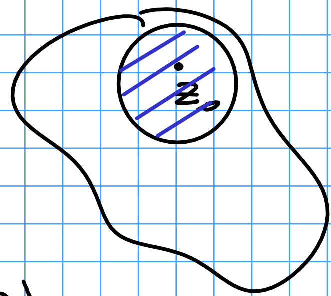
Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

Lezione 6, 28 aprile 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

$f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, preso $z_0 \in \Omega$



si può scrivere:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \forall z \in \overbrace{\text{Disco}(z_0, R)}^{D_R} \subset \Omega$$

dove gli a_n sono $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \, d\xi$

$\Rightarrow$ f ha derivate di ogni ordine in z_0

e f è "somma della sua serie di Taylor"

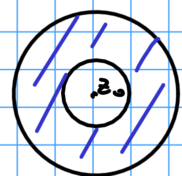
(VISTO LA VOLTA SCORSA).

Vediamo un risultato analogo quando "Ω contiene un anello".

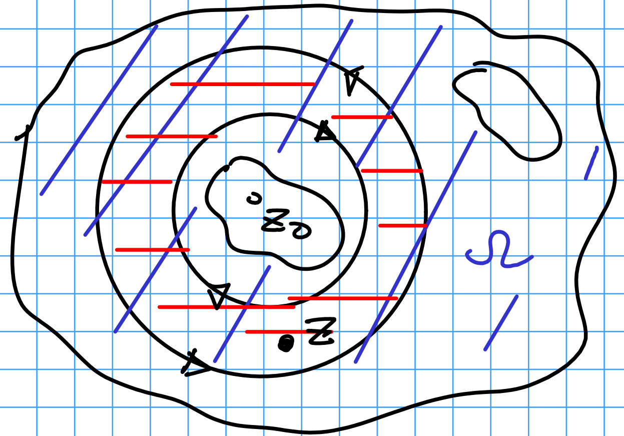
Dati $0 \le R_1 < R_2 \le +\infty$ poniamo

$$C(z_0, R_1, R_2) := \{ z : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$$

(corona circolare di raggi R_1 e R_2



Teorema Supponiamo che $f:\Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa e che $\overline{C(z_0, R_1, R_2)} \subset \Omega$.



Allora si ha $\forall z \in C(z_0, R_1, R_2)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \left(\begin{matrix}\text{SERIE DI} \\ \text{LAURENT}\end{matrix}\right)$$

DOVE
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \quad (\text{COEFF. di LAURENT}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

(se f fosse olomorfa su tutto $B(z_0, R_1)$ $\Rightarrow$ $a_n = 0$ se $n<0$).

DIM.

Prendiamo $z \in C := C(z_0, R_1, R_2)$ e applichiamo la formula di Cauchy rispetto a z

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi = \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi}^{1} - \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi}^{2}$$

(B_1 = palla di raggio R_1 / B_1 = .. di raggio R_1)

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 + z_0 - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \, d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n d\zeta = \text{(si può fuori)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \qquad (n\geq 0)$$

$$② = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\partial B_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0+z_0-z}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1}\frac{f(\zeta)}{z_0-z}\frac{1}{1-\frac{z_0-\zeta}{(z_0-z)}}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1}\frac{f(\zeta)}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1}\frac{f(\zeta)}{(z-z_0)}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^m d\zeta = \text{(si può fuori)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(z-z_0)^{m+1}}\int_{\partial B_1}f(\zeta)(\zeta-z_0)^m d\zeta$$

CAMBIO DI INDICE

$m+1=-n$

$m=-n-1$

$(n\leq -1)$

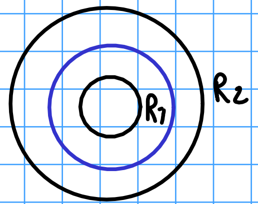
$$= \sum_{n=-1}^{-\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

lo posso ancora chiamare n

$$= \sum_{n=-1}^{-\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$$

per qualunque R tra R_1 e R_2; $B_R=B(z_0,R)$

(dato che l'integrando è olomorfo su $C(R_1, R_2)$ e tutte le circonferenze di raggio R sono tra loro omotope



Entrambi gli integrali ($\forall n$) si possono fare su ∂B_R

$\Rightarrow$ alla fine vale la formula:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi$$

$$\forall\, z \in C(z_0, R_1, R_2)$$

Attenzione - stavolta f non è definita in z_0, gli a_n non hanno nessun significato rispetto a f in z_0.

CONSEGUENZE DI QUESTO RISULTATO (E DI QUELLO DELL'ALTRA VOLTA).

(B) <u>TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA</u> OGNI POLINOMIO IN $\mathbb{C}$, non costante, ha una radice

(A) <u>TEOREMA DI LIOUVILLE</u> Se $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa, e f è limitata $\Rightarrow$ f è costante.

Dim. Suppiamo che $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z_0 = 0)$

dove
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \quad \text{per qualunque } R > 0$$

$$\left(M = \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)| \right)$$

MA se $n \geq 1$

BASE ALTEZZA

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \text{lunghezza}(\partial B_R) \cdot \max_{\xi \in \partial B_R} \left| \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} \right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^n}$$

Ma $\frac{M}{R^n} \to 0$ se $R \to +\infty \Rightarrow a_n = 0$ $\underline{\forall n \geq 1}$

DUNQUE $f(z) = a_0 = $ costante.

Dim di (B). Sia $P(z)$ polinomio di grado $n \geq 1$

Se per assurdo non avesse radici $f(z) = \frac{1}{P(z)}$
sarebbe una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$!!

Poiché che $|P(z)| \simeq \text{cost}\,|z|^n \Rightarrow \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$

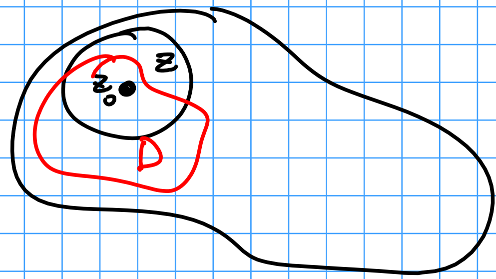
SE NE DEDUCE CHE $|f(z)|$ è limitata

(continua su tutto $\mathbb{C}$ e $\to 0$ se $|z| \to +\infty$ — Weierstrass in $\mathbb{R}^2$!!)

$\Rightarrow$ (per Liouville) f = costante ASSURDO

Supponiamo che f sia olomorfa in $\Omega \setminus \{z_0\}$

($z_0 \in \Omega$ è una singolarità ISOLATA)



DUNQUE POSSO FARE LO SVILUPPO DI LAURENT:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

(per tutti gli z vicini a z_0, $z \neq z_0$)

(CASO $R_1 = 0$)

DEF IL TERMINE a_{-1} si chiama RESIDUO DI f IN z_0 e si indica con $\mathrm{Res}(f, z_0)$

NOTIAMO CHE $$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} \frac{f(\zeta)}{\cancel{(\zeta - z_0)^{n+1}}} d\zeta$$

IN REALTÀ (COME SAPPIAMO)

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(\zeta)\, d\zeta$$ dove

D è un qualunque dominio regolare con $D \subset \Omega$

e con $z_0 \notin \partial D$.

TEOREMA DEI RESIDUI (lo vedremo)

Se Ω aperto regolare di $\mathbb{C}$, $z_1, \dots, z_k \in \Omega$.

$f : \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_k\} \to \mathbb{C}$ olomorfa

($z_1 \dots z_k$ sono singolarità isolate per f) $\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} f(\zeta)\, d\zeta = \mathrm{Res}(f, z_1) + \dots + \mathrm{Res}(f, z_k)$$

quello che contribuisce all'integrale è solo la potenza -1