Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

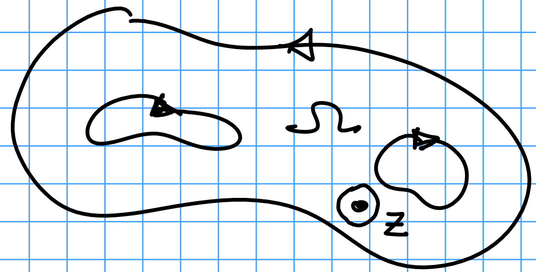
Percorso di Eccellenza 2011

Lezione 5 , 14 aprile 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

Teorema di Cauchy Se Ω è un aperto regolare di $\mathbb{C}$, f olomorfa su Ω e continua su $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, allora

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$$



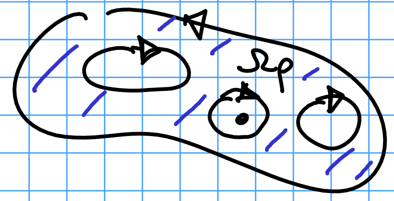
Formula di Cauchy:

f, Ω come sopra. Allora per ogni z in Ω si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

Nota: la formula di Cauchy permette di ricostruire il valore di $f(z)$ $\forall z \in \Omega$ CONOSCENDO SOLO $f(\xi)$ per ogni $\xi \in \partial\Omega$. f È UNIVOCAMENTE DETERMINATA DAI SUOI VALORI SU $\partial\Omega$.

Dim. Dato $z \in \Omega$ prendiamo $\rho > 0$ tale $\overline{D}(z,\rho) \subset \Omega$ dove $\overline{D}(z,\rho) = \{\xi : |z-\xi| \leq \rho\}$. Chiamo $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{D(z,\rho)}$



Applico il teorema di Cauchy a Ω_ρ:

$$\int_{\partial\Omega_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

perché $\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ è olomorfa in Ω_ρ (HO TIRATO VIA z CON TUTTO UN SUO INTORNO). Ma

$$0 = \int_{\partial\Omega_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \iff$$

per via dell'orientazione

$$\iff \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, dz = $$

(QUI z È FISSATO)

$$\underbrace{\int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{(1)} + \underbrace{\int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta}_{(2)}$$

$\forall \rho > 0$ tale che $D(z,\rho) \subset \Omega$

$$(2) = f(z) \int_{\partial D(z,\rho)} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int_{\partial D(0,\rho)} \frac{1}{s}\, ds = \boxed{2\pi i\, f(z)}$$

(VISTO LA VOLTA SCORSA)

$$|(1)| = \left| \int_{\partial D(z,\rho)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq \text{lunghezza della circonf.} \cdot \max_{\zeta \in \partial D(z,\rho)} \left| \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} \right| =$$

$$\underbrace{2\pi\rho}_{\downarrow\, 0} \max \left| \underbrace{\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}}_{\downarrow\, f'(z)} \right|$$

se $\rho \to 0$ ($\Rightarrow$ È LIMITATO PER $\rho > 0$)

DUNQUE $(1) \to 0$ se $\rho \to 0$, da cui $(1) = 0 \;\forall \rho$

e vale la formula:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \forall z \in \Omega}$$

Ricordiamo la formula della serie geometrica:

se $A \in]-1, 1[$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ converge (assolutamente) e fa $\dfrac{1}{1-A}$

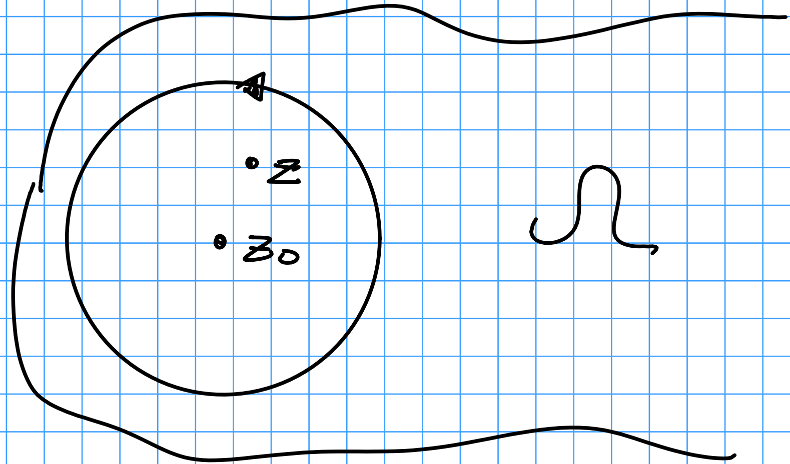
IN REALTÀ, nello stesso modo che si usa in $\mathbb{R}$, si vede che se $|z| < 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge a $\frac{1}{1-z}$

$$(z^k + z^{k-1} + \dots + 1)(z-1) = z^{k+1} - 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{k} z^n = \frac{z^{k+1}-1}{z-1} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{1-z} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{se } |z| < 1 \\ \Downarrow \\ z^k \to 0 \end{array} \right)$$

Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa in Ω. Sia $z_0 \in \Omega$

Prendiamo $R > 0$ tale che $D(z_0, R) \subset \Omega$. Prendiamo $z \in D(z_0, R)$. Applichiamo la formula di Cauchy a z rispetto a $D(z_0, R) =: D_R$



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 + z_0 - z} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \, d\xi$$

$(*)$

Dato che $\left|\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right| < 1 \quad \forall \xi \in \partial D_R$ si ha

$$\circledast = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n d\xi \;=\; \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{\partial D_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\right)(z-z_0)^n \Rightarrow$$

(?? SI FA, MA NON E' OVVIO !!)

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n}$$ dove

per il th. di Cauchy

$$* \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi \quad \left(= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} \right)$$

f si sviluppa in una SERIE DI POTENZE CENTRATA IN z_0, SU OGNI $D(z_0,R) \subset \Omega$ - dove i coeff. sono dati sopra.

CONSEGUENZE (per delle proprietà di queste serie)

- f ha derivate di ogni ordine K e

$$f^{(K)}(z) = \sum_{n=K}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-K+1)(z-z_0)^{n-K}$$

se $z=z_0$ sono tutti $=0$, tranne quello con $n=k$

(se f è derivabile in senso complesso $\Rightarrow$ f è C^∞)

IN PARTICOLARE SE METTO $z = z_0$ nella formula sopra:

$$f^{(k)}(z_0) = a_k\, k! \iff a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

DUNQUE (vale per ogni serie di potenze) se

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \implies a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

CIOÈ f È SOMMA DELLA SUA SERIE DI TAYLOR

QUINDI (generalizzazione della formula di Cauchy)

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}\, d\xi$$

(si può benissimo mettere z invece di z_0)

(anche $f^{(k)}$ si esprime mediante f su $\partial\Omega$).