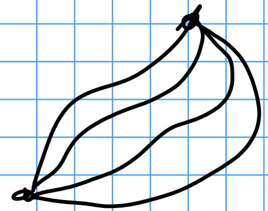
Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

Lezioni 3 e 4 , 2 aprile 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

$\vec f = (f_1 \dots f_N)$ irrotazionale se



$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Se $\vec f$ è irrotazionale e se γ_1, γ_2 sono due curve omotope (o con gli stessi estremi o chiuse) $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} \vec f = \int_{\gamma_2} \vec f$$

IDEA DI DIM. nel caso $N=2$

$$\vec f(x,y) = (u,v) = (u(x,y), v(x,y))$$

IRROTAZIONALE: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

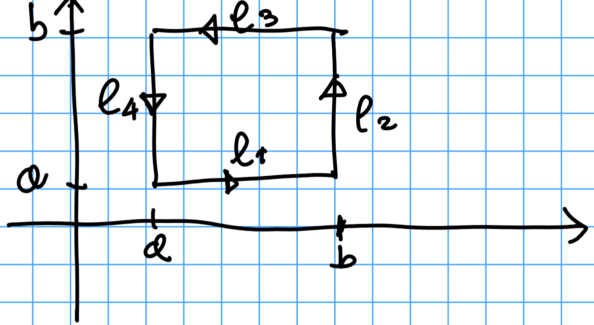
chiamo ROTORE di un campo $\vec f = (u,v)$ l'espressione

$$\boxed{rot(\vec f) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}$$

(irrotazionale $\Leftrightarrow rot(\vec f) = 0$)

(questo def. è un caso particolare del caso $N=3$ in cui $rot(u,v,w)$ è un vettore ...).

Facciamo un calcolo: Prendo un quadrato ,



$Q = [a,b] \times [a,b] = \{ a \le x \le b,\ a \le y \le b \}$

$\vec{f}$ sia definita su Q

$\ell_1 .. \ell_4$ i lati di Q (delle curve)

$$\iint_Q \mathrm{rot}(\vec{f})\, dx\, dy = \int_a^b \int_a^b \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$\int_a^b \left(\int_a^b \frac{\partial v}{\partial x}\, dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_a^b \frac{\partial u}{\partial y}\, dy \right) dx =$$

$$\int_a^b \left(v(b,y) - v(a,y) \right) dy - \int_a^b \left(u(x,b) - u(x,a) \right) dx =$$

$$\int_a^b v(b,y)\, dy - \int_a^b v(a,y)\, dy - \int_a^b u(x,b)\, dx + \int_a^b u(x,a)\, dx =$$

$$\overset{\shortparallel}{\int_{\ell_2} \vec{f}} + \int_{\ell_4} \vec{f} + \int_{\ell_3} \vec{f} + \int_{\ell_1} \vec{f} = \int_{\partial Q} \vec{f}$$

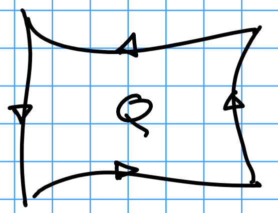
DUNQUE $\boxed{\displaystyle \int_Q \mathrm{rot}(\vec{f})\, dx dy = \int_{\partial Q} \vec{f}}$ $\circledast$

se $\mathrm{rot}\, \vec{f} \neq 0$ il campo fa un lavoro girando su ∂Q

(se $Q \to (x_0, y_0)$ $\quad \frac{1}{|Q|} \int_Q \mathrm{rot}\, \vec{f} \to \mathrm{rot}\, \vec{f}\,(x_0, y_0)$:

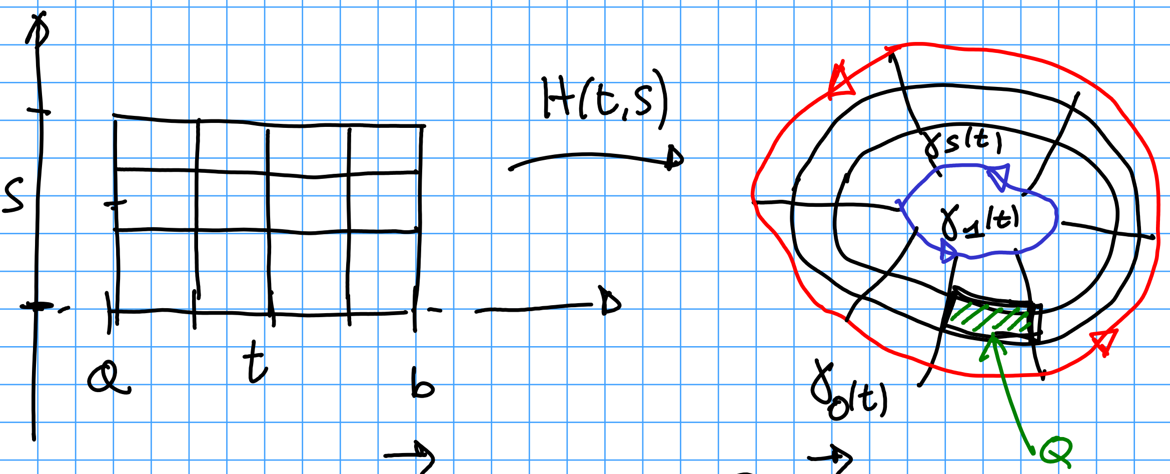
dunque $\mathrm{rot}.\, \vec{f}(x_0, y_0) \neq 0$ significa che $\vec{f}$ fa lavoro non nullo su un circuito che gira intorno a (x_0,y_0)).

IN REALTÀ LA FORMULA $(*)$ vale in casi molto più generali. Per esempio se i lati sono "storti"



vale ancora PURCHÉ f sia definita <u>dentro</u> Q

Se ora ho due curve omotope (per esempio chiuse)



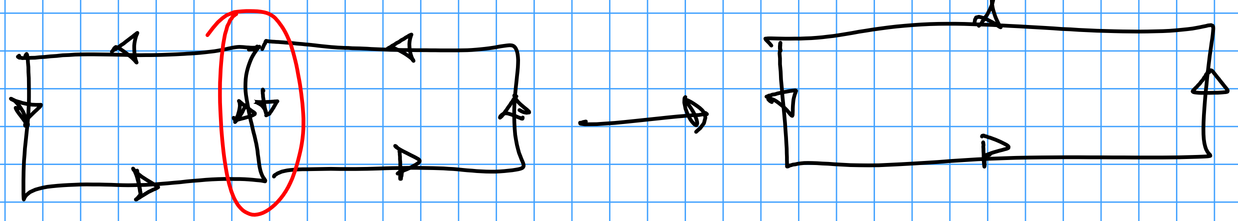
$\gamma_0(t) = H(t,0)$

$\gamma_1(t) = H(t,1)$

se $\mathrm{rot}\,\vec{f} = 0$ $\quad \displaystyle\int_{\partial Q} \vec{f} = 0$ per ogni Q "storto"

$$\Rightarrow \sum_{\text{tutti i } Q} \int_{\partial Q} \vec{f} = 0$$

Se prendo due "quadrati" adiacenti il contributo su



i lati contigui si cancella. Guardando il primo disegno si capisce che

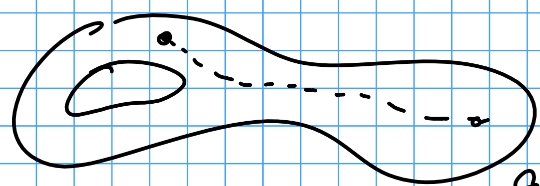
$$\sum_{Q} \int_{\partial Q} \vec{f} = \int_{\gamma_0} \vec{f} - \int_{\gamma_1} \vec{f} = 0 \qquad \#$$

FUNZIONI COMPLESSE DERIVABILI

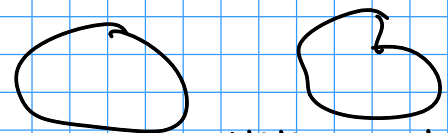
Fissiamo un $\Omega \subset \mathbb{C}$, aperto e connesso

Def. Ω è connesso se dati due punti P_0 e P_1 di Ω esiste una curva continua in Ω che li unisce:

$$\exists\ \gamma : [a, b] \to \Omega \quad \text{con } \gamma(a) = P_0 \ , \ \gamma(b) = P_1$$



CONNESSO



NON CONN.

<u>Def.</u> Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$ dico che f è derivabile in z_0 se esiste la "derivata"

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(NOTA che si tratta di un limite in DUE variabili)

Qui è fondamentale che in $\mathbb{C}$ si può fare la divisione.

ricordo che se $z = x + iy \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Dico che f è OLOMORFA in Ω se f ammette derivata f' continua in ogni $z_0 \in \Omega$.

Data $f : \Omega \to \mathbb{C}$ posso sempre identificare Ω con $\{(x, y) : x + iy \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^2$ e scrivere

$$f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

Supponiamo che f sia derivabile in $x_0 + iy_0 = z_0$

Allora posso considerare incrementi sia "reali" che "immaginari puri"; cioè posso dire che

in qualunque modo si tende a z_0 deve venire lo stesso risultato

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) + i v(x_0+h, y_0) - u(x_0,y_0) - i v(x_0,y_0)}{(\cancel{x_0}+h+\cancel{i y_0}) - (\cancel{x_0}+\cancel{i y_0})} =$$

$$(**)\ \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) + i v(x_0, y_0+h) - u(x_0,y_0) - i v(x_0,y_0)}{(\cancel{x_0}+\cancel{i y_0}+ih) - (\cancel{x_0}+\cancel{i y_0})}$$

$\Rightarrow$ se $\exists\, f'(x_0)$ deve valere

$$f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x_0,y_0) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} f(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

e quindi devono valere le "condizioni di Cauchy-Riemann"

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}} \quad (C.R.)$$

Teorema f è olomorfa su $\Omega \iff$ u e v sono differenziabili e valgono (C.R.)

(tipo teorema del diff. totale). Inoltre $f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$

INTEPRETAZIONE DI C.R. Vediamo f come (u, v) da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Se J è matrice Jacobiana in un pto (x_0, y_0)

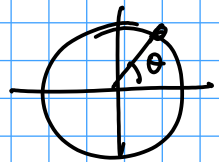
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x=x_0,\, y=y_0)} \Rightarrow f(x,y) \simeq f(x_0, y_0) + J \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$\parallel$

Le C.R. dicono che $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} =$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

per $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ e θ : tale che



$\Rightarrow$ J opera una <u>dilatazione</u> di fattore ρ e una <u>rotazione</u> di angolo θ. Nota che viene $\rho = |f'(z_0)|$ (perché $f'(z_0) = a + i b$) e $\theta =$ "$\mathrm{Arg}(f(z_0))$"

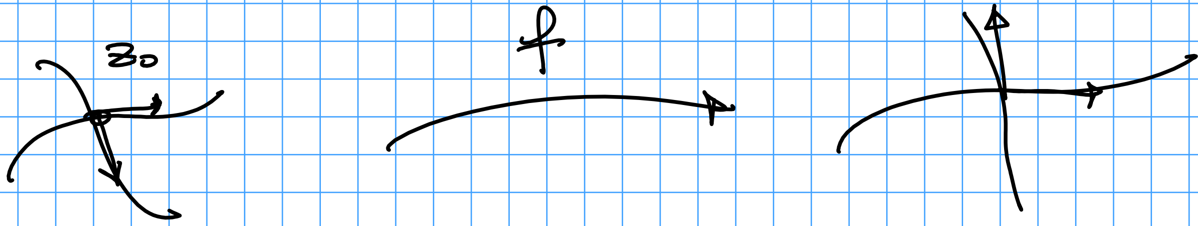
In effetti non c'è da sorprendersi: se $\exists f'(z_0) \Rightarrow$

$$f(z) \simeq f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)(z - z_0)}$$

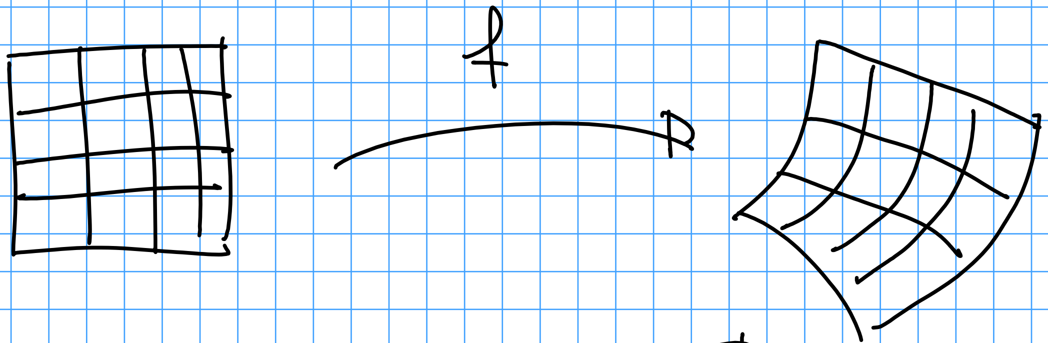
opera una dilatazione di $|f'(z_0)|$ e una rot. di $\mathrm{Arg}(f'(z_0))$

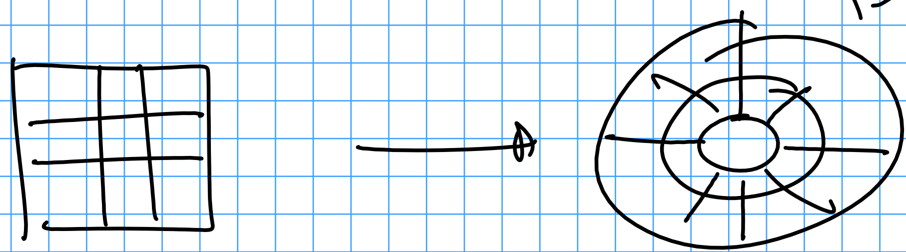
IN PARTICOLARE f olomorfa $\Rightarrow$ f È CONFORME

cioè se in Ω ci sono due curve γ_1 e γ_2 che passano per un punto z_0 e si tagliano con un angolo γ $\Rightarrow$ le immagini $f(\gamma_1)$ e $f(\gamma_2)$ si incontrano in $f(z_0)$ CON LO STESSO ANGOLO



(perché $\gamma_1'(z_0) \longrightarrow J\cdot\gamma_1'(z_0)$ e $\gamma_2'(z_0) \longrightarrow J\cdot\gamma_2'(z_0)$)





<u>Def.</u> Se $\gamma : [a,b] \to \Omega$ e $f: \Omega \to \mathbb{C}$ continua

posso definire

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

Prodotto complesso.

<u>Nota</u> se $f = u + iv$ e se $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \big(u(\gamma(t)) + i\,v(\gamma(t))\big)\big(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)\big)dt =$$

$$\int_a^b [u(\gamma)\cdot\gamma_1' - v(\gamma)\cdot\gamma_2']\,dt + i\int_a^b [u(\gamma)\gamma_2' + v(\gamma)\gamma_1']\,dt =$$

$$\int_\gamma \vec{h}_1 + i\int_\gamma \vec{h}_2$$ dove

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \qquad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

[DUE CAMPI $\vec{h}_1$ e $\vec{h}_2$ sono irrotazionali:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{(per le C.R.)}$$]

Quindi se γ_1 e γ_2 sono omotope in Ω e se f olomorfa in Ω $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Teorema (tipo teorema fond. del calcolo int.) Sia $f = u + iv$ olomorfa in Ω. Siano

$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$ $\quad h_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$. Allora sono equivalenti

(a) h_1 e h_2 sono conservativi

(b) esiste una PRIMITIVA di f, cioè una $F : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che $F' = f$.

(c) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ su ogni γ chiusa

(d) $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ se $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

Inoltre se $z_0 \in \Omega$, se vale una di queste la primitiva F si scrive:

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \text{dove } F(z_0) \text{ è arbitrario}$$

è l'int. su una qualunque curva da z_0 a z.

Dim. (c) e (d) sono modi di esprimere (a) per quanto già visto. Vediamo che (a) $\Leftrightarrow$ (b)

(a) $\Rightarrow$ (b) Se $\vec{h}_1$ e $\vec{h}_2$ sono conservativi esistono H_1 e H_2 potenziali per $\vec{h}_1$ e $\vec{h}_2$ cioè:

(★) $\dfrac{\partial H_1}{\partial x} = u \qquad \dfrac{\partial H_1}{\partial y} = -v, \quad \dfrac{\partial H_2}{\partial x} = v, \quad \dfrac{\partial H_2}{\partial y} = u$

$(\nabla H_1 = \vec{h}_1 \quad , \nabla H_2 = \vec{h}_2 \quad)$. Poniamo

$$F(z) = H_1(x,y) + i H_2(x,y)$$

Vediamo che ⊛ $\Rightarrow$ valgono le C.R. per F.

$\Rightarrow$ F è olomorfa e si ha

$$F' = \frac{\partial}{\partial x} F = u + i v = f \qquad \left(= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} F \right)$$

Qui si vede anche che se γ congiunge z_0 a z

$$\int_\gamma f dz = \int_\gamma \vec{h}_1 + i \vec{h}_2 = H_1(z) + i H_2(z) - H_1(z_0) - i H_2(z_0)$$
$$= F(z) - F(z_0)$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Supponiamo che $\exists$ F primitiva di f.

$F = F_1 + i F_2$. Devono valere C.R. per F.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = - \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

inoltre se $F' = f = u + i v$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = u \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = v \qquad \Rightarrow \quad \nabla F_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} = \vec{h}_1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -v \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = u \qquad \nabla F_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} = \vec{h}_2$$

$\Rightarrow$ F_1 è un potenziale per $\vec{h}_1$, F_2 è un potenziale per $\vec{h}_2$ #

Valgono tutti i teoremi di "calcolo delle derivate" del caso reale:

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(f \cdot g)' = f'g + f g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$$

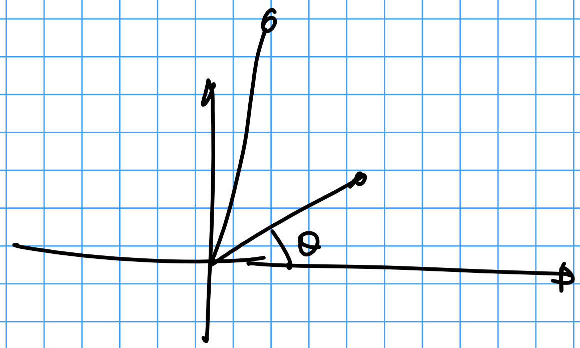
$\vdots$

Vari esempi

- $f(z) = z$ è olomorfa e $f'(z) = 1$
- $f(z) = z^k$ è derivabile e $f'(z) = k z^{k-1}$ $(k \in \mathbb{Z})$
- se $P(z)$ è un polinomio $P(z) = a_k z^k + \dots + a_0$
  $\Rightarrow$ P è derivabile e $P' = a_k \cdot k z^{k-1} + \dots + a_1$
- Se P e Q sono polinomi $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ è olomorfa

su $\mathbb{C} \setminus \{$ radici di $Q \}$ (funzione razionale)

$$z \to z^2$$



- $f(z) = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos(b) + i\sin(y))$

$u(x,y) = e^{x}\cos(y)$

$v(x,y) = e^{x}\sin(y)$

vediamo che valgono C.R.

$$\frac{\partial}{\partial x} u = e^{x}\cos(y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{x}\sin(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x}\sin(y) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{x}\cos(y)$$

$\Rightarrow$ f è olomorfa e $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f(z)$

Prendiamo $k \in \mathbb{Z}$. Domanda: esiste una primitiva di z^{k} ?? - Sì se $k \neq -1$ perché

$F(z) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$ ha come derivata z^{k} !!

Se ne deduce che se γ è una curva chiusa che non passa per zero (almeno se $K<0$)

$$\int_\gamma z^K \, dz = 0$$

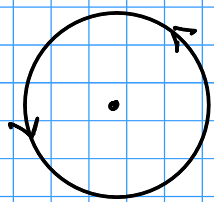
dato che z^K ha primitiva.

Cosa succede se $K=-1$; cioè se $f(z)=\frac{1}{z}$??

Facciamo un calcolo: prendo $\gamma(t)=Re^{it}$ $0\leq t\leq 2\pi$

γ descrive la circonferenza di centro 0 e raggio R

$\gamma'(t)= iRe^{it}$



Calcoliamo $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{Re^{it}}} \cdot i\cancel{Re^{it}}\,dt = 2\pi i$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{z}$ NON HA UNA PRIMITIVA SU $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

NON $\exists$ $F: \mathbb{C}\setminus\{0\}$, olomorfa, con $F'(z)=\frac{1}{z}$

<u>Nota</u> $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ NON PUÒ ESSERE SEMPLICEMENTE CONNESSO perché se lo fosse ogni camp irrotazionale sarebbe conserv.

$\Rightarrow$ ogni funzione olomorfa avrebbe primitiva (in effetti "si vede" che $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ "ha un buco")

COMMENTO AL TEOREMA DI PRIMA:

Se Ω è semplicemente connesso e f è olomorfa su Ω
$\Rightarrow$ f ha primitiva

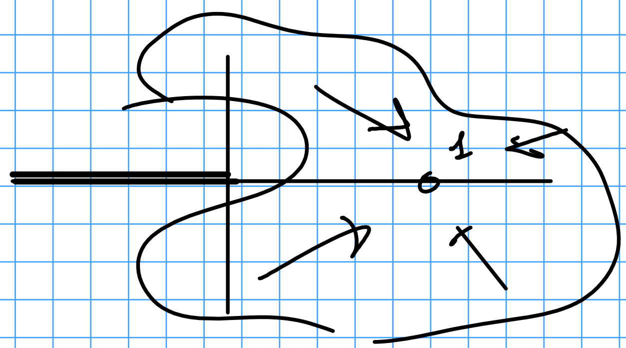
Nota che z^K con $K \le -2$ ha primitiva su $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
anche se $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ NON è semplicemente connesso.
L'unico K "cattivo" è $K=-1$

Se però tolgo a $\mathbb{C}$ tutti i reali ≤ 0

$$\mathbb{C}^+ = \{ z = x+iy \ : \ \text{o } y \neq 0 \text{ oppure } y=0 \ x>0 \}$$

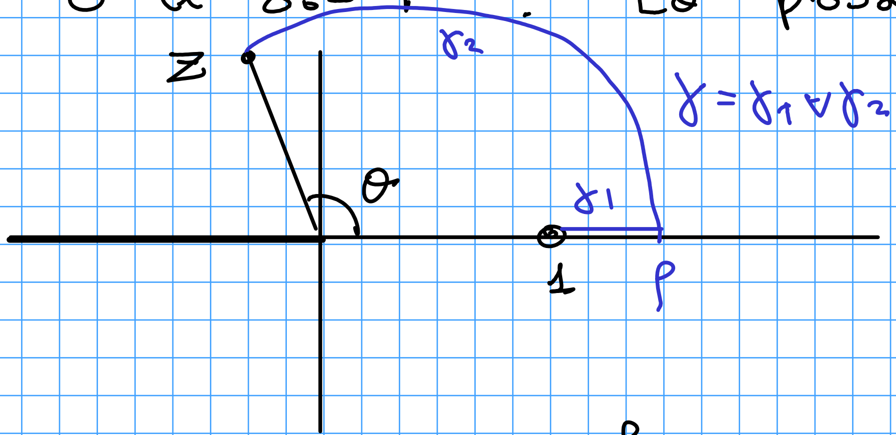
su tale insieme $\frac{1}{z}$ ha primitiva:

(si può dim. che $\mathbb{C}^+$ è semplicemente connesso



si può fare una costruzione
esplicita che trasforma ogni
curva nella costante 1)

Vediamo qual è la primitiva di $\frac{1}{z}$ che vale 0 in $z_0 = 1$. La posso calcolare così:



Preso $z \in \mathbb{C}^+$ lo collego a 1 con la curva blu

$z = \rho e^{i\theta}$

con $-\pi < \theta < \pi$

$\gamma_2(t) = \rho e^{it} \quad 0 \le t \le \theta$

$$F(z) = \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_1^\rho \frac{1}{x}\, dx + \int_0^\theta \frac{1}{\cancel{\rho e^{it}}}\, i \cancel{\rho e^{it}}\, dt$$

$$= \ln(\rho) + i\,\theta$$

dunque se $z = \rho e^{i\theta}$ $\quad F(z) = \ln \rho + i\theta$

cioè $\quad F(z) = \ln|z| + i \,\mathrm{Arg}_0(z)$

dove Arg_0 è "l'argomento principale" $-\pi < \mathrm{Arg}_0 \le \pi$

(dato che mi sono ristretto a $\mathbb{C}^+$ $\quad \mathrm{Arg}_0 \in \,]-\pi, \pi[\,$)

Tale F è una "possibile determinazione di $\ln(z)$"

Si vede facilmente che $e^{F(z)} = e^{\ln|z| + i\,Arg_0(z)} =$

$e^{\ln|z|} \cdot e^{i\,Arg(z)} = z$

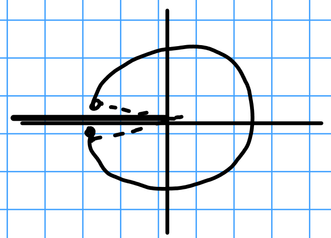
È chiaro perciò che in $\mathbb{C}$ e^{z} NON È INVERTIBILE per cui non è possibile trovare $\ln(z)$ su tutto $\mathbb{C}$.

<u>NOTA</u> se $\gamma(t) = Re^{it}$ $-\pi \le t \le \pi$, si è visto che

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

(<u>indipendente</u> dal raggio R torna col fatto che due circonferenze di raggi diversi sono <u>omotope</u>)

Lo posso capire da questo fatto: sia $\varepsilon > 0$ e prendiamo $\gamma_\varepsilon(t) = Re^{it}$, $-\pi+\varepsilon \le t \le \pi-\varepsilon$



È facile vedere che

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz$$

Ma γ_ε va in $\mathbb{C}^+$ e in $\mathbb{C}^+$ esiste il logaritmo come detto sopra $\Longrightarrow$

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z}\,dz = F(\gamma_\varepsilon(\pi-\varepsilon)) - F(\gamma_\varepsilon(-\pi+\varepsilon)) =$$

$$F\left(Re^{i(\pi-\varepsilon)}\right) - F\left(Re^{i(-\pi+\varepsilon)}\right) =$$

$$\cancel{\ln R} + i(\pi-\varepsilon) - \cancel{\ln(R)} - i(-\pi+\varepsilon) = 2\pi i - 2\varepsilon i \to \underline{\underline{2\pi i}}$$

Se considero $\gamma_k(t) = Re^{it}$ con $0 \le t \le 2k\pi$

(k giri) trovo $\displaystyle\int_{\gamma_k} \frac{1}{z}\, dz = \underline{\underline{2k\pi i}}$

---

per curiosità vediamo come è fatto $\frac{1}{z}$ (da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$(x,y) \longrightarrow \frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} h_1 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \\ h_2 = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \end{cases}$$

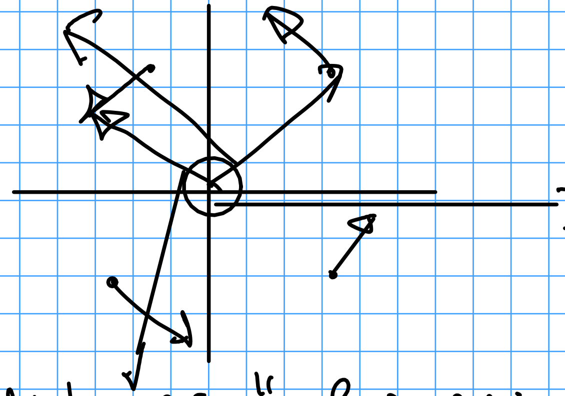
allora i due campi h_1 e h_2 sono

$$h_1(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boxed{h_2(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}}$$

questo è conservativo (ha come primitiva $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$)

ruota

h_2

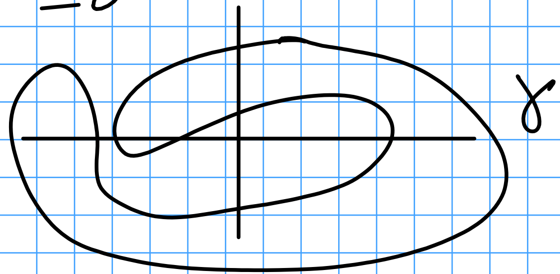


$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cdot h_2(x,y) = \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

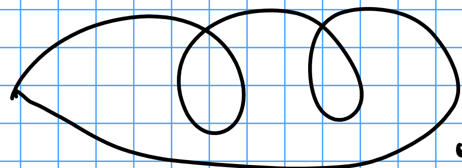
h_2 è sempre "di traverso" al raggio!! ($\sim$ VORTICE IN ZERO)

<u>NOTA</u> Se γ è una curva chiusa che NON GIRA INTORNO A ZERO (?? la posso deformare a un pto senza passare da zero)

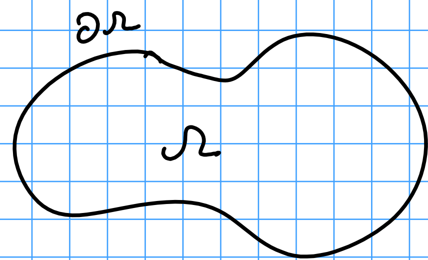
$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$$



Finora abbiamo fatto integrali sulle curve. Voglio ora introdurre l'integrale sul bordo di Ω

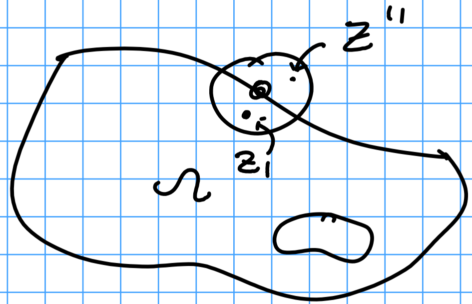


SI INTRECCIA



Def. Sia Ω un aperto. Ricordo che

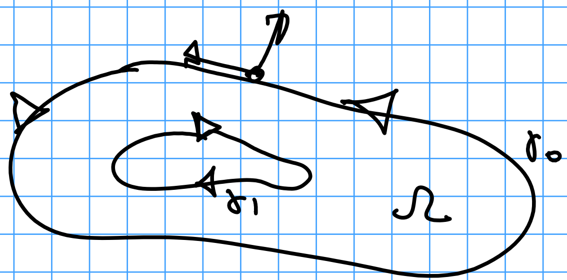
$$\partial\Omega = \{ z : \text{per ogni } \rho>0 \text{ ci sono punti } z' \in \Omega \text{ e } z'' \notin \Omega \text{ con } |z-z'|<\rho \,,\ |z-z''|<\rho \}$$



$\boxed{\Omega \text{ LIMITATO}}$

Dico che Ω è regolare a tratti se $\partial\Omega$ è l'unione dei supporti di $\gamma_0\ \gamma_1 \ldots \gamma_k$ dove

- $\gamma_0 \ldots \gamma_k$ sono curve chiuse regolari a tratti
- ogni γ_j non si autointerseca: $\gamma_j : [a,b] \to \mathbb{C}$ e se $a<t'<t''<b \Rightarrow \gamma_j(t') \neq \gamma_j(t'')$
- i supporti delle γ_j sono mutuamente disgiunti
- ogni curva è percorsa "compatibilmente con Ω": Ω rimane a sinistra di γ all'avanzare del parametro



Definisco
$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{k} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz$$

(si vede, con un po' di pazienza, che questo integrale non cambia se descrivo $\partial\Omega$ con curve diverse, purché rispettino le condizioni dette — si può passare da una descrizione all'altra mediante riparametrizzazioni)

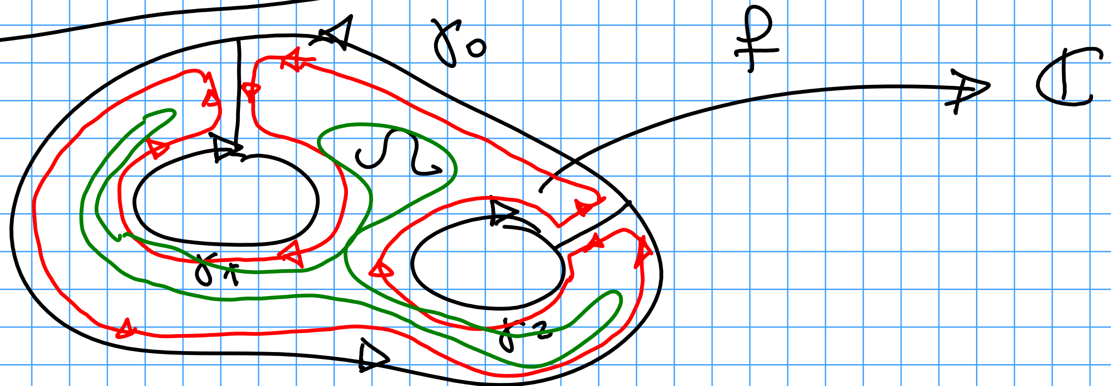
LA DEF. è ben posta

La def. non dipende solo da $\partial\Omega$ ma da Ω. Se $B = \{x^2+y^2<1\}$
$\Rightarrow \partial B = S = \{x^2+y^2=1\} = \partial(\mathbb{C}\setminus B)$, Ma $\int_{\partial B} f(z)\,dz = -\int_{\partial(\mathbb{C}\setminus B)} f(z)\,dz$

Teorema (di Cauchy) Se Ω è regolare, se f è olomorfa su Ω e continua su $\overline{\Omega} = \Omega\cup\partial\Omega$
$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0$$

IDEA DI DIM

Se $\partial\Omega$ è come in figura



$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \sum_{j=0}^{K} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma_*} f(z)\,dz \Rightarrow 0$$

curva rossa

perché γ si deforma in un pto

CONTA L'ORIENTAZIONE SCELTA

(si potrebbe vedere che, con le def. fatte,

$$\int_{\Omega} rot(\vec{f}) = \int_{\partial\Omega} \vec{f}$$

Per esempio se c'è solo γ_0 $\Rightarrow$ $\int_{\gamma_0} f(z) = 0$

(e in effetti Ω deve essere semplicemente connesso)

Se ci sono altre componenti i vari contributi vanno contati in modo opportuno - seguendo l'orientazione corretta.