto \mathbb{R}^N .

1.3.9 Proposizione. Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, $f(\mathbf{x}) \leq 0$ per ogni \mathbf{x} ($f(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni \mathbf{x}) e

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty} f(\mathbf{x}) = 0,$$

allora f ha minimo (f ha massimo) su tutto \mathbb{R}^N .

1.4 Derivate parziali, differenziale e gradiente

Vogliamo ora estendere le nozioni del calcolo differenziale per una funzione \mathbf{f} da \mathbb{R}^N in \mathbb{R}^M . Come prima cosa notiamo che, se $N = 1$ possiamo dare facilmente la nozione di derivata per \mathbf{f}

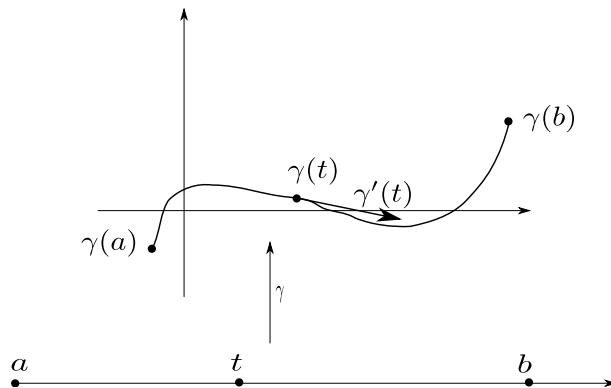
1.4.1 Definizione. Sia I un intervallo di \mathbb{R} e sia $\mathbf{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^M$. Sia x_0 un punto di I . Diciamo che \mathbf{f} è derivabile in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)}{x - x_0}$$

e in tal caso chiamiamo derivata di \mathbf{f} in x_0 tale limite, che indichiamo con $\mathbf{f}'(x_0)$. Se indichiamo con f_1, \dots, f_M le componenti di \mathbf{f} non è difficile vedere che

$$\mathbf{f} \text{ derivabile in } x_0 \Leftrightarrow f_1, \dots, f_M \text{ sono derivabili in } x_0 \text{ e } \mathbf{f}'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_M(x_0) \end{pmatrix}.$$

Quindi la derivabilità di una funzione vettoriale di UNA variabile reale si riconduce facilmente alla derivabilità di M funzioni reali di una variabile reale.



1.4.2 Osservazione. Se $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$, \mathbf{f} rappresenta una curva nello spazio \mathbb{R}^M . La sua derivata $\mathbf{f}'(x_0)$, se c'è, rappresenta il vettore tangente alla curva nel punto $\mathbf{f}(x_0)$. Se si interpreta x come un tempo allora \mathbf{f} si può interpretare come la traiettoria di un punto (che al tempo x sta nella posizione $\mathbf{f}(x)$) e in questo caso $\mathbf{f}'(x_0)$ rappresenta la velocità del punto all'istante x_0 .

Ben più ricco si presenta il caso generale con N più grande di uno. Supponiamo d'ora in poi che A sia un aperto di \mathbb{R}^N , che $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ e che $x_0 \in A$.

1.4.3 Definizione (derivate direzionali e derivate parziali). Sia \mathbf{y} in \mathbb{R}^N . Chiamiamo *derivata direzionale* di \mathbf{f} nella direzione di \mathbf{y} (o lungo \mathbf{y}) il limite

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x})(\mathbf{y}) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})}{t}$$

tale limite (che ha senso perché t è reale, e dunque si può dividere per t) rappresenta in sostanza la derivata della funzione $t \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{y})$ nel punto $t = 0$, cioè della restrizione di \mathbf{f} sulla retta passante per \mathbf{x}_0 con direzione data da \mathbf{y} .

Un caso particolare è quello in cui \mathbf{y} è uno dei versori della base di \mathbb{R}^N , cioè

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}_i := (0, \dots, 1, \dots, 0) \quad 1 \text{ al posto } i\text{-esimo}$$

In questo caso si vede che, scrivendo $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_N^0)$, si ha

$$\mathbf{f}'(x_0)(\mathbf{e}_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(x_1^0, \dots, x_i^0 + h, \dots, x_N^0)}{h}$$

cioè $\mathbf{f}'(x_0)(\mathbf{e}_i)$ è la derivata della funzione di una variabile $x \mapsto \mathbf{f}(x_1^0, \dots, x, \dots, x_N^0)$, ottenuta “congelando” le componenti di \mathbf{x} diverse dalla i -esima, nel punto $x = x_i^0$. Tale derivata si chiama derivata parziale i -esima di \mathbf{f} nel punto \mathbf{x}_0 e si indica con

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_N^0) \quad \text{o anche } (D_i \mathbf{f})(\mathbf{x}_0) = (D_i \mathbf{f})(x_1^0, \dots, x_N^0)$$

Naturalmente le derivate direzionali e in particolare le derivate parziali sono dei vettori di \mathbb{R}^M . È chiaro d'altronde che

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_i}(x_0) \end{pmatrix}.$$

1.4.4 Definizione (matrice Jacobiana e gradiente). Supponiamo che \mathbf{f} abbia derivate parziali in $\mathbf{x} : 0$. Chiamiamo *Jacobiano* di \mathbf{f} in \mathbf{x}_0 la matrice $M \times N$

$$J_{\mathbf{f}}(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & , & \cdots & , & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & , & & , & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(x_0) & , & \cdots & , & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$

Nel caso particolare in cui $M = 1$ (funzione scalare) lo Jacobiano ha una sola riga di N elementi. Chiamiamo *gradiente* di f nel punto x_0 il trasposto dello Jacobiano:

$$\nabla f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$

1.4.5 Osservazione. Dobbiamo pensare al gradiente come al vettore avente come componenti le derivate parziali di f nel punto x_0 . Il motivo per cui si prende il trasposto è che, nelle convenzioni dell'algebra lineare, i vettori dello spazio sono rappresentati come colonne, in modo da far tornare le regole dei prodotti matriciali (per esempio se \mathbf{v} e \mathbf{w} sono vettori allora il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ si rappresenta come il prodotto matriciale tra \mathbf{v}^t e \mathbf{w}).

Avendo introdotto le definizioni precedenti, che sembrano naturali, ci si trova subito di fronte ad un fatto imprevisto: può succedere che una funzione abbia tutte le derivate parziali in un punto *senza essere neppure continua*.

1.4.6 Esempio. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Allora si vede subito che

$$f(x, 0) = 0 \quad , \quad f(0, y) = 0 \quad \forall x, y,$$

e dunque $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Se poi si prende un qualunque $\mathbf{v} = (x, y)$ si vede che

$$f(\mathbf{0} + t\mathbf{v}) = f(tx, ty) = \frac{t^2(xy)}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

e quindi, essendo $t \mapsto f(\mathbf{0} + t\mathbf{v})$ costante in t , risulta $f'(\mathbf{0})(\mathbf{v}) = 0$ per ogni \mathbf{v} . Ciò nonostante la funzione NON è continua in zero perché da quanto visto sopra segue

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{0} + t\mathbf{v}) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

e dunque avvicinandosi a zero su rette diverse f tende a limiti diversi (e dunque NON ha limite in zero).

Si può verificare facilmente che anche la funzione dell'esempio 1.2.11 ha tutte le derivate direzionali nell'origine, e tali derivate sono nulle, anche se la funzione, come si è già visto, non è continua nell'origine.

L'esempio precedente si giustifica pensando che la continuità di f richiede che $f(\mathbf{x})$ sia vicino a $f(\mathbf{x}_0)$ quando \mathbf{x} è vicino a \mathbf{x}_0 *in qualunque modo* \mathbf{x} si avvicini a \mathbf{x}_0 . Al contrario conoscere le derivate parziali o le derivate direzionali dice qualcosa sul comportamento di $f(\mathbf{x})$ quando \mathbf{x} si avvicina a \mathbf{x}_0 *sulle rette* e questo non basta.

Per superare il problema precedente serve una definizione più forte.

1.4.7 Definizione (differenziabilità). Diciamo che \mathbf{f} è *differenziabile* in \mathbf{x}_0 se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ tale che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

La definizione sopra esprime il fatto che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|)$$

(estendendo opportunamente la nozione di o piccolo), cioè che, per \mathbf{x} vicino a \mathbf{x}_0 la funzione “somiglia” alla funzione affine $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + L(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, il cui grafico rappresenta un “piano”-passante per $(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$ (il termine piano è corretto se $M = 1$ se no è uno spazio lineare di dimensione N dentro \mathbb{R}^{N+M}). Quindi dire che \mathbf{f} è differenziabile “significa” dire che il grafico di \mathbf{f} ammette piano tangente in $(\mathbf{x}_0, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0))$, dato dall'equazione affine sopra indicata.

1.4.8 Proposizione. *Supponiamo che \mathbf{f} sia differenziabile in \mathbf{x}_0 e sia L come nella definizione sopra. Allora*

1. \mathbf{f} è continua in \mathbf{x}_0 ;
2. per ogni \mathbf{y} in \mathbb{R}^N esiste la derivata direzionale di \mathbf{f} lungo \mathbf{y} e si ha

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y}) = L(\mathbf{y});$$

3. come conseguenza del punto precedente L è unico con la proprietà suddetta ed è individuato da

$$L(\mathbf{y}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$$

dove nella formula sopra, a destra dell'eguale, si intende il prodotto matriciale della matrice Jacobiana $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ per il vettore \mathbf{y} (che va messo in colonna!). Nel caso di una funzione scalare $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, allora $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ deve verificare

$$L(\mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$$

denotando con \cdot il prodotto scalare tra i vettori di \mathbb{R}^N .

Formalizziamo anche la nozione di piano tangente - consideriamo solo il caso scalare, che è più semplice da visualizzare.

1.4.9 Definizione (iperpiano tangente). Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 , allora il grafico dell'equazione

$$z = f(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

si definisce *iperpiano tangente* (piano se $N = 2$) al grafico di f nel punto $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0)) = (x_1^0, \dots, x_N^0, f(\mathbf{x}_0))$ (tale iperpiano "vive" in \mathbb{R}^{N+1}), così come la retta tangente vive" in \mathbb{R}^2).

Il teorema che segue mostra che, "nei casi buoni" trovare le derivate parziali è sufficiente per le buone proprietà di \mathbf{f} .

1.4.10 Teorema (del differenziale totale). Supponiamo che $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ abbia derivate parziali rispetto a x_i , per ogni $i = 1, \dots, N$ e in ogni \mathbf{x} di un opportuno $I(\mathbf{x}_0, r)$ con $r > 0$ e supponiamo che tali derivate parziali siano continue in \mathbf{x}_0 . Allora \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x}_0 .

Si noti che nel controesempio fatto in precedenza il problema che si verifica è proprio che le derivate parziali, pur esistendo per ogni (x_1, x_2) , non sono continue in $(0, 0)$.

Enunciamo ora vari teoremi sulle proprietà della differenziabilità e delle derivate parziali. In questi enunciati la parte veramente "nuova" è la differenziabilità, in quanto le formule si potrebbero ricavare dalle formule di derivazione per funzioni di una variabile (eccetto il caso della funzione composta).

1.4.11 Teorema (linearità). Se $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ sono differenziabili in \mathbf{x}_0 e se $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora $c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 e si ha, per ogni $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$

$$\frac{\partial(c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2)_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = c_1 \frac{\partial(\mathbf{f}_1)_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} + c_2 \frac{\partial(\mathbf{f}_2)_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

o in termini di matrici Jacobiane

$$J_{c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2}(\mathbf{x}_0) = c_1 J_{\mathbf{f}_1}(\mathbf{x}_0) + c_2 J_{\mathbf{f}_2}(\mathbf{x}_0).$$

1.4.12 Teorema (prodotto). Se $\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono differenziabili in \mathbf{x}_0 , allora $g\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 e si ha, per ogni $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, M$

$$\frac{\partial(g\mathbf{f})_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = g(\mathbf{x}_0) \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_0) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$$

o in termini di matrici Jacobiane

$$J_{g\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) + \nabla g(\mathbf{x}_0) \otimes \mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

(se si introduce il simbolo \otimes per il quale dati \mathbf{v} in \mathbb{R}^N di coordinate v_1, \dots, v_N e \mathbf{w} in \mathbb{R}^M di coordinate w_1, \dots, w_M , allora $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ è la matrice M per N di componenti $w_j v_i$???????).

1.4.13 Teorema (prodotto scalare). Se $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ sono differenziabili in \mathbf{x}_0 allora $\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 e

$$\frac{\partial(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^M \left(\frac{\partial f_{1,j}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) f_{2,j}(\mathbf{x}_0) + f_{1,j}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial f_{2,j}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \right)$$

che in termini di matrici Jacobiane e gradienti si può scrivere

$$\nabla(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{f}_1}(\mathbf{x}_0) \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_0) + J_{\mathbf{f}_2}(\mathbf{x}_0) \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0)$$

Il seguente teorema, che non si riuscirebbe a dedurre con argomenti di una variabile, mostra come sia “giusta” l’impostazione introdotta sopra.

1.4.14 Teorema (composizione). Siano $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$ aperti; siano $\mathbf{f} : A \rightarrow B$ e $\mathbf{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^P$; siano infine \mathbf{x}_0 in A e \mathbf{y}_0 in B .

Se \mathbf{f} è differenziabile in \mathbf{x}_0 e \mathbf{g} è differenziabile in \mathbf{y}_0 allora la funzione composta $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : A \rightarrow \mathbb{R}^P$ è differenziabile in \mathbf{x}_0 . In questo caso si ha

$$J_{\mathbf{g} \circ \mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_0) J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$$

(prodotto di matrici) che in termini di derivate parziali significa

$$\frac{\partial(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})_k}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^M \frac{\partial g_k(\mathbf{y}_0)}{\partial y_j} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, N \quad k = 1, \dots, P$$

1.4.15 Osservazione. Supponiamo che $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione (scalare) differenziabile in A e che $\gamma : [0, T] \rightarrow A$ sia una curva definita in un intervallo $[0, T]$, derivabile in $[0, T]$. Allora $f \circ \gamma$ è una funzione reale definita su $[0, T]$ che ha come derivata (per la formula sulla composizione)

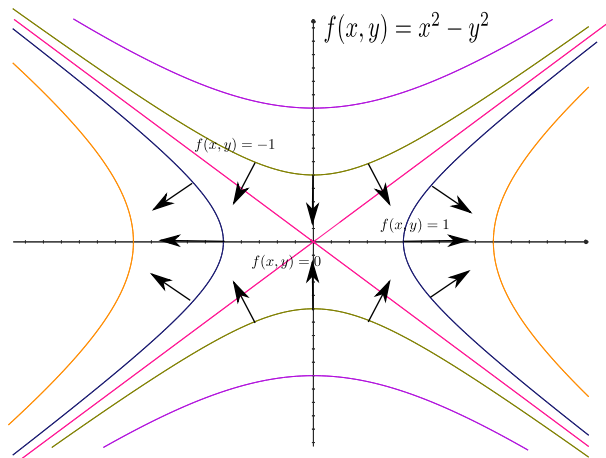
$$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Supponiamo che γ descriva una linea di livello, cioè che $f(\gamma(t))$ sia costante; allora il termine di sinistra nella formula sopra è eguale a zero e cioè $\nabla f(\gamma(t))$ è ortogonale a $\gamma'(t)$. Dato che $\gamma'(t)$ è la direzione tangente alla curva, questo fatto si interpreta dicendo che il gradiente è in un punto $\mathbf{x}_0 (= \gamma(t))$ è ortogonale alla linea di livello passante per \mathbf{x}_0 (tutto questo è corretto se il gradiente è diverso da zero).

Facciamo un’altra considerazione. Sia \mathbf{y} un qualsiasi vettore di \mathbb{R}^N con $\|\mathbf{y}\| = 1$; allora la derivata di f nella direzione di \mathbf{y} è pari a

$$f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}.$$

Non è difficile vedere che tale espressione ha valore massimo esattamente quando $\mathbf{y} = \nabla f(\mathbf{x}_0) / \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$ e il valore massimo è $\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$; quindi il gradiente è un vettore diretto verso la “direzione di massima crescita” di f (a partire da \mathbf{x}_0), mentre il modulo del gradiente è la derivata di f lungo questa direzione.



1.4.16 Definizione (massimi e minimi relativi). Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che un punto \mathbf{x}_0 di A è di massimo (minimo) relativo per f se esiste un disco $I(\mathbf{x}_0, r)$ con $r > 0$ tale che

$$f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \quad (f(\mathbf{x}) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \quad \text{per ogni } x \text{ in } I(\mathbf{x}_0, r) \cap A$$

1.4.17 Teorema (massimi o minimi relativi e punti stazionari). *Sia A un sottoinsieme di \mathbb{R}^N , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e \mathbf{x}_0 un punto di A . Supponiamo che*

- \mathbf{x}_0 sia punto di massimo (minimo) relativo per f ;
- \mathbf{x}_0 sia interno ad A ;
- f sia differenziabile in \mathbf{x}_0 .

Allora $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$; esprimeremo di solito quest'ultima proprietà dicendo che \mathbf{x}_0 è un punto stazionario (o critico) per f .

1.4.18 Osservazione. Come nel caso di una variabile non vale l'implicazione opposta, stazionario non è equivalente a massimo o minimo relativo. Nel caso di una variabile il controesempio era dato dai punti di flesso (come nel caso di $f(x) = x^3$, in cui 0 è stazionario ma f è strettamente crescente). Nel caso di funzioni di più variabili la situazione è più ricca: consideriamo la funzione

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

definita su tutto \mathbb{R}^2 . Si vede facilmente che

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, -2x_2)$$

e quindi $(0, 0)$ è (l'unico) punto stazionario. Si vede anche, però, che

$$x \mapsto f(x, 0) \text{ ha minimo in } x = 0 \quad y \mapsto f(0, y) \text{ ha massimo in } y = 0$$

(massimi e minimi stretti) e quindi $(0, 0)$ non è né di massimo, né di minimo (e non possiamo neanche, ragionevolmente, chiamarlo un flesso). Un punto con tali caratteristiche si usa chiamare *punto di sella* per f .

Il teorema appena citato estende in maniera naturale quello già visto nel caso di funzioni di una variabile dicendo in sostanza che i massimi e i minimi relativi per f vanno cercati tra:

- i punti stazionari,
- i punti in cui f non è differenziabile,
- i punti di frontiera del dominio A .

Nel caso di una variabile il terzo punto era piuttosto facile in quanto tipicamente A era un intervallo e i suoi punti di frontiera gli estremi, che sono due punti. Nel caso di più variabili la ricerca dei punti di massimo o minimo relativo alla frontiera è ben più difficile. Ci sono dei teoremi che si occupano di studiare questo tipo di problemi in generale, ma questa tematica esula dai nostri scopi e non ce ne occupiamo.

1.5 Derivate seconde

Consideriamo per semplicità in quest'ultimo paragrafo una funzione scalare: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

1.5.1 Definizione. Se f è differenziabile in A allora assegnata una direzione \mathbf{y}_1 in \mathbb{R}^N è definita la derivata direzionale $f'(\mathbf{x})(\mathbf{y}_1)$, per ogni \mathbf{x} di A ; risulta così definita una nuova funzione che possiamo indicare con $f'_{\mathbf{y}_1} : A \rightarrow \mathbb{R}$. Prendiamo ora un punto \mathbf{x}_0 e un'altra direzione \mathbf{y}_2 . Può capitare che $f'_{\mathbf{y}_1}$ sia derivabile lungo \mathbf{y}_2 nel punto \mathbf{x}_0 : in questo caso diremo che \mathbf{f} ammette derivata direzionale seconda lungo $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ e indicheremo con $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$

la derivata direzionale $(f'_{\mathbf{y}_1})'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y}_2)$. Se $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}$ è usuale scrivere $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y}^2)$ in luogo di $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{y}, \mathbf{y})$.

Supponiamo che $\mathbf{y}_1 = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{e}_j$, dove come prima \mathbf{e}_i denota il versore i -esimo della base canonica $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, (1 al posto i -esimo). Allora se in \mathbf{x}_0 esiste la derivata seconda $f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ diremo che f ammette derivate parziali seconde rispetto a x_i e x_j , in \mathbf{x}_0 , e useremo la notazione

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}_0) = f''(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j);$$

nel caso $i = j$ scriveremo semplicemente $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(\mathbf{x}_0)$ in luogo di $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} f(\mathbf{x}_0)$

In generale NON è detto che $f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1)$. Nei “casi normali” tutto funziona come ci si aspetta a causa del seguente teorema.

1.5.2 Teorema (di Schwartz). *Se le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x})$ esistono per ogni $i, j = 1, \dots, N$ e se sono CONTINUE rispetto a \mathbf{x} , allora*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x) \quad \forall \mathbf{x}.$$

Notiamo che in tal caso, come conseguenza del teorema del differenziale totale (applicato alle varie $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$), si ha

$$f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) y_{1,i} y_{2,j}$$

(dove $\mathbf{y}_1 = (y_{1,1}, \dots, y_{1,N})$ e $\mathbf{y}_2 = (y_{2,1}, \dots, y_{2,N})$).

1.5.3 Definizione (matrice Hessiana). Se f ha derivate parziali seconde, allora la matrice $N \times N$

$$H_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_N} f(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_N} f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_N \partial x_1} f(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2}{\partial x_N \partial x_2} f(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} f(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

si chiama *matrice Hessiana* di f nel punto \mathbf{x} . Per il teorema di Schwartz, se le derivate parziali sono continue tale matrice risulta SIMMETRICA.

1.5.4 Osservazione. Nelle ipotesi del teorema di Schwartz ha

$$f''(\mathbf{x})(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \mathbf{y}_1 \cdot H_f(\mathbf{x}) \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2 \cdot H_f(\mathbf{x}) \mathbf{y}_1$$

1.5.5 Teorema (formula di Taylor al secondo ordine). *Supponiamo che f abbia derivate seconde continue e sia \mathbf{x}_0 un punto di A . Allora*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$$

In altri termini se poniamo

$$P_2(\mathbf{y}) := f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{y}$$

(P_2 è il polinomio di Taylor di ordine due relativo a \mathbf{x}_0), allora

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - P_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = 0$$

Tutto quanto fatto sopra per le derivate seconde si potrebbe iterare, dando delle nozioni di derivate parziali $\frac{\partial^K}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}} f$ di ordine K , k_1 volte rispetto a x_1 , \dots , k_N volte rispetto a x_N ($k_1 + \dots + k_N = K$). In questo modo si potrebbe costruire il polinomio di Taylor di ordine K (con un opportuna miscela delle derivate di ordine K e scrivere la corrispondente formula di approssimazione a meno di $o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^K)$ - ma questa è un'altra storia, che non abbiamo tempo di raccontare. Mostriamo solamente come la nozione di matrice Hessiana, introdotta prima, possa essere utile per classificare i punti stazionari di una funzione, estendendo il semplice criterio per le funzioni di una variabile che dice $f''(x_0) > 0 / < 0 \Rightarrow x_0$ punto di minimo/massimo.

1.5.6 Osservazione. Ricordiamo che una matrice simmetrica $N \times N$ ammette sempre N autovalori $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$, anzi esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^N in cui tale matrice assume la forma diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & , & 0 & \dots & , & 0 \\ 0 & , & \lambda_2 & \dots & , & 0 \\ \vdots & , & \vdots & \dots & , & \vdots \\ 0 & , & 0 & \dots & , & \lambda_N \end{pmatrix}$$

1.5.7 Teorema (classificazione dei punti stazionari). *Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in A con derivate seconde continue. Sia \mathbf{x}_0 in A un punto stazionario per f ($\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$). Siano*

$$\lambda_1(\mathbf{x}_0) \leq \lambda_2(\mathbf{x}_0) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{x}_0)$$

gli autovalori della matrice Hessiana $H_f(\mathbf{x}_0)$. Allora

- *se $\lambda_1 > 0$ (tutti gli autovalori positivi), allora \mathbf{x}_0 è un punto di minimo per f ;*
- *se $\lambda_N < 0$ (tutti gli autovalori negativi), allora \mathbf{x}_0 è un punto di massimo per f ;*
- *se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_N > 0$ il punto \mathbf{x}_0 è di sella per f : per la verità una vera sella dovrebbe avere tutti gli autovalori diversi da zero, in questo caso si potrebbe vedere che f scende (vicino a \mathbf{x}_0) nelle direzioni degli autovettori relativi agli autovalori negativi mentre sale nelle direzioni degli autovettori relativi agli autovalori positivi.*

Se $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_N = 0$ non si può dire nulla (porebbe esserci un analogo dei punti di flesso)

Capitolo 2

Campi e integrali di linea

2.1 Richiami sui campi e gli integrali di linea

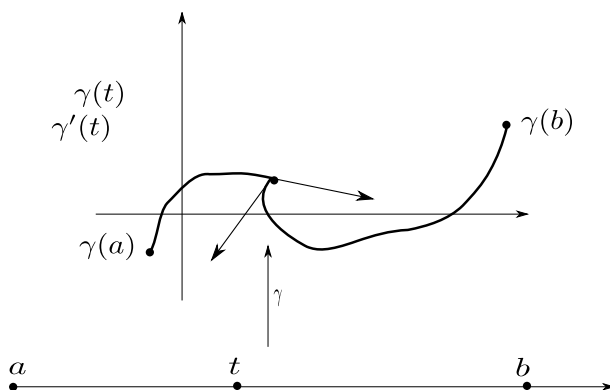
2.1.1 Definizione. Come già ricordato una *curva* in \mathbb{R}^N è una applicazione γ da un intervallo I di \mathbb{R} a valori in \mathbb{R}^N (cioè $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$). Se $I = [a, b]$ allora i punti $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ si chiamano gli *estremi* della curva γ . Si dice *supporto* di γ l'immagine $\gamma(I)$ della curva.

Possiamo immaginare che I sia un intervallo di tempi e che γ descriva la legge del moto di un punto in \mathbb{R}^N . Notiamo che parlando di una curva non teniamo conto solo dei punti $\gamma(t)$ percorsi al variare di t in I , ma di tutta l'applicazione γ ; per esempio, dati due punti P_0 e P_1 in \mathbb{R}^N , $\gamma_1(t) := tP_0 + (1-t)P_1$ e $\gamma_2(t) := tP_1 + (1-t)P_0$, per $t \in [0, 1]$ hanno entrambe come supporto il segmento tra P_0 e P_1 , ma γ_2 è *percorsa in senso inverso* rispetto a γ_1 .

Se $I = [a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$ diremo che γ è una *curva chiusa*.

Dato che le curve sono delle applicazioni è chiaro che ha senso dire che γ è continua oppure C^1 (sull'intervallo di definizione).

Diremo che γ è C^1 a tratti se γ è continua su tutto I e l'intervallo I si può suddividere in un numero finito di sottointervalli I_1, \dots, I_k tali che la restrizione di γ alla chiusura di ognuno di tali sottointervalli è di classe C^1 . Questo significa che, eccetto un numero finito di punti, la curva ammette il *vettore tangente*, dato da $\gamma'(t)$ e che comunque nei punti singolari si presenta “uno spigolo” in cui esistono la “tangente da destra” e la “tangente da sinistra”.



2.1.2 Definizione. Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ indichiamo con $-\gamma$ la curva $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ definita da $\gamma_1(t) := \gamma(a + b - t)$ (cioè la curva γ percorsa a ritroso).

2.1.3 Definizione. Date due curve $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ diremo che γ_2 è una *riparametrizzata* di γ_1 se $\gamma_2(t) = \gamma_1(\varphi(t))$ per ogni t in $[a_2, b_2]$, dove $\varphi : [a_2, b_2] \rightarrow [a_1, b_1]$ è un'applicazione C^1 con $\varphi(a_2) = a_1$ e $\varphi(b_2) = b_1$. La φ viene detta *riparametrizzazione* o *cambio di parametro*.

2.1.4 Osservazione. Se γ_2 è una riparametrizzata di γ_1 , allora le due curve hanno lo stesso supporto. Il viceversa non è vero, come si potrebbe vedere considerando

$$\gamma_1(t) := (\cos(t), \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \gamma_2(t) := (\cos(t), \sin(t)) \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

dato che γ_1 percorre **una volta** la circonferenza unitaria in \mathbb{R}^2 mentre γ_2 percorre **due volte** la stessa circonferenza.

2.1.5 Definizione. Diciamo che due curve γ_1 e γ_2 sono *consecutive* se $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2(b) = \gamma_1(b)$. In questo caso si può definire $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ ponendo $\gamma : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $T := (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)$ e

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a, b], \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [(b, c]. \end{cases}$$

Più in generale diciamo che $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono consecutive se $\gamma_2(b_1) = \gamma_1(a_2)$. È semplice vedere che allora si può riparametrizzare le due curve in modo che siano consecutive nel senso di prima e si può definire la somma prendendo la somma delle riparametrizzate. Dunque la somma di due curve non è definita in modo univoco ma ciò non darà fastidio in quanto tutte le operazioni che faremo sulle curve sono indipendenti dalle riparametrizzazioni.

È immediato verificare che se γ_1 e γ_2 sono C^1 a tratti anche $\gamma_1 + \gamma_2$ lo è. Se invece γ_1 e γ_2 hanno lo stesso secondo estremo ($\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$) è chiaro che possiamo considerare $\gamma_1 - \gamma_2 := \gamma_1 + (-\gamma_2)$.

2.1.6 Osservazione. È abbastanza semplice verificare che γ è C^1 a tratti se e solo se essa è continua e se $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$ dove $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sono k curve C^1 consecutive.

2.1.7 Definizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una curva C^1 chiamiamo *lunghezza* di γ l'integrale:

$$l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Se poi γ è solo C^1 a tratti poniamo

$$l(\gamma) := l(\gamma_1) + \dots + l(\gamma_k)$$

dove $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sono k curve C^1 consecutive tali che $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_k$. Si può verificare che l'ultima definizione è ben posta in quanto dipende solo da γ .

2.1.8 Proposizione (invarianza per riparametrizzazioni). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva di classe C^1 in Ω . Allora*

- Se γ_1 è una riparametrizzata di γ allora $l(\gamma) = l(\gamma_1)$;
- $l(\gamma) = l(-\gamma)$.

Le stesse proprietà sono vere se γ è C^1 a tratti.

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 . Sia $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ la riparametrizzazione per cui vale $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$. Allora

$$l(\gamma_1) = \int_c^d |\gamma_1'(t)| dt = \int_c^d |\varphi'(t)| |\gamma'(\varphi(t))| dt = \int_a^b |\gamma'(s)| ds = l(\gamma)$$

(nel penultimo passaggio si è usata la sostituzione $s = \varphi(t)$). La dimostrazione della seconda formula è analoga. Anche il caso C^1 a tratti non è difficile da dimostrare. \square

2.1.9 Proposizione. *Se $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ sono tutte C^1 a tratti allora*

$$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

2.1.10 Proposizione. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è una curva C^1 a tratti si può sempre trovare una riparametrizzazione $\varphi : [0, L] \rightarrow [a, b]$ tale che la riparametrizzata $\gamma_1 := \gamma \circ \varphi$ ha (modulo della) velocità costante, anzi $|\gamma_1(t)| = 1$ per ogni t ; si vede allora che $L = l(\gamma) = l(\gamma_1)$ e si dice che γ_1 è parametrizzata nella lunghezza d'arco.

2.1.11 Definizione. Diremo che un insieme D in \mathbb{R}^N è connesso (per archi) se dato comunque due punti P e Q in D esiste una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ (dunque il supporto di γ è tutto contenuto in D) tale che $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$: in sostanza “comunque presi P e Q in D questi si possono congiungere con una curva in D ”.

2.1.12 Proposizione. Se Ω è un aperto connesso di \mathbb{R}^N e se $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $\bar{\Omega}$ e differenziabile in Ω , allora

$$\nabla f(x) = 0 \quad \forall x \text{ in } \Omega \Rightarrow f \text{ è costante in } \bar{\Omega}.$$

D'ora in poi consideriamo un sottoinsieme Ω aperto e connesso in \mathbb{R}^N . Inoltre, se \mathbf{x} e \mathbf{y} sono due vettori di \mathbb{R}^N indichiamo con $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ il prodotto scalare tra \mathbf{x} e \mathbf{y} definito da $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$.

2.1.13 Definizione. Se D è un sottoinsieme di \mathbb{R}^N chiameremo *campo* in D un'applicazione $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^N$. Possiamo pensare che per ogni \mathbf{x} in D $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ rappresenti una forza applicata nel punto \mathbf{x} (dunque \mathbf{f} rappresenta un campo di forze in D). Nel seguito considereremo sempre dei campi che siano continui nel loro insieme di definizione e aggiungeremo volta per volta delle ulteriori proprietà. La situazione tipica, che d'ora in poi assumiamo (a meno di precisazioni in senso contrario) è $D = \Omega$, quindi $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continuo in $\bar{\Omega}$. Spesso servirà ipotizzare che \mathbf{f} sia differenziabile in Ω .

Diciamo che il campo \mathbf{f} è *conservativo* se esiste una funzione $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla F(\mathbf{x})$ per ogni \mathbf{x} in Ω e cioè

$$f_i(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, \dots, x_N) \quad \forall (x_1, \dots, x_N) = \mathbf{x} \in \Omega;$$

se tale F esiste si dirà che F è un *potenziale* per il campo \mathbf{f} .

2.1.14 Definizione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ una curva di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ e sia $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo continuo in $\bar{\Omega}$. Chiameremo *integrale* di \mathbf{f} su γ l'espressione:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma := \int_a^b \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

La definizione si può estendere al caso di curve C^1 a tratti: se I_1, \dots, I_k sono come nella definizione 2.1.1, allora

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma := \sum_{i=1}^k \int_{I_i} \mathbf{f}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

L'integrale di \mathbf{f} su γ si chiama anche il *lavoro* del campo \mathbf{f} sulla curva γ .

2.1.15 Proposizione (invarianza per riparametrizzazioni). Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ una curva di classe C^1 in $\bar{\Omega}$ e sia \mathbf{f} un campo continuo su $\bar{\Omega}$.

- Se γ_1 è una riparametrizzata di γ allora:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

- Si ha:

$$\int_{-\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma = - \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

Le stesse proprietà sono vere se γ è C^1 a tratti.

2.1.16 Proposizione. Se γ_1 e γ_2 sono curve consecutive in $\bar{\Omega}$ e C^1 a tratti, e se \mathbf{f} è un campo continuo in $\bar{\Omega}$ allora

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma + \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma$$

2.1.17 Teorema. Sia dato $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continuo in $\bar{\Omega}$. Sono equivalenti i tre fatti seguenti.

1. \mathbf{f} è un campo conservativo.
2. Date due curve C^1 a tratti γ_1 e γ_2 in $\bar{\Omega}$ aventi gli stessi estremi, il lavoro di \mathbf{f} sulle due curve è lo stesso:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

3. Data una curva chiusa in $\bar{\Omega}$, C^1 a tratti γ , il lavoro di f su γ è nullo:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma = 0.$$

Inoltre se il campo è conservativo ed F è un potenziale si ha:

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \int_{\gamma_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}} \mathbf{f} \cdot d\gamma$$

dove \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} sono due qualunque punti di $\bar{\Omega}$ e $\gamma_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}$ è una qualunque curva in $\bar{\Omega}$ che congiunge \mathbf{x}_0 a \mathbf{x} .

2.1.18 Definizione. Dato un campo $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^1 diremo che \mathbf{f} è irrotazionale in Ω se per ogni $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ in Ω si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x_1, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1, \dots, x_N) \quad \forall i, j = 1, \dots, N.$$

2.1.19 Proposizione. Se \mathbf{f} è conservativo in Ω allora \mathbf{f} è irrotazionale in Ω .

Il viceversa della proposizione sopra non vale come mostra l'esempio

$$\mathbf{f}(x_1, x_2) := \left(\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Tale campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, dato che:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x_1, x_2) &= \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + x_2 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1, x_2) &= \frac{(x_1^2 + x_2^2) - x_1 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

ma se consideriamo la curva $\gamma(t) = (\rho \cos(t), \rho \sin(t))$, per $t \in [0, 2\pi]$ e per $\rho > 0$ fissato è chiaro che γ è una curva chiusa e che $\gamma'(t) = (-\rho \sin(t), \rho \cos(t))$ (γ descrive la circonferenza di raggio ρ percorsa una volta in senso antiorario). Allora:

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} \frac{(-\rho \sin(t))(-\rho \sin(t)) + \rho \cos(t)\rho \cos(t)}{\rho^2(\cos^2(t) + \sin^2(t))} dt = 1$$

e quindi \mathbf{f} non può essere conservativo.

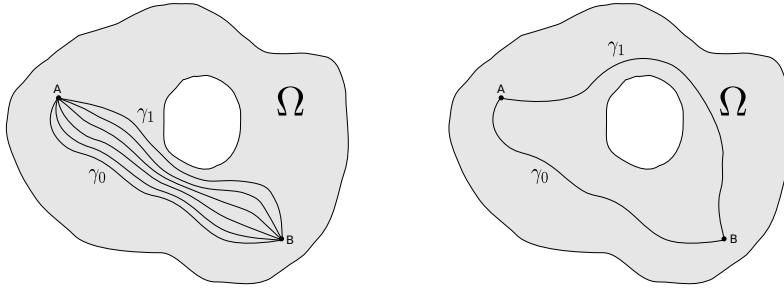


Figura 2.1: Curve omotope e non omotope a estremi fissi

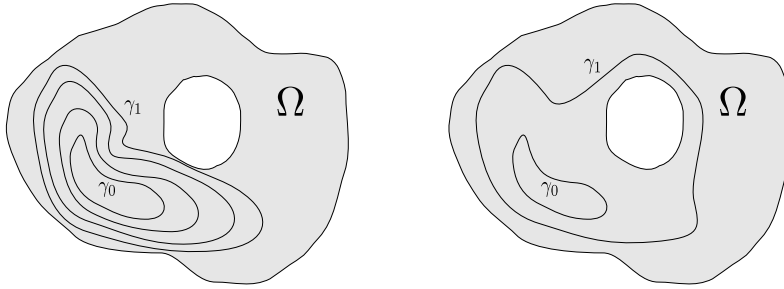


Figura 2.2: curve chiuse omotope e non omotope

2.1.20 Definizione. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ due curve in $\bar{\Omega}$ aventi gli stessi estremi: $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \mathbf{A}$ e $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \mathbf{B}$. Diremo che γ_0 e γ_1 sono *omotope a estremi fissi* in Ω se esiste una applicazione $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ (detta *omotopia a estremi fissi* tra γ_0 e γ_1) tale che H è continua (sul rettangolo $[a, b] \times [0, 1]$) e si ha:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(a, s) &= \mathbf{A}, H(b, s) = \mathbf{B} & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tutto ciò significa che si può passare con continuità da γ_0 a γ_1 mediante una famiglia di curve in $\bar{\Omega}$ ($\gamma_s(t) = H(t, s)$), tutte con primo estremo in \mathbf{A} e secondo estremo in \mathbf{B} (vedi la figura 2.1).

2.1.21 Definizione. Siano $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \bar{\Omega}$ due curve chiuse in $\bar{\Omega}$ $\gamma_0(a) = \gamma_0(b)$ e $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$. Diremo che γ_0 e γ_1 sono *omotope come curve chiuse* in $\bar{\Omega}$ se esiste una applicazione $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}$ (detta *omotopia di curve chiuse* tra γ_0 e γ_1) tale che H è continua (sul rettangolo $[a, b] \times [0, 1]$) e si ha:

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \gamma_0(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(t, 1) &= \gamma_1(t) & \forall t \in [a, b], \\ H(a, s) &= H(b, s) & \forall s \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Tutto ciò significa che si può passare con continuità da γ_0 a γ_1 mediante una famiglia di curve chiuse in $\bar{\Omega}$ ($\gamma_s(t) = H(t, s)$) (vedi la figura 2.2).

2.1.22 Teorema. Sia $\mathbf{f} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ un campo continuo in $\bar{\Omega}$ e C^1 in Ω con \mathbf{f} irrotazionale.

1. Allora se due curve γ_0 e γ_1 in $\bar{\Omega}$ aventi gli stessi estremi sono omotope in $\bar{\Omega}$ (a estremi fissi) si ha che:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

2. Analogamente se γ_0 e γ_1 sono due curve chiuse in $\bar{\Omega}$ tra di loro omotope in $\bar{\Omega}$ (come curve chiuse) si ha che:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\gamma = \int_{\gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\gamma.$$

2.1.23 Definizione. Diciamo che Ω è *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa γ in $\bar{\Omega}$ è omotopa (tra le curve chiuse) ad una curva costante (è chiaro che $\gamma_0(t) = \text{costante}$ è una curva chiusa). Questa che si è definita è una proprietà di Ω che si può interpretare dicendo che Ω non ha buchi - vedi la figura 2.3.

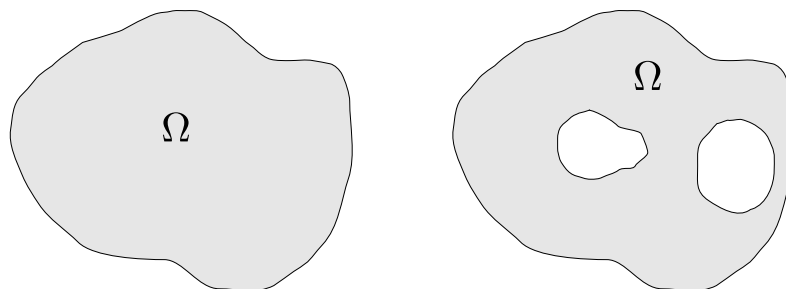


Figura 2.3: un aperto semplicemente connesso e uno non semplicemente connesso

Dato che è ovvio verificare che $\int_{\gamma_0} \mathbf{f} \cdot d\gamma = 0$ se γ_0 è una curva costante si deduce subito il seguente risultato

2.1.24 Teorema. Se Ω è semplicemente connesso allora ogni campo irrotazionale in Ω è conservativo in Ω .

2.1.25 Esempio. Supponiamo che Ω sia *stellato* rispetto a un suo punto, cioè che esista un \mathbf{x}_0 in Ω tale che per ogni altro punto \mathbf{x} di Ω il segmento tra \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} sia completamente contenuto in Ω (da \mathbf{x}_0 si “vedono” tutti i punti di Ω). Allora Ω è semplicemente connesso dato che presa una qualunque curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ si può definire

$$H(t, s) := s\gamma(t) + (1 - s)\mathbf{x}_0$$

che è un'omotopia tra γ e la curva costante $\gamma_0(t) = \mathbf{x}_0$.

In questo modo si può vedere che $\Omega = \mathbb{R}^N$ oppure $\Omega = B(\mathbf{x}_0, R)$ sono semplicemente connessi.

Viceversa l'esempio considerato in precedenza mostra che $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ non è semplicemente connesso in quanto si è trovato un campo irrotazionale in \mathbb{R}^2 che non è conservativo.