Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

Lezione 7, 5 maggio 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

Ricordiamo

Def (Residuo) $\Omega \subset \mathbb{R}$ aperto regolare

$z_0 \in \Omega$. $f : \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$

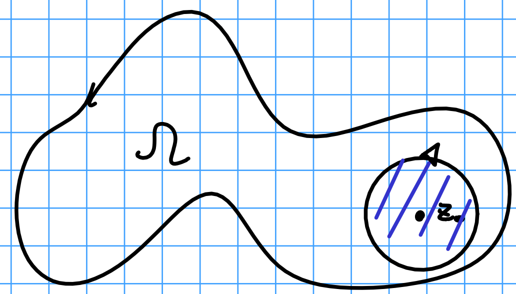
(z_0 è una "singolarità isolata per f"). Ricordo che si può "sviluppare" f in serie di Laurent vicino a z_0:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n} \quad (1) \quad \forall z \in \Omega,\ 0 < |z - z_0| < R$$

($R > 0$ tale che il disco di centro z_0 e raggio R è contenuto in Ω)

dove

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi} \quad (2)$$



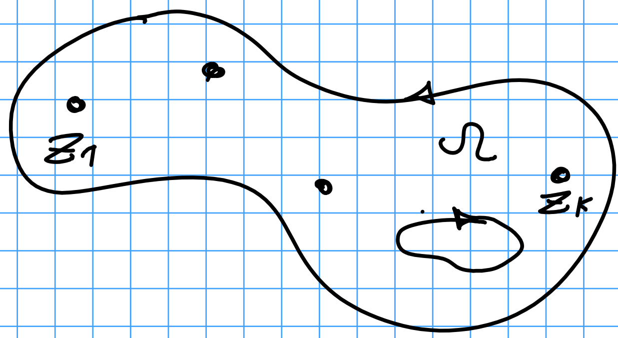
SI DEFINISCE **Residuo** di f in z_0 il termine a_{-1} (dove gli a_n sono quelli sopra) $\equiv \mathrm{Res}(f, z_0)$

OSS

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} f(\xi)\, d\xi \quad \left(\text{mettere } n = -1 \text{ in } (2) \right)$$

TEOREMA (I° teorema dei residui)

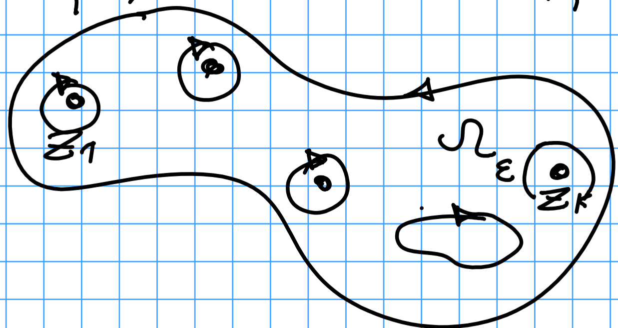
Ω aperto regolare LIMITATO in $\mathbb{C}$,
$z_1, z_2, \dots, z_K \in \Omega$



$f : \overline{\Omega} \setminus \{z_1, \dots, z_K\} \to \mathbb{C}$
olomorfa in $\Omega \setminus \{z_1, \dots, z_K\}$
e continua su $\partial\Omega$.

TESI
$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{j=1}^{K} \mathrm{Res}(f, z_j) =$$
$$2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, z_1) + \dots + \mathrm{Res}(f, z_K) \right)$$

DIM. Prendo $\varepsilon > 0$ e considero dei "dischetti" $B(z_j, \varepsilon)$ di centro z_j e raggio ε. Se ε è piccolo ognuno di questi $\overline{B(z_j, \varepsilon)} \subset \Omega$. Chiamo
$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \left[B(z_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(z_K, \varepsilon) \right]$$



f è olomorfo su Ω_ε e continua su $\overline{\Omega_\varepsilon}$ e

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S(z_1, \varepsilon) \cup \dots \cup S(z_k, \varepsilon)$$

dove $S(z_j, \varepsilon) = \{ z : |z - z_j| = \varepsilon \}$
(le circonferenze)

NOTA CHE se si parametrizzo $\partial\Omega_\varepsilon$, le $S(z_j, \varepsilon)$ ..

sono percorse in senso orario. Se applico il Teorema di Cauchy su Ω_ε $\Longrightarrow$

$$0 = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial\Omega} f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial B(z_j, \varepsilon)} f(\zeta)\, d\zeta$$

(il segno meno dipende dal cambio di verso) $\Longrightarrow$

$$\int_{\partial\Omega} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=1}^{k} \int_{\partial B(z_j, \varepsilon)} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{j=1}^{k} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_j)$$

#

DIVENTA IMPORTANTE IL CALCOLO EFFETTIVO DEI RESIDUI (ESPLORANDO IL COMPORTAMENTO DI $f(z)$ quando $z \sim z_0$)

ESEMPIO $\quad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ $\quad P, Q$ polinomi

$$Q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k} \qquad z_j \text{ DISTINTE}$$

m_j INTERO ≥ 1

$P(z_j) \neq 0$ (se no facciamo la divisione tra polinomi)

SI SA (usando il metodo di Hermite) che

$$f(z) = \frac{A_{11}}{z - z_1} + \cdots + \frac{A_{1 m_1}}{(z - z_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{k,1}}{z - z_k} + \cdots + \frac{A_{k, m_k}}{(z - z_k)^{m_k}}$$

se mi metto vicino a $z = z_1$

$$f(z) = \underbrace{\frac{A_{11}}{z - z_1} + \cdots + \frac{A_{1 m_1}}{(z - z_1)^{m_1}}}_{f_1(z)} + \bar{f}(z)$$

OLOMORFA VICINO A z_1

SI PUÒ VEDERE (poi lo preciziamo) che $\bar{f}$ NON CONTRIBUISCE AL RESIDUO IN z_1 $\left(\mathrm{Res}(f, z_1) = \mathrm{Res}(f_1, z_1) \right)$

(se si vede la def. degli σ_n si capisce che l'aggiunta di un termine olomorfo non dà contributo)

DUNQUE I TERMINI CON INDICE <0 dello sviluppo di Laurent sono $A_{1,m_1}, \dots, A_{11}$

$\uparrow$

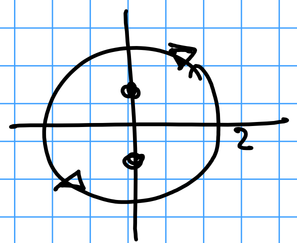
RESIDUO

Es. $$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{-i}{z-i} + \frac{i}{z+i}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Res}(f, i) = -\frac{i}{2} \qquad \mathrm{Res}(f, -i) = \frac{i}{2}$$

Allora, dal teorema dei residui, segue - per es -

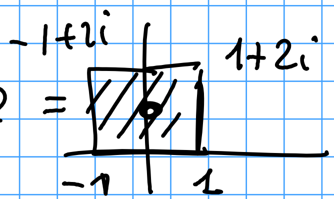
$$\int_{B(0,2)} \frac{1}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \left(-\frac{i}{2} + \frac{i}{2}\right) = 0$$



Se invece $$\int_{\partial Q} \frac{1}{z^2+1}\, dz = 2\pi i \left(\frac{-i}{2}\right) = \pi$$

$\uparrow$

$\mathrm{Res}(f, i)$

dove $Q =$ 

CERCHIAMO QUALCOSA DI PIÙ GENERALE

Def. f come prima, z_0 singolarità isolata.

Distinguo TRE CASI

(a) f è limitata in un disco $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$

Questo EQUIVALE A DIRE CHE $\forall n < 0 \quad a_n = 0$

$\iff$ f si estende a una funzione olomorfa su $B(z_0, \varepsilon)$

(si dice allora che z_0 è una singolarità eliminabile)

(b) f NON è limitata vicino a z_0 MA c'è SOLO UN NUMERO FINITO DI indici $j < 0$ con $a_j \neq 0$

In questo caso dico che z_0 è un POLO.

Chiamo ordine del polo z_0 il più grande intero positivo k tale che $a_{-k} \neq 0$.

(Nel caso di $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ le radici di Q sono poli di ordine pari alla molteplicità come radici di Q — sempre se $P(z_j) \neq 0$)

(c) Se non siamo né in (a) né in (b) si dice che z_0

è una singolarità essenziale — per esempio

$f(z) = e^{1/z}$ ho una sing. essenziale in $z=0$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{n!} z^{n} \qquad \left(\text{dato che } e^{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!} \right)$$

A NOI INTERESSANO I POLI

<u>TEOREMA</u> z_0 è un polo di ordine K per f se e solo se esiste una funzione olomorfa in $B(z_0, \varepsilon)$, $f_1(z)$ (anche in z_0!) tale che $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z-z_0)^K}$, $f_1(z_0) \neq 0$

(con $\varepsilon > 0$ opportuno) (chiamo f_1 PARTE ANALITICA DI f IN z_0)

Dim (la prossima volta)

<u>CONSEGUENZA</u>

Se z_0 è un polo di ordine K allora

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{f_1^{(K-1)}(z_0)}{(K-1)!}$$

<u>DIM.</u>

So che $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{(z-z_0)^k}$

Dato che f_1 è OLOMORFA LA POSSO SVILUPPARE IN SERIE DI POTENZE:

$$f_1(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + \dots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^j$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-z_0)^k} = \frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \frac{a_1}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z-z_0)^{j-k}$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) =$ termine di grado -1 in $\circ$ $= a_{k-1}$

(termine di ordine $k-1$ dello sviluppo di f_1)

Ma essendo f_1 OLOMORFA gli a_j sono i coeff. di Taylor!

$$a_j = \frac{f_1^{(j)}(z_0)}{j!} \Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = a_{k-1} = \boxed{\frac{f_1^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}}$$

nel caso di prima $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$

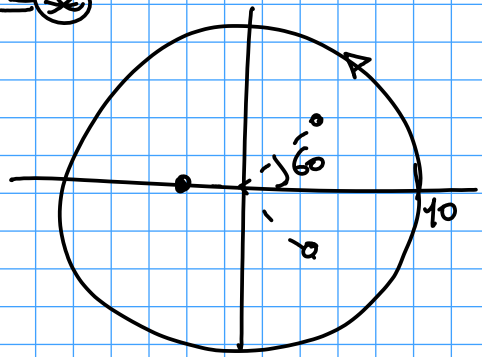
se un molto in $z_0 = i$ Ho $f(z) = \dfrac{f_1(z)}{z-i}$ con

$f_1(z) = \dfrac{1}{z+i} \Rightarrow \text{Res}(f, i) = f_1(i) = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$

NOTA: IL CASO DEI POLI SEMPLICI È IL PIÙ FAVOREVOLE

ESEMPIO

$$\int_{\partial B(0,10)} \frac{z}{z^3+8}\, dz = (*)$$



POLI: le radici cubiche di -8

$z_1 = -2, \quad z_{2,3} = 2\,\dfrac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$

$$(*) = 2\pi i \left(-2 + \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2} + \frac{1-\sqrt{3}\,i}{2} \right) = 2\pi i \,(1) = 2\pi i$$