Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

Lezione 10, 19 maggio 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

Le funzioni olomorfe hanno parte reale e parte immaginaria ARMONICHE

Def. IN GENERALE se Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è derivabile 2 volte (rispetto a ogni sua variabile $x_1, \dots x_N$) si dice che u è ARMONICA se

$$\boxed{\left(\Delta u =\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = 0} \qquad (L)$$

Δu è il "Laplaciano di u"

$\Delta u = 0$ è detta "equazione di Laplace"

(u armonica in Ω $\Leftrightarrow$ verifica l'eq. di Laplace in Ω)

Più in generale si può introdurre l'eq. "di Poisson"

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \qquad (P)$$

dove f è una funzione assegnata da $\Omega \to \mathbb{R}$

OSS. • L'eq. (L) è lineare (se u_1 e u_2 sono soluzioni e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ è soluzione)

- L'eq. (P) è "affine": se u è sol di (P) e se u_0 è sol di (L) $\Rightarrow$ $u + u_0$ è sol. di (P).

SONO EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI (se $N>1$)

- se $N=1$ l'eq. (L) diventa $u''=0$, da cui $u(x) = ax+b$ con $a, b \in \mathbb{R}$: IN UNA VARIABILE LE FUNZIONI ARMONICHE SONO TUTTE E SOLE LE RETTE

- IN GENERALE ($N>1$) le funzioni LINEARI, cioè le funzioni $u(x) = \vec{A} \cdot \vec{x} + b = a_1 x_1 + \dots + a_N x_N + b$ sono armoniche (dato che ogni $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$ $j = 1 \dots N$)

ma questa condizione non è più necessaria.
Per esempio se A è una matrice $N \times N$ simmetrica posso considerare la "forma quadratica"

$$u(\vec{x}) = \vec{x}^{\,t} A \vec{x} = (x_1 \dots x_N) \begin{pmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

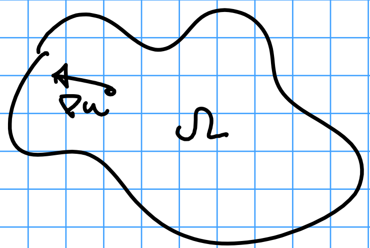
$$= \sum_{ij} x_i x_j a_{ij}$$

Tale u è armonica $\Longleftrightarrow$ TRACCIA$(A) = 0$ (si vede facendo i calcoli)

COMMENTO Le funzioni armoniche descrivono molti fenomeni fisici. Per esempio

- IL POTENZIALE ELETTRICO / GRAVITAZIONALE "u" IN UNA REGIONE Ω PRIVA DI CARICHE / MASSE – con delle cariche / masse alla frontiera $\partial\Omega$. In questo caso

∇u è il campo elettrico / gravitazionale



- Il campo di velocità (u_1, u_2, u_3) di un fluido INCOMPRESSIBILE e IRROTAZIONALE STAZIONARIO È descritto come $(u_1, u_2, u_3) = \nabla\varphi$ dove φ è armonica

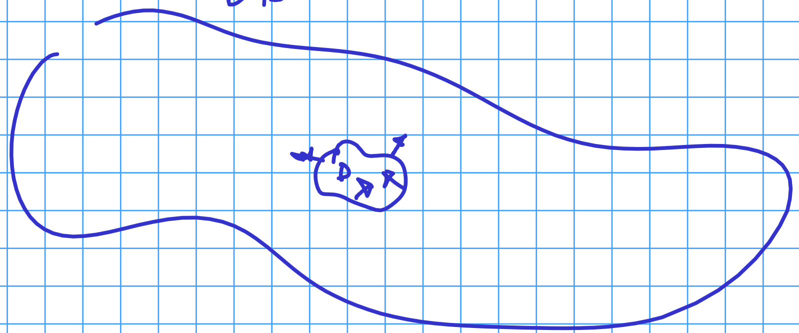
NOTA • il fatto che il campo sia gradiente di un potenziale dice che il campo è irrotazionale

- L'eq di Laplace dice che la "divergenza" del campo fa zero

(se $U = (u_1 \ldots u_N)$ è un campo $\Rightarrow \operatorname{div} U = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial u_N}{\partial x_N}$)

Questa proprietà esprime il fatto che il fluido è incompressibile; infatti tale equazione equivale a

$$\int_{\partial D} \vec{U} \cdot \vec{\nu} = 0 \qquad \text{per ogni } D \subset \Omega$$



[Teorema della divergenza: $\int_D \operatorname{div} U = \int_{\partial D} \vec{U} \cdot \vec{\nu}$]

· <u>Altro esempio</u> Se Ω è una regione di $\mathbb{R}^N$ $(N=3)$

se $u(x_1, \dots, x_N, t)$ $t \in \mathbb{R}$ (t è un tempo)

indico la temperatura nel punto $(x_1 \dots x_N)$ all'istante t

$\Rightarrow$ u verifica l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \Delta u \qquad \forall (x_1 \dots x_N) \in \Omega, \ \forall t$$

con c un'opportuna costante "termica"
(tenendo conto solo della CONDUZIONE del calore)

Se cerco "configurazioni stabili nel tempo" (pongo

$\frac{\partial u}{\partial t} = 0$) trovo delle funzioni armoniche.

<u>Teorema</u> Sia $N=2$. Valgono questi due fatti:

(1) Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ (vedo Ω dentro $\mathbb{C}$) è olomorfa

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ sono armoniche.

(2) Viceversa se Ω è semplicemente connesso, se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica $\Rightarrow$ esiste unica una $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ è olomorfa ($\Rightarrow$ v è armonica). Tale v si dice "l'armonica coniugata" di v.

<u>Dim.</u> (1) Sia $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$. Se f è olomorfa, allora u e v verificano le condizioni (CR)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

da cui $\displaystyle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

cioè $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ $(\Delta u = 0)$. Stesso discorso per v.

(2) Viceversa supponiamo che $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Consideriamo il campo $\left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Questo campo è irrotazionale dato che $\Delta u = 0$. Se Ω è semplicemente connesso tale campo ammette un potenziale, cioè una funzione $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla v = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \iff$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Queste sono le condizioni di (C.R.) per $f = u + iv$, che quindi è olomorfa.

POSSIAMO ORA RICAVARE VARIE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI ARMONICHE (IN 2 VARIABILI) A PARTIRE DA QUANTO TROVATO PER LE FUNZIONI OLOMORFE. IN REALTÀ TALI PROPRIETÀ VALGONO ANCHE PER $N > 2$.

<u>Teorema</u> (proprietà della media). Sia u armonica in Ω.

Se $R > 0$, $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, allora posto

$B_R = B(P_0, R) := \{ P : |P - P_0| \leq R \}$ (cerchio di centro P_0 e raggio R)

$S_R = S(P_0, R) := \{ P : |P - P| = R \}$ (circonferenza " " " " ")

si ha (R piccolo in modo che $B_R \subset \Omega$)

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{S_R} u(x,y)\, d\sigma = u(P_0) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R} u(x,y)\, dx\, dy$$

MEDIA su S_R / B_R

<u>Dim.</u> Posso trovare v tale che $f = u + iv$ sia olomorfa.
Scriviamo la formula di Cauchy:

$$f(P_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(z)}{z - P_0}\, dz$$

Posso descrivere $\partial B_R = S_R$ mediante $\gamma(t) = P_0 + R e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$
e quindi $\gamma'(R) = iR e^{it}$, da cui

$$f(P_0) = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(P_0 + Re^{it})}{\cancel{R}\cancel{e^{it}}} \cdot \cancel{i}\cancel{R}\cancel{e^{it}}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(P_0 + Re^{it})\, dt \quad . \quad \Longleftrightarrow$$

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} R\,u(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))\,dt$$

$$v(P_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} R\,v(x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))\,dt$$

VISTI COME INTEGRALI REALI HO TROVATO

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} u \quad , \quad v(P_0) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} v$$

$$\left(\int_{S_R} u = \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \quad \text{dove } \gamma(t) = R\cos t, R\sin(t) \quad (|\gamma'| = R) \right)$$

HO TROVATO LA FORMULA SULLE CIRCONFERENZE S_R

L'altra formula (quella sui cerchi) segue dalle proprietà degli integrali:

$$\int_{B_R} u(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R \left(\int_{S_\rho} u \right) d\rho \quad \text{(le prendiamo per buone)}$$

$$\left(\text{per esempio} \quad \text{Area}(B_R) = \int_{B_R} 1\,dx\,dy = \int_0^R 2\pi\rho\,d\rho = \frac{\cancel{2}\pi R^2}{\cancel{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{B_R} u(x,y)\,dx\,dy = \int_0^R u(P_0)\,2\pi\rho\,d\rho = u(P_0)\,\pi R^2 \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{\pi R^2}\int_{B_R} u(x,y)\,dx\,dy = u(P_0)$$

PRINCIPIO DEL MASSIMO / MINIMO

CONSEGUENZA Se u è armonica in Ω e continua su $\overline{\Omega}$ (Ω aperto limitato). Allora i punti di max e di min per u su $\overline{\Omega}$ si trovano su $\partial\Omega$, cioè

$$\min_{\partial\Omega} u \le u(x,y) \le \max_{\partial\Omega} u \quad \forall (x,y)\in\Omega$$

Anzi se c'è un punto $P_0=(x_0,y_0)$ dentro Ω in cui

$$u(P_0) = \max_{\partial\Omega} u \;/\; u(P_0) = \min_{\partial\Omega} u \implies u \text{ è costante}$$

Dim. IDEA. Ammettiamo che ci sia un punto di max P_0 dentro Ω. Ammettiamo che sia un max stretto, cioè che $u(P_0) > u(x,y)$ $\forall x,y \in\Omega$. Allora presa una circonferenza S_R con $R>0 \implies$

$$u(x,y) < u(x_0,y_0) \quad \forall x,y \in S_R$$

Per la continuità di u e dato che S_R è un insieme chiuso e limitato deve esistere $(x_1,y_1)\in S_R$ di max su S_R. $u(x,y) \le u(x_1,y_1) < u(x_0,y_0)$ $\forall (x,y)\in S_R$. Ma allora

$$\frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} u(x,y) \le \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} u(x_1,y_1) = u(x_1,y_1) < u(x_0,y_0)$$

HO CONTRADDETTO LA PROPRIETÀ DELLA MEDIA.

<u>Teorema</u> Dato Ω aperto con bordo <u>regolare</u> e dato $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ "abbastanza buona" (continua basta)

$\Rightarrow \exists$ una e una sola u armonica in Ω, continua su $\bar{\Omega}$ tale che $u(P) = \varphi(P)$ $\forall P \in \partial\Omega$.

(SENZA DIM.) OSSERVIAMO CHE SE u esiste è naturale che sia unica dato che, se definisco v l'armonica coniugata e $f = u + iv$, dove vale

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

DIPENDE SOLO DAI VALORI AL BORDO

<u>ESEMPI</u> • se $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$, cioè

$f(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Longrightarrow \frac{x}{x^2+y^2}$ e $\frac{y}{x^2+y}$ sono armoniche in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$f(z) = \ln(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\,\mathrm{Arg}(x,y)$$

è olomorfo su $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ($\mathbb{R}^-$ = reali negativi)

$\Rightarrow$ $\ln(x^2+y^2)$ – $\mathrm{Arg}(x,y)$ sono armoniche $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^-$.

Ora, la seconda "non si chiude", mentre la prima

cioè $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ è armonica su

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Tale u, a meno di multipli, è l'unica

armonica RADIALE – corrisponde al campo elettrico

di un filo (illimitato!)