Analisi Complessa e Funzioni Armoniche
in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

Lezione 9 , 12 maggio 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

ULTERIORE GENERALIZZAZIONE DEL PROCEDIMENTO VISTO PRECEDENTEMENTE.

P e Q polinomi. $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 1$

$\omega \neq 0$. Ammettiamo che Q abbia radici reali.

Indichiamo con

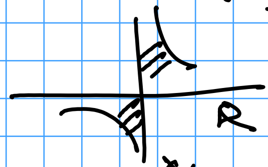
$x_1 \dots x_h$ le radici reali di Q

$z_1 \dots z_k$ le radici non reali con $\operatorname{Im}(z_j) > 0$

$\bar{z}_1 \dots \bar{z}_k$ " " " " " $\operatorname{Im} < 0$

Poniamo $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} e^{i\omega z}$ e supponiamo che $x_1 \dots x_h$ siano (al più) poli semplici per f.

Vorrei calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\omega x}\, dx$ — in realtà questo integrale non esiste nel senso fatto ad analisi, perché nelle singolarità x_j, $j = 1 \dots h$ la funzione $f(x) \simeq \dfrac{\text{cost}}{x - x_j}$



x_j

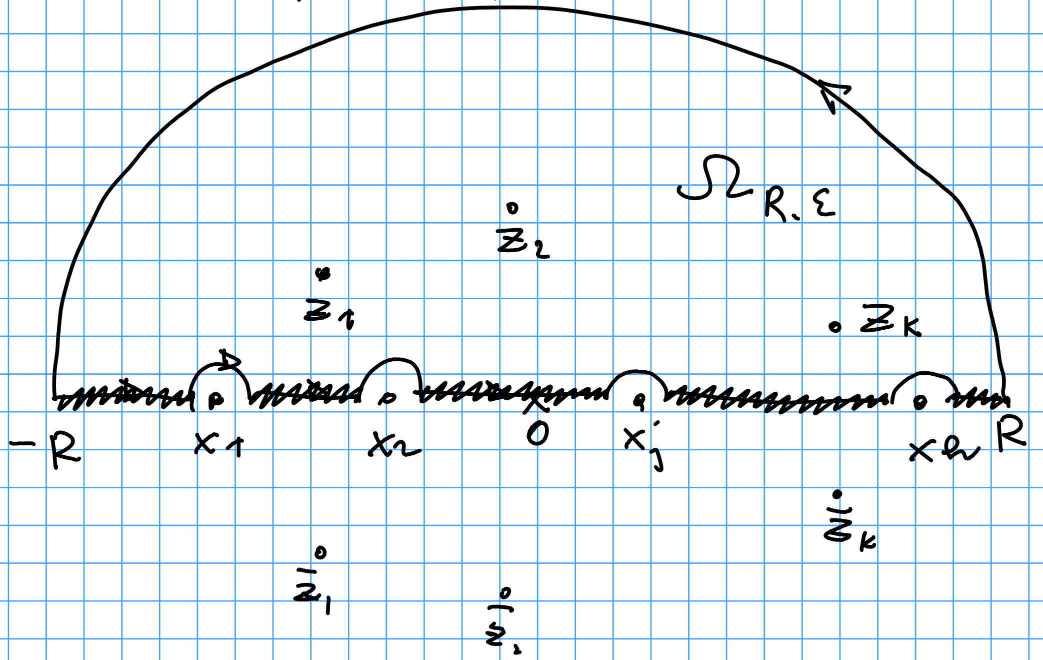
e le due aree sono ∞

Per esempio $\frac{1}{x}$ NON È INTEGRABILE VICINO A ZERO

perché $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty$ e $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = -\infty$.

BISOGNA STARE ATTENTI — Prendiamo $R>0$ (grande)

e $\varepsilon>0$ (PICCOLO). Costruiamo $\Omega_{R,\varepsilon}$ come nel disegno



MEZZO DISCO DI RAGGIO $R>0$ PRIVATO DEI MEZZI DISCHI DI CENTRI x_j E RAGGIO $\varepsilon>0$

$z_j \in \Omega_{R,\varepsilon}$ (R grande)

$x_j \notin \Omega_{R,\varepsilon}$

APPLICHIAMO IL TEOREMA DEI RESIDUI A $\Omega_{R,\varepsilon}$

$$I = \int_{\partial\Omega_{R,\varepsilon}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

FATTO DI VARI PEZZI:

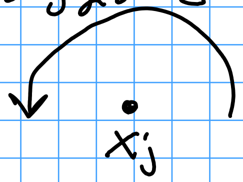
$$= \underbrace{\int \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\omega x}\,dx}_{I_{R,\varepsilon}} - \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_{j,\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz$$

CAMBIO DI VERSO

$I_{R,\varepsilon} = [-R, R] \setminus \left([x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon] \cup \dots \cup [x_h-\varepsilon, x_h+\varepsilon]\right)$

$\gamma_{j,\varepsilon}$ = semicirconferenza di centro x_j e raggio ε:

$$\gamma_{j,\varepsilon}(t) = x_j + \varepsilon e^{it} \qquad 0 \le t \le \pi$$



$$\gamma_R(t) = R e^{it} \qquad 0 \le t \le \pi$$

SE MANDO $R \to \infty$ VEDO (~ - -) CHE $\int_{\gamma_R} f(z)dz$ TENDE A ZERO (COME NELL'ESEMPIO DELL'ALTRA VOLTA)

se $\omega > 0$

$$\Rightarrow \int_{I_\varepsilon} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\omega x}\, dx = \sum_{j=1}^{h} \int_{\gamma_{j,\varepsilon}} f(z)dz + 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j)$$

con $I_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus [x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon] \cup \dots \cup [x_h-\varepsilon, x_h+\varepsilon]$

Si vede che, quando $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{\gamma_{j,\varepsilon}} f(z)dz \to \pi i\, Res(f, x_j)$$

(AVENDO SUPPOSTO x_j POLO SEMPLICE)

DUNQUE

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{I_\varepsilon}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\omega x}\,dx = \pi i\sum_{j=1}^{h}\mathrm{Res}(f, x_j) + 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\mathrm{Res}(f, z_j)$$

LO POSSO CHIAMARE INTEGRALE "NEL SENSO DEL VALORE PRINCIPALE"

IN CUI SI ESCLUDE UN INTORNO SIMMETRICO di raggio ε DI TUTTE LE SINGOLARITÀ e si manda $\varepsilon\to 0$.

(lo indico con $(V.P)\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\omega x}\,dx$)

CON QUESTA NOZIONE $(V.P)\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,dx = 0$

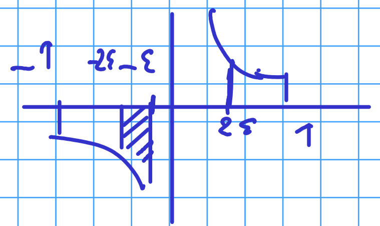
ANCHE SE NON ESISTONO $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\,dx$ e $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\,dx$

NOTA CHE SE ESCLUDESSI UN INTORNO ASIMMETRICO POTREBBE VENIRE UN RISULTATO DIVERSO: per esempio se faccio

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{[-1,1]\setminus[-\varepsilon,2\varepsilon]}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx+\int_{2\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[\ln|x|\Big]_{-1}^{-\varepsilon}+\Big[\ln|x|\Big]_{2\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(\ln|-\varepsilon|\ \ln|2\varepsilon|\big) =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \ln\left(\frac{\varepsilon}{2\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{1}{2} < 0$$



È UNA NOZIONE "INSTABILE"

ABBIAMO DIM. (almeno se $\omega > 0$)

TEOREMA P. Q POLINOMI $\omega \neq 0$

LE RADICI REALI DI Q, $x_1 \dots x_h$, sono tutte semplici

(AMMETTIAMO DI AVER SEMPLIFICATO P/Q ...)

SIANO $z_1 \dots z_K$ LE RADICI DI Q CON PARTE IMMAGINARIA >0.

ALLORA

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\omega x} \, dx = \pi i \sum_{j=1}^{h} Res(f, x_j) + 2\pi i \sum_{j=1}^{K} Res(f, z_j)$$

SE $\omega > 0$

(COSTRUZIONE SIMMETRICA LAVORANDO SOTTO L'ASSE REALE) →

$$= -\pi i \sum_{j=1}^{h} Res(f, x_j) - 2\pi i \sum_{j=1}^{K} Res(f, \bar{z}_j)$$

SE $\omega < 0$

OVVIAMENTE SE L'INTEGRALE ESISTE IN SENSO "TRADIZIONALE" POSSO TOGLIERE (V.P.)

ESEMPIO

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \qquad P(z)=1,\ \omega=1 \qquad Q(z)=z$$

c'è solo la radice $z=0$ SEMPLICE. NE SEGUE

$$(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = \pi i\, e^{iz}\Big|_{z=0} = \pi i$$

$$\Updownarrow$$

$$(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,dx = 0 \quad ; \quad (\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \pi$$

(dato che $\operatorname{Re} e^{ix} = \cos(x)$, $\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$)

MA NEL SECONDO INTEGRALE POSSO TOGLIERE (V.P) perché $\frac{\sin(x)}{x}$ si prolunga a una funzione continua in $x=0$ (che vale 1). QUINDI

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \pi} \quad \left(\text{e} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \text{ per parità} \right)$$

VICEVERSA $\frac{\cos(x)}{x}$ NON È INTEGRABILE IN "SENSO TRADIZIONALE"

(cioè non esiste l'integrale improprio vicino a zero)

PERÒ, ESSENDO $\frac{\cos(x)}{x}$ DISPARI $\Rightarrow (V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,dx = 0$

<u>NOTARE CHE</u> non è evidente che $\frac{\sin(x)}{x}$ sia integrabile all'infinito (si sa che <u>NON È</u> assolutamente integrabile $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx = +\infty$, mentre $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ esiste proprio in "virtù delle oscillazioni di $\sin(x)$".

QUESTA INTEGRABILITÀ SI DEDUCE dall'argomento fatto prima in cui si vede che $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$.

ALTRO ESEMPIO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x(x^2+4x+5)}\,dx = ??$$

NOTIAMO CHE L'INTEGRALE ESISTE DI SICURO PERCHÉ

- IN $x=0$ $\frac{\sin(2x)}{x} \to 2$; dunque l'integrando "è continuo"
- all'infinito l'integrando in modulo si maggiora con $\frac{c}{x^3}$,

PER CALCOLARLO USO

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x(x^2+4x+5)}\,dx = \boxed{\pi i\,\mathrm{Res}(f,0)+2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-2+i)}$$

dove $f(x)=\dfrac{e^{2ix}}{x(x^2+4x+5)}$ che ho tre poli $x_1=0$

$$z_{1,2}=-2\pm\sqrt{-1}=-2\pm i$$

$$\mathrm{Res}(f,0)=\left.\frac{e^{2iz}}{z^2+4z+5}\right|_{z=0}=\frac{1}{5}$$

$$\mathrm{Res}(f,-2+i)=\left.\frac{e^{2iz}}{z(z+2+i)}\right|_{z=-2+i}$$

(Ho scritto $z^2+4z+5=(z-z_1)(z-\bar{z}_1)$)

$$=\frac{e^{2i(-2+i)}}{(-2+i)\,2i}=\frac{e^{-2}\,e^{-4i}}{2i\,(-2+i)}=$$

$$\frac{e^{-2}\,e^{-4i}}{2i\cdot 5}(-2-i)= \qquad \left((-2+i)(-2-i)=5\right)$$

$$-\frac{e^{-2}\,e^{-4i}\,(2+i)}{10i}$$

DUNQUE

$$(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x(x^2+4x+5)}\,dx=\frac{\pi i}{5}-\frac{\pi}{5}e^{-2}\,e^{-4i}(2+i)$$

IN TERMINI REALI HO TROVATO DUE COSE

1) $$(V.P.)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x(x^2+4x+5)}\,dx=-\frac{\pi}{5}e^{-2}\,\mathrm{Re}\Big(\big(\cos(4)-i\sin(4)\big)(2+i)\Big)$$

$$=-\frac{\pi}{5}e^{-2}\big(2\cos(4)+\sin(4)\big)$$

2) $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{x(x^2+4x+5)}\,dx=\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{5}e^{-2}\big(\cos(4)-2\sin(4)\big)}$$

TUTTI CALCOLI CHE NON SI POSSONO FARE USANDO L'ANALISI I.