Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

Lezione 11, 26 maggio 2011

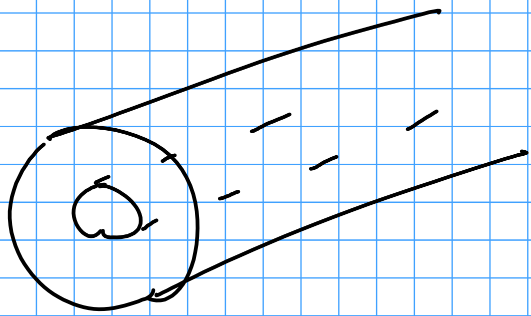
Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

Funzione armonica: u tale che $\Delta u = 0$, dove

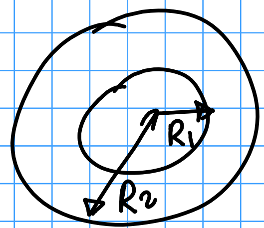
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (N=2)$$

ESEMPIO pratico

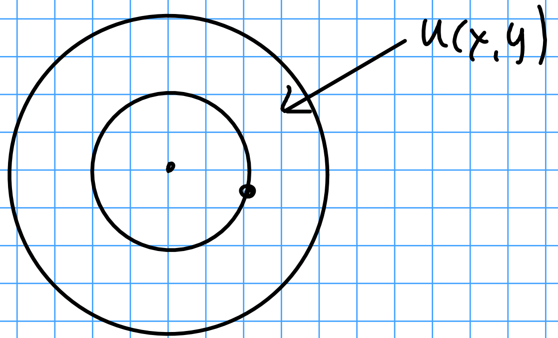
considero un TUBO caratterizzato da un raggio interno R_1 e un raggio esterno $R_2 > R_1$



Dentro il tubo passa un liquido a temperatura T_1, mentre all'esterno c'è una temperatura T_2 (idea $T_1 > T_2$).



SITUAZIONE STAZIONARIA.



Se chiamo $u(x,y)$ la temperatura nel tubo, questa u deve verificare l'eq. di Laplace + cond.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,y) = T_1 \quad \text{se} \quad \|(x,y)\| = R_1 \\ u(x,y) = T_2 \quad \text{se} \quad \|(x,y)\| = R_2 \end{cases}$$

(il centro del tubo è l'origine)

Avevamo visto che la funzione $\ln(x^2+y^2) = \mathrm{Re}(\ln(z))$
è armonica su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. (2 " $\ln(\sqrt{x^2+y^2})$)
Allora si possono cercare A e B in modo che

$$u(x,y) = \frac{A}{2} \ln(x^2+y^2) + B \quad \text{(che è ancora armonica)}$$

verifichi le condizioni al bordo. Si ottiene

$$\begin{cases} A \ln(R_1) + B = T_1 \\ A \ln(R_2) + B = T_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A \ln(R_1/R_2) = T_1 - T_2 \iff \boxed{A = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}}$$

$$B = T_2 - \frac{(T_2 - T_1)\ln(R_2)}{\ln(R_2/R_1)}$$

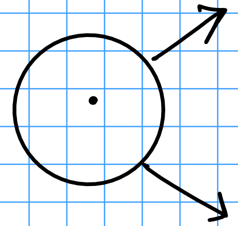
$\Rightarrow$ ho trovato la soluzione!!

Se conosco tale $u \Rightarrow \nabla u \times c =$ "flusso di calore"/superficie
dove c è una costante dipendente dal materiale di cui
fatto il tubo. Ne segue che, se fisso un pezzo di tubo
lungo L, il flusso di calore che esce dal pezzo di tubo
vale

$$2\pi R_2 \cdot L \cdot \nabla u(\underset{\uparrow}{\text{—}}) \cdot (\text{NORMALE ALLA SUPERFICIE})$$

punti sulla circonf esterna

Ma $\nabla u(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y), \frac{\partial}{\partial y} u(x,y)\right) = \frac{A}{x^2+y^2}(x,y)$



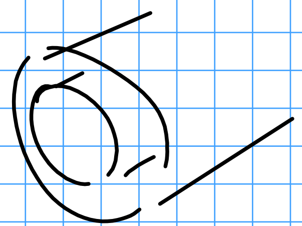
$\Rightarrow$ flusso $= 2\pi R_2 \cdot L \cdot |\nabla u(x,y)| =$

$2\pi \cancel{R_2} \frac{A}{\cancel{R_2}} \cdot L = \boxed{2\pi \cdot L \frac{(T_2 - T_1)}{\ln(R_2/R_1)}}$

Se voglio sapere quanto calore si perde in un tempo t.

basta moltiplicare per t il numero sopra

LA STESSA EQUAZIONE DESCRIVE IL POTENZIALE ELETTRICO DI UN "CONDENSATORE" CILINDRICO CON POTENZIALI V_1 / V_2 sulle due ARMATURE (∇u = CAMPO ELETTRICO)



Altri risultati teorici. Avevamo detto che dato un dominio regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (MA SI FA ANCHE IN $\mathbb{R}^n$) e una funzione "regolare" φ, definita su $\partial\Omega$, esiste unica una funzione u armonica in Ω con

$u(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$ (PROBLEMA DI DIRICHLET)

VEDIAMO UNA ESPRESSIONE ESPLICITA NEL CASO $(N=2)$

$\Omega = B = B(0,R) = \{(x,y) : x^2+y^2 < R^2\}$

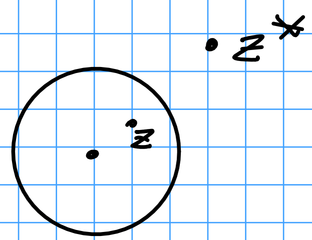
$(\partial\Omega = S = \{(x,y) : x^2+y^2 = R^2\}$

(lo si deduce dalle formule trovate per le funzioni olomorfe.

VIENE ASSEGNATA $\varphi : S \to \mathbb{R}$ (continua)

- Supponiamo di avere una $f : B \to \mathbb{C}$, olomorfa in B. Sia z un punto dentro B $(|z|<R)$

Chiamiamo $z^* = \dfrac{R^2}{\bar{z}} = \dfrac{R^2}{|z|^2} z$



(se $z \in S$ $z^* = z$)

(quindi $\underline{z^* \bar{z} = R^2}$)

Dato che z^* è fuori da $\overline{B}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{f(w)}{w-z^*}$ è olomorfa in B.

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(w)}{w-z^*}\,dw = 0.$$

Inoltre, per la formula di di Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(w)}{w-z}$$

QUINDI

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_S f(w)\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z^*}\right)dw =$$

$$\underset{\parallel}{f(z)} \quad (u(x,y)+i(v(x,y)))$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S f(w)\left(\frac{1}{w-z} - \frac{\bar{z}}{w\bar{z}-R^2}\right)dw =$$

$w\bar{w} = |w|^2 = R^2$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S f(w)\left(\frac{1}{w-z} - \frac{\bar{z}}{w\bar{z}-w\bar{w}}\right)dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S f(w)\left(\frac{\cancel{w\bar{z}} - w\bar{w} - \cancel{\bar{z}w} + z\bar{z}}{(w-z)\,w\,(\bar{z}-\bar{w})}\right)dw =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(w)}{w}\,\frac{-R^2+|z|^2}{-|w-z|^2}\,dw =$$

$w = Re^{i\theta}$ $0 \le \theta \le 2\pi$

$dw = iRe^{i\theta}d\theta$

$$\frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{\cancel{Re^{i\theta}}}\,\cancel{iRe^{i\theta}}\,\frac{|z|^2-R^2}{|Re^{i\theta}-z|^2}\,d\theta =$$

$$\frac{x^2+y^2-R^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(R\cos(\theta), R\sin(\theta)) + i\,v(R\cos(\theta), R\sin(\theta))}{(R\cos(\theta)-x)^2+(R\sin(\theta)-y)^2}\,d\theta$$

PRENDO SOLO LA PARTE REALE $\Rightarrow$

$$\boxed{u(x,y) = \frac{x^2+y^2-R^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(R\cos(\theta), R\sin(\theta))}{(R\cos(\theta)-x)^2+(R\sin(\theta)-y)^2}\,d\theta \quad \otimes}$$

$\left(\begin{array}{l} f(z) = u(x,y)+i\,v(x,y) \\ z = x+iy \end{array}\right)$

DUNQUE se f è olomorfa, $f = u + iv$

e se $u(x,y) = \varphi(x,y)$ su S $\Rightarrow$ la formula $(*)$

Analogamente si può vedere che vale una formula analoga per v.

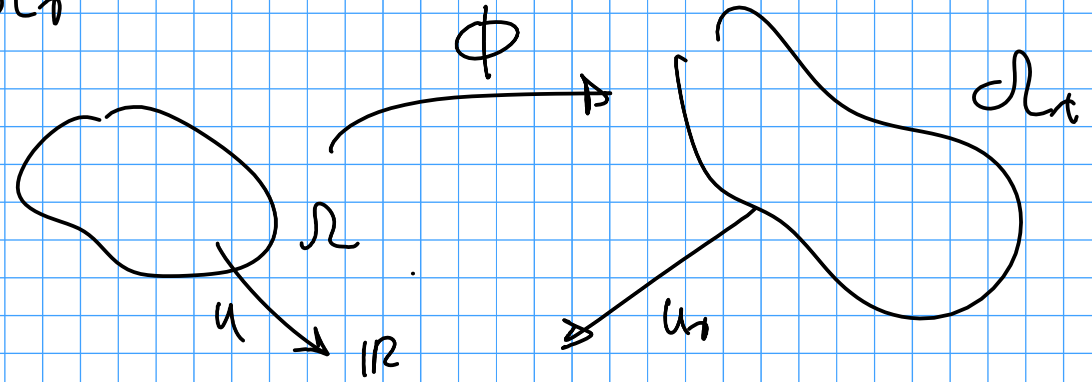
Ne segue che se u è armonica in $B \Rightarrow u$ verifica $(*)$

SI PUÒ DIM. CHE LA u definita da $(*)$ è armonica (SI VEDE ---) e che $u = \varphi$ su S!

|| IN DEFINITIVA $(*)$ CI DICE CHI È LA SOL. DI $\Delta u = 0$ su B con $u = \varphi$ su S. ||

DA QUANTO DETTO FINORA SEGUE CHE

SE u_1 è armonica su Ω_1, se conosco una $\Phi : \Omega \to \Omega_1$ olomorfa, che manda $\partial\Omega$ in $\partial\Omega_1$



$\Rightarrow$ posso costruire una funzione armonica u su Ω tale che $u(x) = u_1(\Phi(x))$

DUNQUE SE PRENDO Ω_1 "semplice" (un semipiano / un disco) e un Ω "complicato" può essere utile costruire delle funzioni olomorfe da $\Omega \to \Omega_1$ / o da $\Omega_1 \to \Omega$ e poi invertirle)

C'E' UNA COSTRUZIONE INTERESSANTE NEL CASO

$\Omega_1 = \mathbb{C}^+ = \{ z \in \mathbb{C} , \operatorname{Re} z > 0 \}$

Ω = Poligono. Vediamo questa costruzione

Prendiamo $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$

Prendiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ numeri in $]0,2[$.

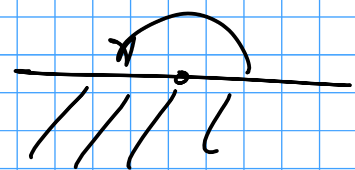
Prendiamo $\gamma \in \mathbb{C}$.

Consideriamo $f(z) = \gamma (z - x_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z - x_n)^{\alpha_n - 1}$

$$= \frac{\gamma}{(z-x_1)^{1-\alpha_1} \cdots (z-x_n)^{1-\alpha_n}}$$

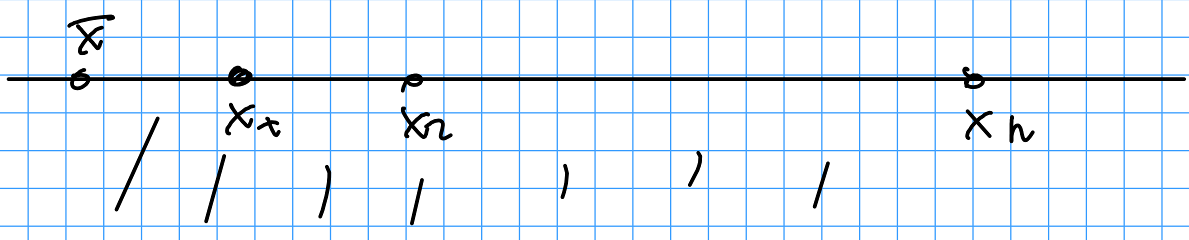
$(-1 < \alpha_j - 1 < 1)$. Questo f è ben definito in $\mathbb{C}^+$, perché le potenze di esponente $\alpha_j - 1$, sono definite da

$$w^{\alpha_j - 1} = e^{(\alpha_j - 1)\ln(w)} = e^{(\alpha_j-1)(\ln|w| + i\,\mathrm{Arg}(w))} = |w|^{(\alpha_j-1)}\, e^{i(\alpha_j-1)\mathrm{Arg}(w)}$$



dove $\mathrm{Arg}(w) \in \,]0,\pi[$ dato di $w \in \mathbb{C}^+$

$\mathbb{C}^+$



$$f(z) = \gamma (z-x_1)^{\alpha_1 - 1} \cdots (z-x_n)^{\alpha_n - 1}$$

$\Rightarrow$ Posso introdurre

$$\boxed{F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta}$$

(avendo scelto z_0 in $\mathbb{C}^+$). (ricordo che $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$

è l'integrale su una qualunque curva che congiunge z_0 a z.

COSA FA QUESTA F (per ora non è definita su $\mathbb{R}$

- Dato che $\alpha_j - 1 > 1$ riesco a definire, per prolungamento

F anche nei punti reali: (IL PROBLEMA È IN $x_1 \dots x_n$

MA MI TROVO DI FRONTE A UN INT. IMPROPRIO CONVERGENTE)

- CHIAMO $P_1 = F(x_1) \ \dots \ P_n = F(x_n)$

- POSSO ANCHE SUPPORRE CHE $z_0 \in \mathbb{R}$ e

$z_0 = \overline{x} < x_1 < \dots \ x_N$ e che

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta$$

dove γ_z è il segmento da $\overline{x}$ a z

(tutto questo a meno di una costante)

- se $x \in \,]x_j$ e $x_{j+1}[\;\Rightarrow$

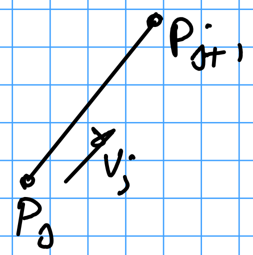
$F(x)$ descrive il segmento da P_j e P_{j+1}

INFATTI

$$F(x) = F(x_j) + \int_{x_j}^{x} f(\xi)\,d\xi = P_j + \int_{x_j}^{x} f(\xi)\,d\xi =$$

$$P_j + \gamma \int_{x_j}^{x} \underbrace{(x_1-\xi)^{\alpha_1-1}\cdots(x_j-\xi)^{\alpha_j-1}}_{\text{NEGATIVI}}\,\underbrace{(x_{j+1}-\xi)^{\alpha_{j+1}-1}\cdots(x_n-\xi)^{\alpha_n-1}}_{\text{POSITIVI}}\,d\xi$$

$$= P_j + \underbrace{\gamma\, \underbrace{e^{i(\alpha_1-1)\pi}\cdots e^{i(\alpha_j-1)\pi}}_{\text{contributi dei pezzi negativi}}}_{\text{NON DIPENDE DA X}} \underbrace{\int_{x_j}^{x} |x_1-\xi|^{\alpha_1-1}\cdots|x_n-\xi|^{\alpha_n-1}\,d\xi}_{\text{NUMERO REALE POSITIVO CHE VARIA CON X}}$$

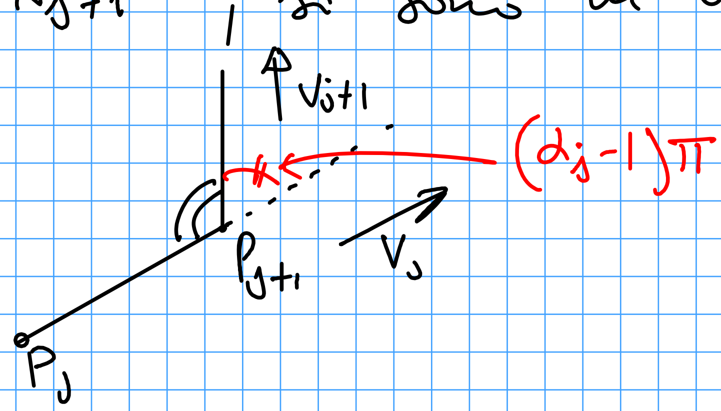


quando x varia da x_j e x_{j+1}

$F(x)$ parte da P_j e si muove nella direzione del vettore

$$v_j = \gamma\, e^{i(\alpha_1-1)\pi}\cdots e^{i(\alpha_j-1)\pi}$$

- Con lo stesso ragionamento si vede che quando x passa x_{j+1}, si forma un angolo:

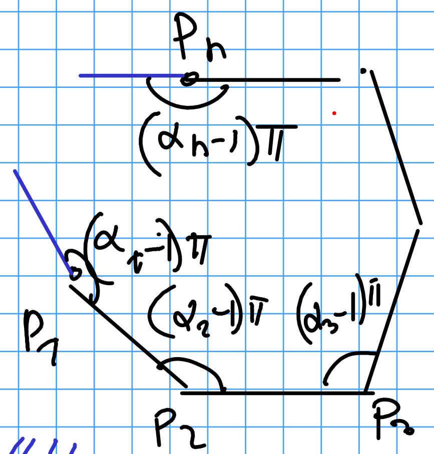


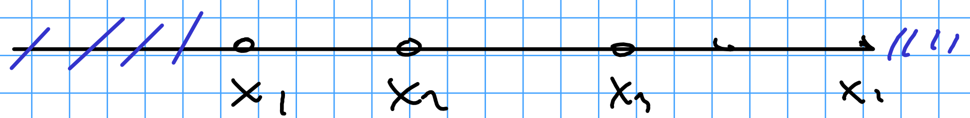
la direzione passa da V_j a V_{j+1}. Si vede che l'angolo tra i segmenti

$$[P_j \; P_{j+1}] \quad e \quad [P_j , P_{j+1}] \quad è$$

$$V_j = \gamma \, e^{i(\alpha_1 - 1)\pi} \cdots e^{i(\alpha_j - 1)\pi}$$

$$V_{j+1} = V_j \, e^{i(\alpha_{j+1})\pi}$$





- Si vede poi che anche gli integrali da $-\infty$ e x_1 e quello da x_n e $+\infty$ danno luogo a dei pezzi rettilinei, che formano due angoli: $(\alpha_1-1)\pi$ in P_1 e $(\alpha_n-1)\pi$ in P_n

Ci sono due casi: se

$$\left[(\alpha_1-1)+\dots(\alpha_n-1)\right]\pi < (n-1)\pi$$

$\Rightarrow$ esiste P_0 tale che

$$\int_{-\infty}^{x_1} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{x_n}^{+\infty} f(\zeta)\,d\zeta = P_0$$

e tutto il semipiano $\mathbb{C}^+$ viene mappato da F nel poligono di vertici $P_0 \dots P_n$

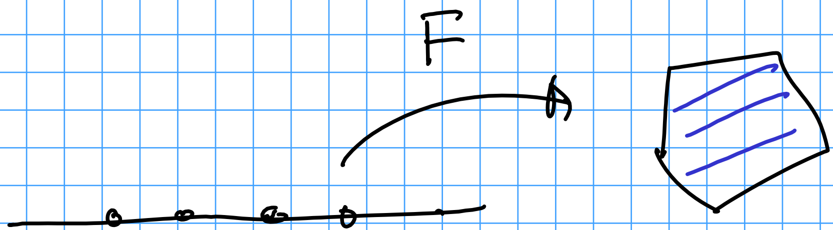
(e l'angolo in P_0 è $(n-1)\pi-$ [somma sopra]

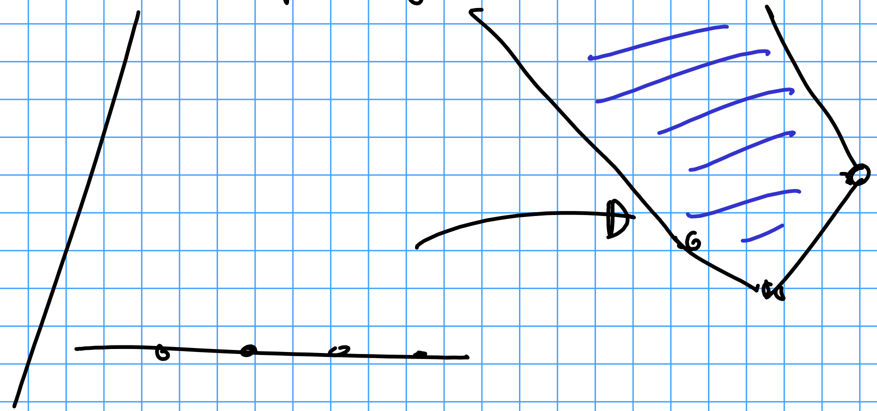
Se invece

$$\left[(\alpha_1-1)+\dots+(\alpha_n-1)\right]\pi \geq (n-1)\pi$$

le due semirette da P_1 e da P_n divergono

(sono parallele nel caso dell'uguaglianza) e $\mathbb{C}^+$ viene mandato in un poligono illimitato

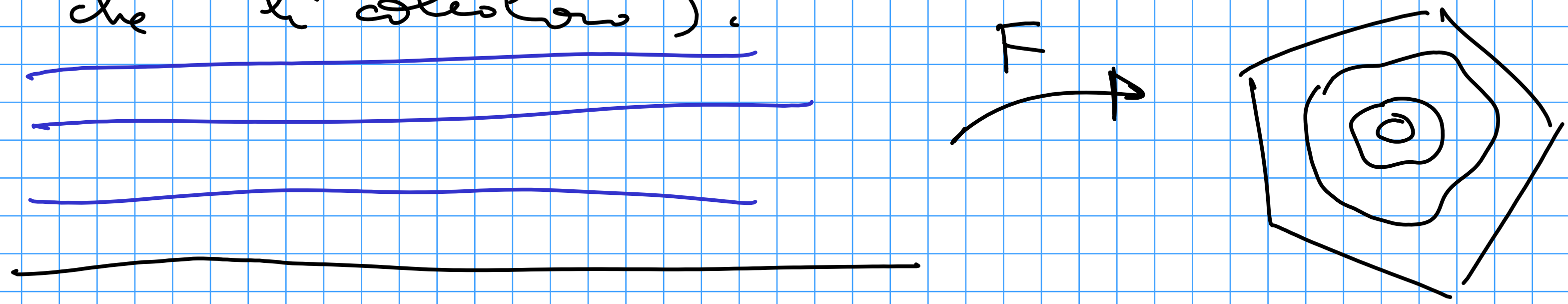




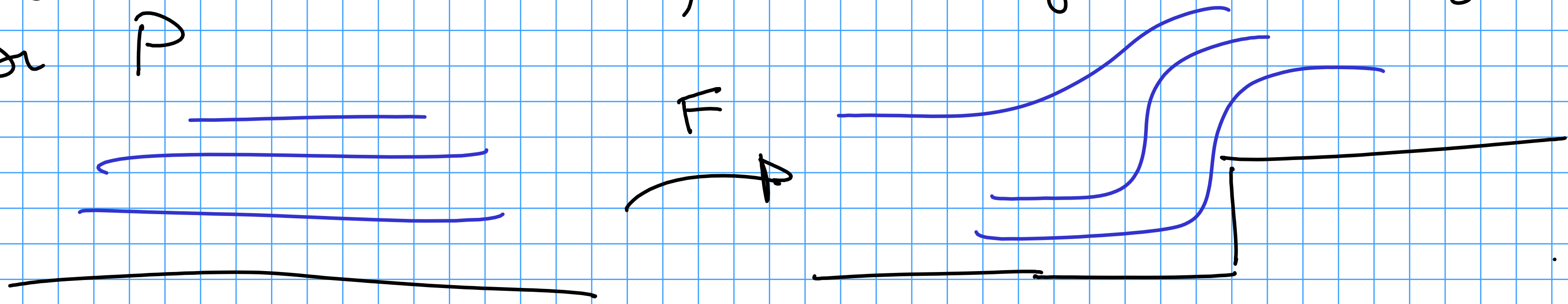
(F è olomorfo in $\mathbb{C}^+$)

Questa costruzione (Schwartz-Christoffel) può servire a trovare funzioni armoniche in un poligono P (cercando $x_1 \dots x_n$, $\alpha_1 \dots \alpha_N$ in modo da avere P come immagine della costruzione sopra)

$\alpha_1 \dots \alpha_n$ sono ovvi — $x_1\, x_n$ MOLTO MENO (in generale non si trovano analiticamente, ma ci sono dei software che li calcolano).



Con questa F è facile allora trasformare la funzione armonica in $\mathbb{C}^+$ ($u(x,y) = ay+b$) con dato costante su $\mathbb{R}$) in una funzione armonica su P



ESAME 15/7 alle 9.00 AULA A14.

(un breve scritto con esercizi mediante i residui e una domanda "generale" di teoria)