Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

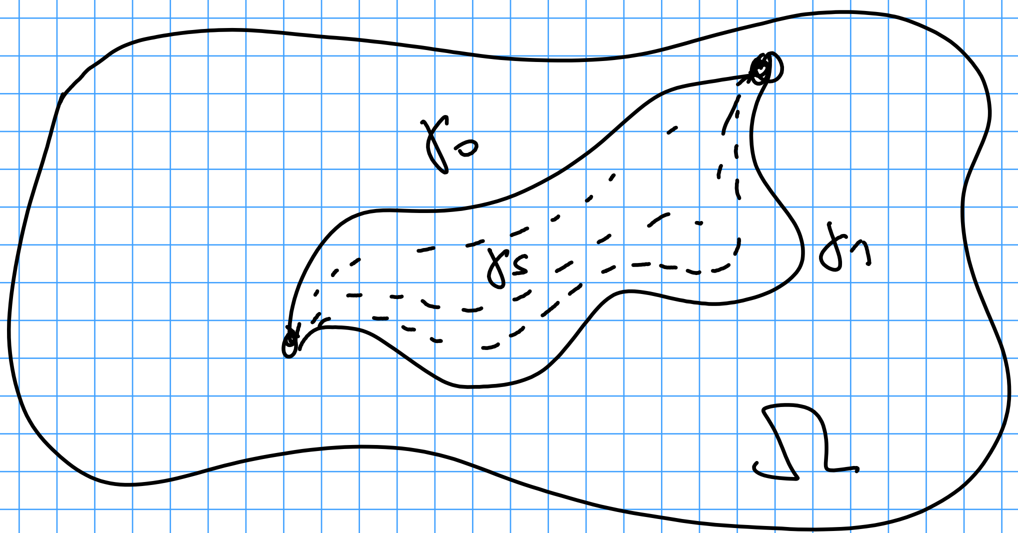
Lezioni 3 e 4 , 2 aprile 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

$\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ regolari con stessi estremi (oppure chiuse)

Ricordiamo che γ_0 e γ_1 sono omotope in Ω se esiste (un'omotopia) una funzione $H(t,s)$ continua $a \le t \le b$, $0 \le s \le 1$ e valori in Ω

- $H(t,0) = \gamma_0(t)$
- $H(t,1) = \gamma_1(t)$ $\quad \forall t \in [a,b]$
- $H(a,s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a)$
  $H(b,s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ $\quad$ / $\quad H(a,s) = H(b,s) \quad \forall s \in [0,1]$



dove $\gamma_s(t) = H(t,s)$

<u>Teorema</u> (regolari e) Se $\vec{f}$ è un campo irrotazionale, se γ_0 e γ_1 sono omotope tra loro $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} = \int_{\gamma_2} \vec{f}$$

VOGLIO DARE UN'IDEA DELLA DIM.

1° Chiamo rotore di un campo (derivabile) $\vec{f}$, l'espressione

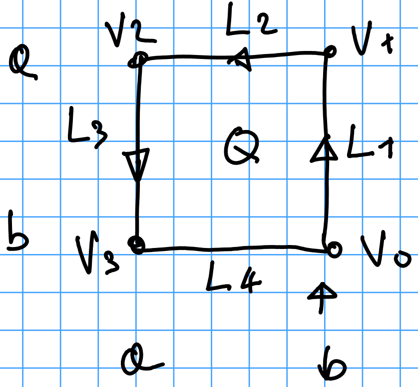
$\left(\text{se } \vec{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right)$, $\boxed{rot(\vec{f}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}$

(sembra uno scalare, ma andrebbe pensato come un vettore "di traverso" al piano x, y → in $\mathbb{R}^3$ c'è una def. che produce un vettore, di cui quello sopra è un caso particolare)

2 Facciamo un calcolo: (IN $N=2$) Siano $a < b$ in $\mathbb{R}$ e sia

$$Q = [a,b] \times [a,b] = \{(x,y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

Si vede che $\partial Q = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ e ogni L_j (lato) è descritto da una curva $\left(\gamma_j(t) = t V_j + (1-t) V_{(j-1)} \right)$



Allora, dato un campo $f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\iint_Q rot(\vec{f})\, dx dy =$$

$$\int_a^b \left(\int_a^b \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_a^b \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx =$$

$$\int_a^b [v(b,y) - v(a,y)]\,dy - \int_a^b [u(x,b) - u(x,a)]\,dx =$$

$$\int_a^b v(b,y)\,dy - \int_a^b v(a,y)\,dy - \int_a^b u(x,b)\,dx + \int_a^b u(x,a)\,dx$$

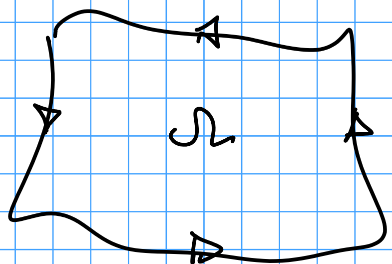
$$= \int_{L_1} \vec{f} + \int_{L_3} \vec{f} + \int_{L_2} \vec{f} + \int_{L_4} \vec{f} = \int_{\partial Q} \vec{f}$$

(cioè $\int_\gamma \vec{f}$ dove γ è "l'unione" delle quattro curve che descrivono i lati) Quindi

$$\boxed{\iint_Q \operatorname{rot}(\vec{f})\,dx\,dy = \int_{\partial Q} \vec{f}}$$

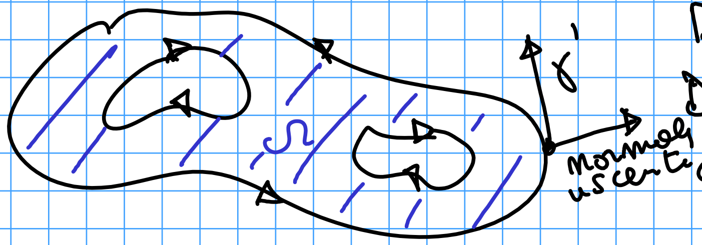
Questa formula vale per insiemi MOLTO PIÙ GENERALI.

Quello che importa è che $\vec{f}$ sia definita e derivabile su Ω e che $\partial\Omega$ sia descritta da una singola curva (Ω non deve avere buchi)



$$\iint_\Omega \operatorname{rot}(\vec{f})\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}$$

SI PUÒ POI PASSARE A UN Ω LIMITATO il cui bordo $\partial\Omega$ sia fatto da $K+1$ curve $\gamma_0\ \gamma_1 \dots \gamma_k$ PUR DI DECIDERE UN ORIENTAMENTO DI TALI CURVE, coerentemente con Ω !!



$\boxed{\text{QUI } N = 2}$

- Se $\partial\Omega$ = unione dei supporti di $\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_k$ regolari a tratti
- ogni γ_k è chiusa e non si auto-interseca:

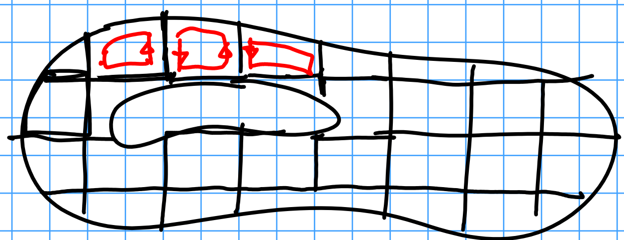
$\gamma_j : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_j(a) = \gamma_j(b)$, $\gamma_j(t') \neq \gamma_j(t'')$ se $a < t' < t'' \leq b$

- Se $j \neq j' \Rightarrow$ i supporti di γ_j e $\gamma_{j'}$ sono disgiunti
- OGNI γ_j, all'avanzare del parametro t, "tiene Ω a sinistra"

Se vale quanto sopra dico che Ω è regolare a tratti:

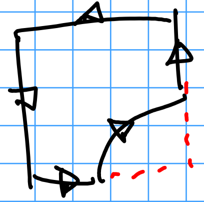
$\Rightarrow$ Vale
$$\iint_\Omega \mathrm{rot}(\vec{f}) = \int_{\partial\Omega} \vec{f} = \sum_{j=0}^{K} \int_{\gamma_j} \vec{f}$$

IDEA:



Faccio un "reticolo" di quadratini di lato piccolo

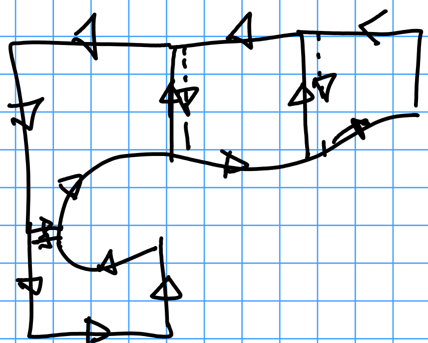
Prendo uno di questi quadratini Q e lo interseco con Ω : $Q \cap \Omega$ (non ho buchi se il lato è piccolo)



← vale il teorema di prima

$$\int_{Q\cap\Omega} \mathrm{rot}.(\vec{f}) = \int_{\partial(Q\cap\Omega)} \vec{f}$$

Se sommo tutti gli integrali (su tutti i Q)



I LATI ADIACENTI SI CANCELLANO

Alla fine rimane solo

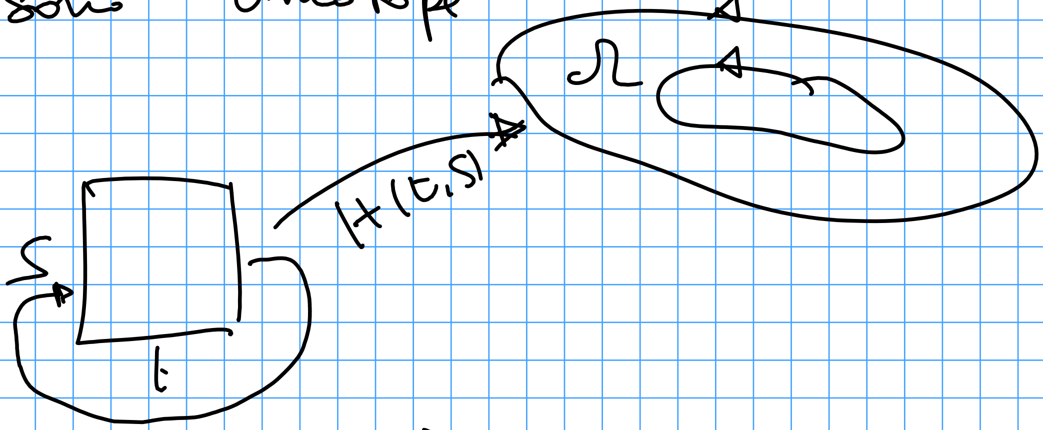
$$\iint_{\Omega} \mathrm{rot}(\vec{f}) = \int_{\partial\Omega} \vec{f}$$

DUNQUE se Ω è "regolare a tratti"

$$\boxed{\iint_{\Omega} \mathrm{rot}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}}$$

Con un po' di pazienza si vede che si γ_0 e γ_1

sono omotope



ci si può "ricondurre" al caso in cui

γ_0 e $-\gamma_1$ sono il bordo di un aperto Ω

se $\operatorname{rot}(\vec{f})=0 \Rightarrow \int_{\gamma_0 \cup (-\gamma_1)} \vec{f} = 0 \Rightarrow$

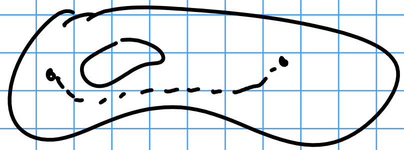
$$\int_{\gamma_0} \vec{f} = \int_{\gamma_1} \vec{f}$$

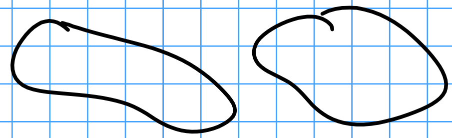
(tutto un po' vago..)

<u>NOTA</u> se $\partial\Omega$ è fatto da una sola curva $\gamma_0 \Rightarrow$ Ω è semplicemente connesso e $\int_{\partial\Omega} \vec{f} = 0$ per ogni campo irrotazionale. DUNQUE IN UN TALE Ω ogni campo irrotazionale è conservativo. (SI VEDE CON UN PO' DI PAZIENZA)

D'ora in poi Ω è un aperto di $\mathbb{C}$, che suppongo CONNESSO

Def. Ω si dice "connesso" se per ogni coppia di punti P_0 e P_1 in Ω esiste una curva continua in Ω che li unisce: $\gamma : [0, b] \to \Omega$, $\gamma(0) = P_0$, $\gamma(b) = P_1$.





Spesso confonderemo Ω con $\{(x, y) : x + iy \in \Omega\}$ in $\mathbb{R}^2$.

Def. Dato $f : \Omega \to \mathbb{C}$, e dato z_0 in Ω dico che f è derivabile in z_0 se $\exists$ limite (limite in due variabili)

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad \left(=: f'(z_0) \text{, derivata di } f \text{ in } z_0 \right)$$

NOTA CHE POSSO DIVIDERE PER $z - z_0$, dato che sono in $\mathbb{C}$

$$\left[\text{ricordo che } \frac{1}{z} \left(= \frac{1}{x+iy} \right) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \left(= \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) \right]$$

Dico che f è "olomorfa" su Ω se $\exists f'(z_0)$ $\forall z_0 \in \Omega$ e tale f' è continua.

#

CONSEGUENZE DI QUESTA DEF. Se $\exists\, f'(z_0)$ allora posso trovarlo facendo incrementi reali / incrementi imm. puri.

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}}_{(1)} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih}}_{(2)}$$

$(h \in \mathbb{R})$ Allora, se scrivo $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$

trovo

$$(1) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\,\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

$$(2) = \frac{1}{i}\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h} + i\,\frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{h}\right)\right]$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}u(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

DUNQUE se esiste $f'(z_0)$ (dove $z_0 = x_0 + iy_0$) $\Rightarrow$

(C.R.) $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \;;\; \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

che si chiamano "condizioni di Cauchy-Riemann"

e $$f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} \left(= \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

In realtà - se mi metto su tutto Ω - vale anche il viceversa.

<u>Teorema</u> Sono equivalenti ($f = u + iv$)

(a) f è olomorfa su Ω

(b) u e v hanno derivate parziali continue e valgono le C.R.

(si dimostra mediante "il teorema del differenziale totale")

COSA VOGLIONO DIRE LE (C.R.) ??

Dall'esistenza di $f'(z_0)$ troviamo che, per $z \sim z_0$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

(va a zero più veloce di $|z - z_0|$)

$$f(z) \simeq f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)(z - z_0)}_{\text{come visualizzo questa moltiplicazione?}}$$

MOLTIPLICARE $(z - z_0)$ per $f'(z_0)$ significa operare su $z - z_0$

- UNA DILATAZIONE DI FATTORE $|f'(z_0)|$

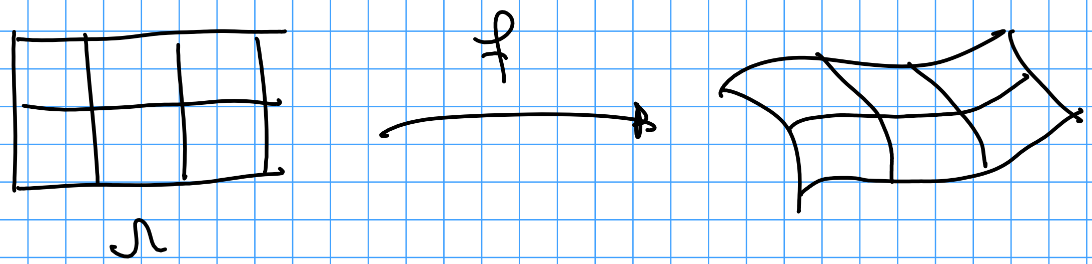
- UNA ROTAZIONE DI ANGOLO $\arg(f'(z_0))$

Quindi vicino a z_0 f dilata di $|f'(z_0)| = \rho$
ruota di $\arg(f'(z_0)) = \theta$

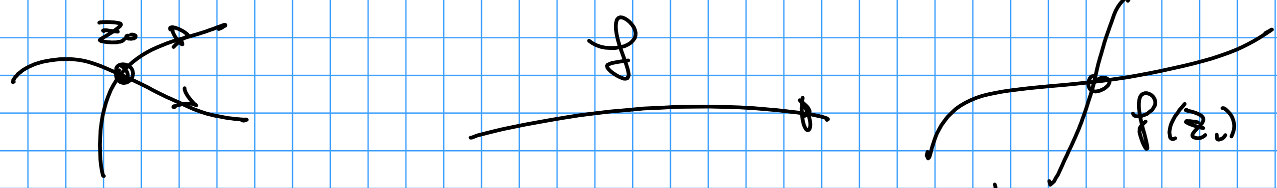
(se lo vedo dal punto di vista di $\mathbb{R}^2$ NOTO - ANALOGAM. -
lo Jacobiano di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ è del tipo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\rho} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Bigg)$$

IN PARTICOLARE f è "CONFORME" MANTIENE GLI ANGOLI

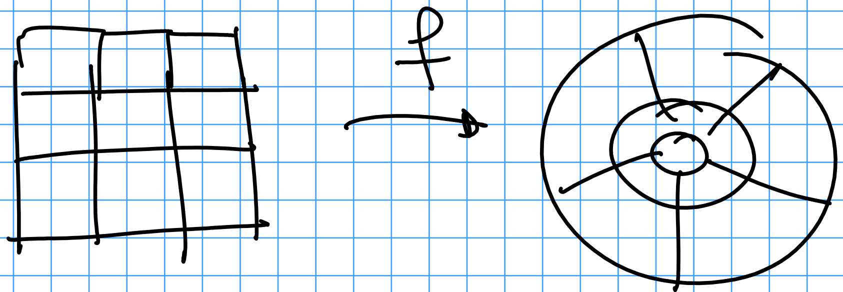


Se γ_0 e γ_1 sono curve in γ e $\gamma_0(t) = \gamma_1(t) = z_0$
(passano per z_0 all'istante t) $\Rightarrow$ $f \circ \gamma_0$ e $f \circ \gamma_1$ sono
curve in $\mathbb{C}$ che passano per $f(z_0)$ all'istante t



SI HA $$\frac{\gamma_0'(t)\cdot\gamma_1'(t)}{|\gamma_0'(t)|\,|\gamma_1'(t)|} = \frac{(f\circ\gamma_0)'(t)\cdot(f\circ\gamma_1)'(t)}{|(f\circ\gamma_0)'(t)|\,|(f\circ\gamma_1)'(t)|}$$

(perché $(f\circ\gamma)'(t) = J_f(\gamma)\cdot\gamma'(t)$)
è dilata e ruota



Fatto Valgono tutti i soliti teoremi di calcolo:

$(f+g)' = f'+g'$

$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (se $g \neq 0$)

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)\cdot g'$$

Esempi: • $f(z)=z$ è olomorfa su $\mathbb{C}$ e $f'(z)=1$

• $f(z)=z^k$, $k\in\mathbb{Z}$, è olomorfa su $\mathbb{C}$ se $k\geq 0$, su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ se $k<0$
e
$$f'(z)=k z^{k-1}$$

• Polinomi e rapporti di polinomi (funzioni razionali) sono olomorfe (su $\mathbb{C}\setminus\{$radici del denominatore$\}$)

per es $\dfrac{z}{1+z^2}$ è olomorfa in $\mathbb{C}\setminus\{i,-i\}$

• $f(z)=e^z$. Se $z=x+iy$ $\quad e^z=e^x(\cos(y)+i\sin(y))$

$u(x,y)=e^x\cos(y) \qquad v(x,y)=e^x\sin(y)$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos(y) \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin(y) \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos(x)$$

Valgono C.R. e $f'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^z$

Non abbiamo parlato di z^α con $\alpha\in\mathbb{R}$ / $\alpha\in\mathbb{C}$, né di $\ln(z)$

Def. Data una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ e una funzione f, definita su $spt(\gamma)$ e continua, definisco l'integrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prodotto in } \mathbb{C}}}{\cdot} \gamma'(t)\,dt$$

Valgono gli stessi fatti detti la volta scorsa:

- $\int_\gamma f$ non dipende dalla parametrizzazione
- Se γ_1 è l'opposto di γ $\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$
- Se γ_1 e γ_2 sono consecutive $\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

Se $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ vediamo come si esprime $\int_\gamma f(z)\,dz$ in termini di u e v.

Sia $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \Rightarrow \gamma' = \gamma_1' + i\gamma_2'$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \Big(u(\gamma(t)) + i\,v(\gamma(t))\Big)\Big(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\Big)dt =$$

$$\int_a^b \left[u(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\,\gamma_2'\right] dt + i\int_a^b \left[u(\gamma(t))\,\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\,\gamma_1'(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \vec{h}_1 + i \int_a^b \vec{h}_2 \qquad \text{dove}$$

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \qquad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

ALLORA se f è olomorfa $\Longrightarrow$ per (C.R.) si ha

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & \leftrightarrow & \vec{h}_1 \text{ è irrotazionale} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} & \leftrightarrow & \vec{h}_2 \text{ è irrotazionale} \end{array}}$$

Si ha inoltre

<u>Teorema</u> Sia $f:\Omega\to\mathbb{C}$ sia olomorfa. Sono equivalenti

(a) h_1 e h_2 (detti sopra) sono conservativi

(b) Esiste una $F:\Omega\to\mathbb{C}$ olomorfa con $F'=f$.

(c) Se γ_1 e γ_2 hanno gli stessi estremi

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

(d) se γ è chiuso

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

__Dim.__ È facile (riconducendosi a quanto visto l'altra volta) che (a) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d). Vediamo che (a) $\Leftrightarrow$ (b).

(a) $\Rightarrow$ (b) Supponiamo $\vec{h_1}$ e $\vec{h_2}$ conservativi. Allora $\exists$ H_1 e H_2 tali che

$$\nabla H_1 = \vec{h}_1 \quad , \quad \nabla H_2 = \vec{h}_2 \qquad \text{cioè}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} = u \;,\; \frac{\partial H_1}{\partial y} = -v \;,\; \frac{\partial H_2}{\partial x} = v \;,\; \frac{\partial H_2}{\partial y} = u \qquad \cancel{\ast}$$

Prendiamo $F = H_1 + i H_2$ $\Rightarrow$ (per $\cancel{\ast}$) F verifica le C.R.

$\Longrightarrow$ F è olomorfa e $F' = \frac{\partial}{\partial x} H_1 + i \frac{\partial}{\partial x} H_2 = u + iv = f$.

HO TROVATO UNA PRIMITIVA!

(b) $\Rightarrow$ (a). Sia $F = F_1 + i F_2$ una primitiva di $f = u + iv$. Per (C.R.)

$$-\; \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \;;\; \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x} \;= \qquad e$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + i\frac{\partial F_2}{\partial x} = u + iv \Longrightarrow \frac{\partial F_1}{\partial x} = u \;,\; \frac{\partial F_2}{\partial x} = v$$

e allora

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = u \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -v \qquad \Rightarrow \nabla F_1 = \vec{h}_1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = v \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = u \qquad \Rightarrow \nabla F_2 = \vec{h}_2$$

CONSERVATIVI!

#

OSS. Si vede dalla dim. che se $F' = f \Rightarrow$

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta = F(z_0) + \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta$$

dove γ è una qualunque curva da z_0 a z

($F(z_0)$ è arbitrario)

Esempio $K \in \mathbb{Z}$, $K \neq -1$, $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\int_{\gamma} (z - z_0)^K dz = 0$$

per ogni γ chiuso che non passa per zero

Basta notare che $(z - z_0)^K = \frac{d}{dz} \frac{(z - z_0)^{K+1}}{K+1}$

OSS. Se $K \leq -2$ i due campi associati a $(z - z_0)^K$ sono conservativi su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, che non è semplicemente connesso.

IL PROBLEMA È $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$. Facciamo un calcolo

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz \qquad \gamma(t) = R e^{it} \quad -\pi \le t \le \pi$$

γ descrive la circonferenza di raggio R. $\gamma'(t) = iRe^{it}$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\cancel{Re^{it}}} \cdot i\cancel{Re^{it}}\,dt = \underline{\underline{i \cdot 2\pi \quad \neq 0}}$$

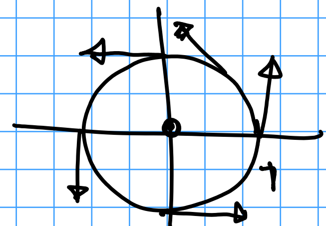
Vediamo chi sono $\vec{f_1}$ e $\vec{f_2}$ in questo caso.

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$f_1(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad\qquad f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

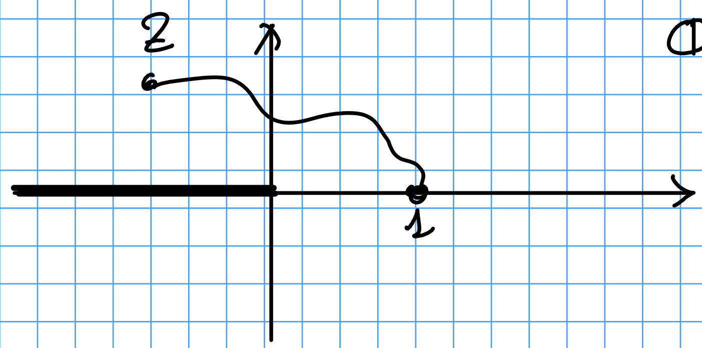
È CONSERVATIVO $\qquad\qquad$ NON È CONSERVATIVO

$$F_1(x,y) = \frac{-1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad\qquad \int_\gamma f_2 = 2\pi$$



IN PARTICOLARE HO DIMOSTRATO
- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO
- $1/z$ NON HA PRIMITIVA SU $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

SE MI METTO IN $\mathbb{C}^+ = \{ z \in \mathbb{C} \, , \, z \neq \text{reali} \le 0 \}$



$\mathbb{C}^+$. Si vede che $\mathbb{C}^+$ è semplicemente connesso (si fa una costruzione esplicita che "butta" $\mathbb{C}^+$ con continuità su $z_0 = 1$)

$\Rightarrow \exists \, F : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ olomorfa con $F' = \dfrac{1}{z}$, $F(1) = 0$

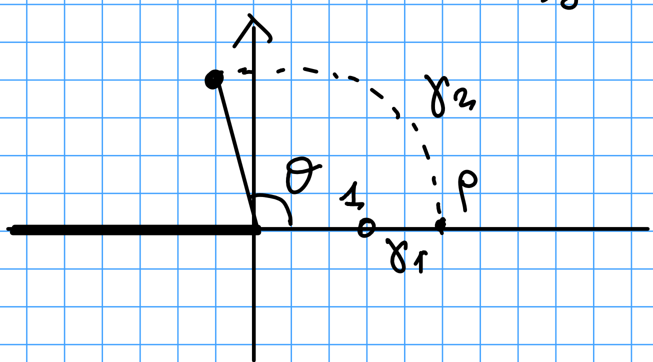
Chi è $F(z)$?? Per quanto visto deve essere

$$F(z) = \int_1^z \frac{1}{\zeta} \, d\zeta = \int_\gamma \frac{1}{\zeta} \, d\zeta$$

dove γ congiunge 1 a z in $\mathbb{C}^+$

dato che posso scegliere prendo $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$

dove se $z = \rho e^{i\theta}$ $\quad -\pi < \theta < \pi$



- γ_1 è il segmento (reale) tra 1 e ρ
- γ_2 è l'arco $\quad (\theta > 0$ per es.$)$

$$\gamma_2(t) = \rho e^{it} \qquad 0 \le t \le \theta$$

$$\Rightarrow \int_1^z \frac{1}{\zeta}\, d\zeta = \int_1^\rho \frac{1}{x}\, dx + \int_0^\theta \frac{1}{\cancel{\rho e^{it}}}\, i\cancel{\rho e^{it}}\, dt =$$

$$\ln \rho + i\,\theta$$

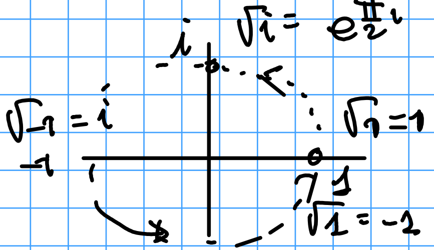
ben definito in $]-\pi, \pi[$

$$F(z) = \ln|z| + i\,\underbrace{\mathrm{Arg}_0(z)}_{\in\,]-\pi,\pi[}$$ è una primitiva di $\frac{1}{z}$ in $\mathbb{C}^+$

NON "SI RACCORDA" sui reali negativi. Si può chiamare F una "determinazione" del logaritmo di z.
(È chiaro che $e^{F(z)} = z$)

DUNQUE $\ln(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$ ma si può definire su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ perché "dopo un giro" non si raccorda.

Analogamente non riesco a definire su $\mathbb{C}$ la funzione
$\sqrt{z} = f(z)$



LE RADICI DI z SONO DUE E NON RIESCO A UNA IN

MODO DA AVERE UNA FUNZIONE CONTINUA SU $\mathbb{C}$

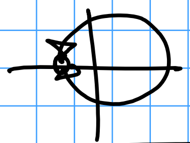
In effetti $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln(z)}$ si definisce in termini di $\ln(z)$ che ad ogni giro salta di $2\pi i \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(z)$ "salta" di πi a ogni giro $\Rightarrow$ $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\ln(z)}$ torna lo stesso DOPO DUE GIRI

$\Rightarrow$ $\sqrt{z}$ HA SOLO 2 VALORI

IN QUESTO MODO SI PUÒ "DEFINIRE" $z^w = e^{w\ln(z)}$ che "HA ∞ VALORI" se w NON È RAZIONALE.

(POSSO TROVARNE UNA DETERMINAZIONE SU $\mathbb{C}^+$ che – se $w \in \mathbb{R}$ – coincide con la vecchia potenza su $\mathbb{R}^+$)

<u>OSS.</u> Il calcolo $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$ si può capire pensando a "$\int \frac{1}{z}\,dz = \ln z \Big|_{-1}^{-1}$" con un giro di mezzo



Conviene vedere gli integrali curvilinei come "integrali di bordo". Scriviamo allora (se Ω è "regolare a tratti")

$$\boxed{\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz}$$

dove $\gamma_0 \dots \gamma_k$ descrivono $\partial\Omega$ come detto all'inizio della lezione. Questa def. è ben posta perché si può dim che non dipende dalle curve $\gamma_0 \dots \gamma_k$, purché rispettino i vincoli detti all'inizio"

NOTA l'integrale $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz$ in realtà dipende da Ω (e non sol. da $\partial\Omega$). Ω mi dà l'orientamento.

Per esempio $\Omega_1 = \{x^2+y^2<1\}$, $\Omega_2 = \{x^2+y^2>1\}$

$$\partial\Omega_1 = \partial\Omega_2 = \{x^2+y^2=1\}$$

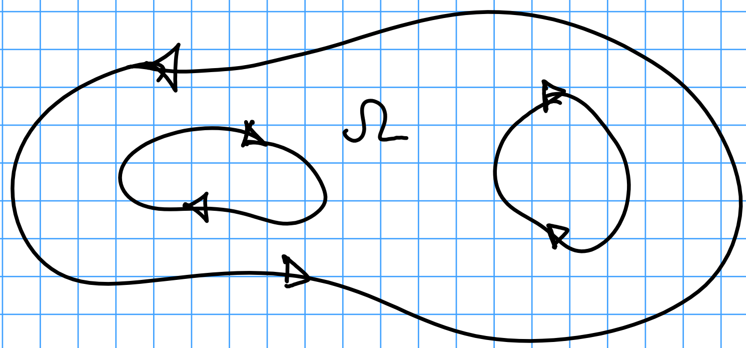
Ma non è lo stesso scrivere $\int_{\partial\Omega_1} f(z)\,dz$, $\int_{\partial\Omega_2} f(z)\,dz$

SONO OPPOSTI

Vale questo teorema (che è lo stesso scritto all'inizio nel caso in cui $rot(\vec{F})=0$.

Teorema di Cauchy Se Ω è limitato, regolare a tratti e se f è olomorfa in un Ω_0 tale che $\Omega \cup \partial\Omega \subset \Omega_0$. Allora

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$$



(segue dal fatto che

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\partial\Omega} \vec{h}_1 + i \int_{\partial\Omega} \vec{h}_2 = 0 + i\,0$$

essendo h_1/h_2 irrotazionali.