Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

Percorso di Eccellenza 2011

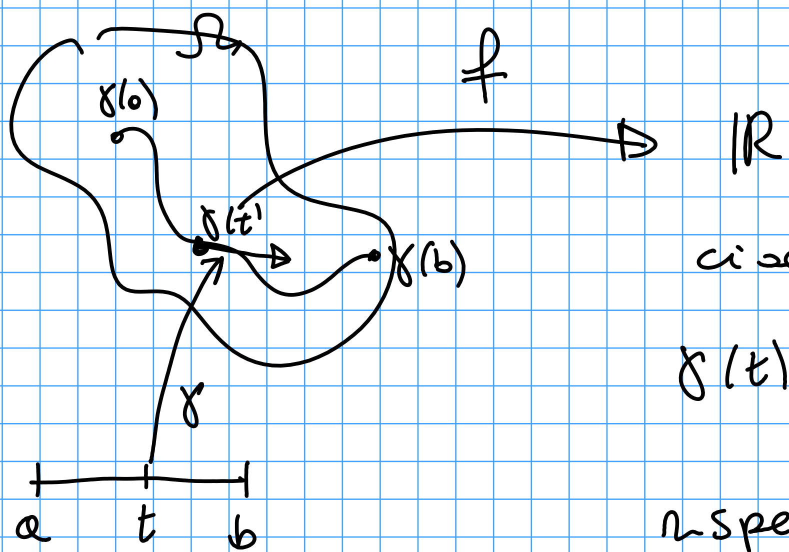
Lezione 2, 24 marzo 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

$$\nabla f(x_1 \dots x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N}(x) \end{pmatrix} \qquad \text{GRADIENTE DI } f$$

$(f \text{ da } \Omega \to \mathbb{R})$

Conseguenza della formula (derivata della funzione composta):



Ho $f : \Omega \to \mathbb{R}$

Ho una "curva in Ω"

cioè una funzione $\gamma : [a,b] \to \Omega$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix}$, derivabile

rispetto a $t \in [a,b]$

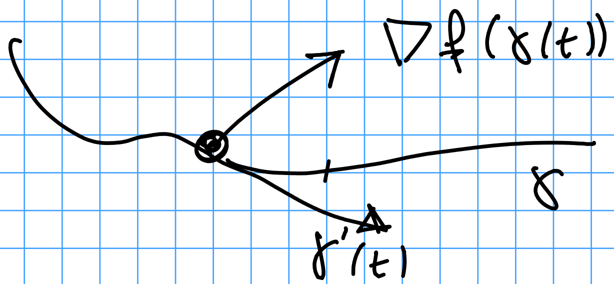
Allora posso considerare $g(t) = f(\gamma(t)) \quad ([a,b] \to \mathbb{R})$

Per quanto visto si ha:

$$g'(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial x_j} \cdot \gamma_j'(t) = \boxed{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$$

prodotto scalare tra il gradiente e $\gamma'(t)$

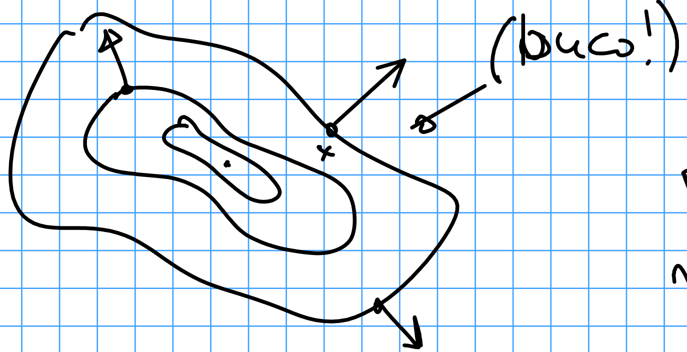
$\gamma'(t)$ RAPPRESENTA IL VETTORE "VELOCITÀ" DI $\gamma(t)$ CHE È TANGENTE A $\gamma(t)$ (in particolare $|\gamma'(t)|$ è il modulo della velocità)



SI CAPISCE ALLORA $g'(t)$ è massimo se $\gamma'(t)$ e $\nabla f(\gamma(t))$ sono paralleli.

Al contrario se $\gamma(t)$ percorre una "curva di livello" cioè se $f(\gamma(t)) =$ costante $\Rightarrow$ $g'(t)=0$ $\Rightarrow$

$\nabla f(x)$ è ortogonale alla curva di livello che passa per x



(tutto questo se $\nabla f(\gamma(t)) \neq 0$)

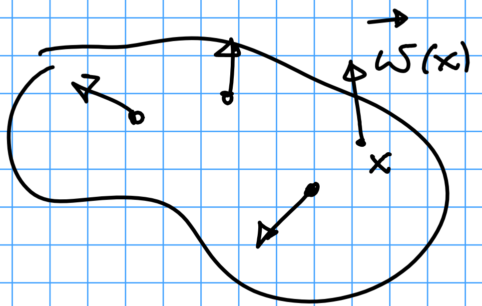
$\nabla f(x)$ è la direzione di massima crescita a partire da x

<u>FATTO</u> Se x_0 è pto di max/min rel. per f, x_0 INTERNO a Ω $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0) = 0$

(a non interessa più di tanto...)

CAMPI VETTORIALI E POTENZIALI

DEF Chiamo "campo" in $\mathbb{R}^N$ una funzione $\vec{\omega} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (vado da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$)



Dico che $\vec{\omega}$ è continuo se tutte le sue componenti sono continue.
che è differenziabile se ....

DEF. Dico che $\vec{\omega}$ è <u>conservativo</u> se esiste una funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che F è diff. e

$$\vec{\omega}(x) = \nabla F(x) \iff \omega_1(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, \dots, \omega_N = \frac{\partial F}{\partial x_N}(x)$$

In questo caso dico che F è un <u>POTENZIALE</u> per $\vec{\omega}$

OSS. Se $\vec{\omega}$ è differenziabile allora

$\vec{\omega}$ conservativo $\Rightarrow$

$$\omega_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$\omega_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} F}_{} \; ; \; \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} F}_{}$$

SE C'È UN MINIMO DI REGOLARITÀ DI F queste derivate miste DEVONO COINCIDERE

(Teorema di Schwarz: se f ha derivate seconde CONTINUE $\Rightarrow$ le derivate miste non dipendono dall'ordine con cui sono fatte)

DUNQUE se $\vec{\omega}$ ha derivate (I°) continue e se è conservativo, VALE:

$$\boxed{\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \qquad \text{quando } i \neq j}$$

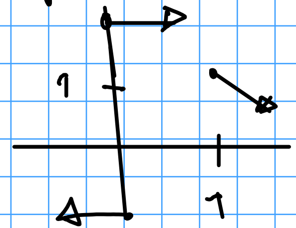
si dice che $\vec{\omega}$ è IRROTAZIONALE. Quindi

FATTO (IMPORTANTE)

$\vec{\omega}$ CONSERVATIVO $\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ IRROTAZIONALE

(CONDIZIONE NECESSARIA: per esempio

$\vec{\omega}(x,y) = (y, -x)$



NON È CONSERVATIVO:

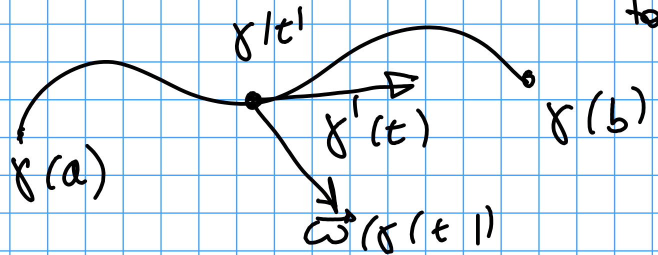
$$\frac{\partial}{\partial y}\omega_1 = 1 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\omega_2 = -1 \qquad (\neq)$$

È IMPORTANTE CAPIRE QUANDO VALE "$\Longleftarrow$". (Lo vediamo dopo)

Def. Data una curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$ e dato un campo continuo $\vec{\omega} : \Omega \to \mathbb{R}^N$, considero l'integrale "di linea"

$$\boxed{\oint_\gamma \vec{\omega} \underset{DEF}{=} \int_a^b \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt} \quad (*)$$

prodotto scalare (l'integrando è la "componente di $\vec{\omega}$ lungo la tangente a $\gamma(t)$)

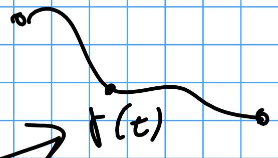


(IN FISICA RAPPRESENTA IL LAVORO DEL CAMPO, RISPETTO A γ)

<u>VARI FATTI</u> (1) INVARIANZA PER RIPARAMETRIZZAZIONI

Se $\varphi : [c, d] \to [a, b]$, derivabile, con $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$, e se $\gamma_1(s) = \gamma(\varphi(s))$

$$[c,d] \xrightarrow{\varphi} [a,b] \xrightarrow{\quad\Omega\quad}$$



$$\Rightarrow \quad \oint_{\gamma_1} \vec{\omega} = \int_{\gamma} \vec{\omega} \qquad \left(\text{basta fare un cambio di variabile } t = \varphi(s) \text{ in } *\right)$$

(riparametrizzando non cambia il percorso – solo la "legge oraria"). (2) Se invece $\varphi(c) = b \quad \varphi(d) = a$

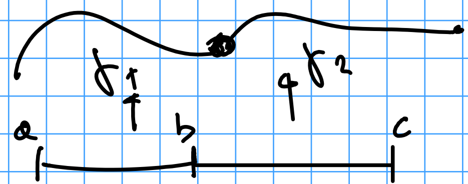
$$\oint_{\gamma_1} \vec{\omega} = - \oint_{\gamma} \vec{\omega} \qquad \text{(stessa dim.)}$$

(3) Se γ_1 e γ_2 sono "consecutive":

$\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$

$\gamma_2 : [b,c] \to \Omega$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$



Posso considerare $\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & a \le t \le b \\ \gamma_2(t) & b \le t \le c \end{cases}$

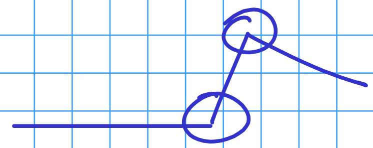
$$\Rightarrow \quad \oint_{\gamma} \vec{\omega} = \oint_{\gamma_1} \vec{\omega} + \int_{\gamma_2} \vec{\omega}$$

INOLTRE <u>NON SERVE</u> che gli intervalli di partenza siano contigui – posso sempre riparametrizzare e "metterle" "in fila" Per es. $\gamma_1:[0,1]\to\Omega$, $\gamma_2:[0,1]\to\Omega$,

posso riparametrizzare la γ_2 in modo che $1\leq t\leq 2$

(l'importante è che $\boxed{\gamma_1(1)=\gamma_2(0)}$

- NON È MOLTO IMPORTANTE DOVE VARIA t
- NON È NECESSARIO CHE γ SIA DERIVABILE IN OGNI t:



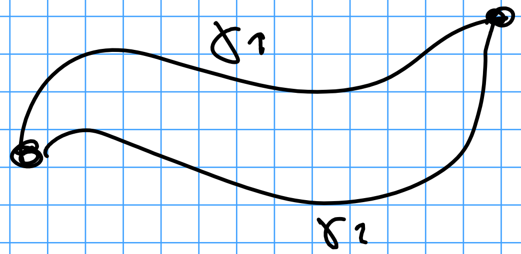
Posso considerare γ "regolare a tratti" se γ è derivabile tranne che in un numero finito di punti, è CONTINUA e $\gamma'(t)$ è comunque limitata.

TEOREMA Un campo $\vec{\omega}:\Omega\to\mathbb{R}^N$ è CONSERVATIVO IN Ω SE E SOLO SE $\forall\gamma:[a,b]\to\Omega$ regolare a tratti

$$\oint_\gamma \vec{\omega} \quad \text{DIPENDE SOLO DA } \gamma(a) \text{ e } \gamma(b)$$

(cioè se γ_1 e γ_2 sono curve da $[a,b]\to\Omega$, reg. a tratti con $\gamma_1(a)=\gamma_2(a)$, $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ $\Longrightarrow$)

$$\oint_{\gamma_1} \vec{\omega} = \oint_{\gamma_2} \vec{\omega}$$



Idea di dim.

- Se $\vec{\omega}$ è conservativo $\Rightarrow \vec{\omega} = \nabla F$. Allora

$$\oint_{\gamma} \vec{\omega} = \int_a^b \vec{\omega}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \underbrace{\nabla F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt} =$$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

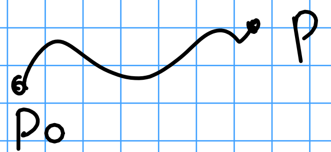
dipende solo da $\gamma(b)$ e $\gamma(a)$

- Per il viceversa si fissa $P_0 \in \Omega$ e si pone

$$F(P) = \oint_{\gamma} \vec{\omega}$$

dove γ congiunge P_0 e P

(do per buono che due punti P e P_0 si possono congiungere con una curva — Ω è CONNESSO)



F è ben definito per l'ipotesi fatto. Si VEDE (- - -) che F è potenziale per $\vec{\omega}$.

<u>NOTA</u> Nel teorema precedente si vede anche che

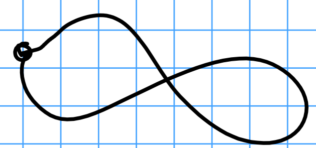
$$\oint_\gamma \vec{\omega} = F(P) - F(P_0)$$

se γ congiunge P_0 e P

UN ALTRO MODO DI DIRE LA COSA:

$\vec{\omega}$ È CONSERVATIVO $\Longleftrightarrow$ $\oint_\gamma \vec{\omega} = 0$ $\forall \gamma$ CURVA CHIUSA

DOVE $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è <u>chiusa</u> se $\gamma(a) = \gamma(b)$



Torniamo al problema CONSERVATIVO $\longleftrightarrow$ IRROTAZIONALE

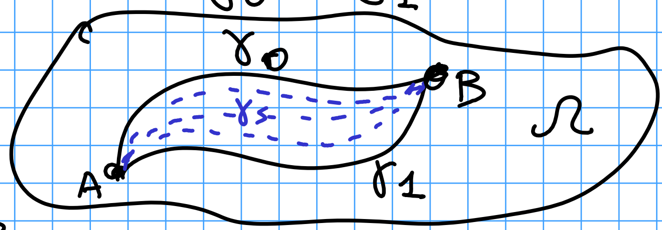
<u>Definizione</u> Prendiamo due curve γ_0 e γ_1 che abbiano gli stessi estremi:

$\gamma_0 : [0,b] \to \Omega$

$\gamma_1 : [0,b] \to \Omega$

$\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = A$

$\gamma_1(b) = \gamma_2(b) = B$



Dico che γ_0 è OMOTOPA a γ_1 se esiste una funzione $H: [a,b]\times[0,1] \to \Omega$ $(H(t,s))$

- CONTINUA (nelle due variabili) e tale che
- $\forall s \in [0,1]$ $H(a,s) = A$, $H(b,s) = B$

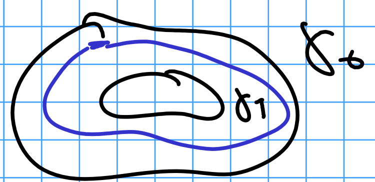
(se si pone $\gamma_s(t) = H(t,s)$ γ_s è una curva in Ω che parte da A e arriva in B - γ_s "dipende con continuità da s")

- se $t \in [a,b]$ $H(t,0) = \gamma_0(t)$ $H(t,1) = \gamma_1(t)$

(OMOTOPIA A ESTREMI FISSI)

DEF. Se γ_0 e γ_1 sono curve chiuse dico che sono OMOTOPE (come curve chiuse) se $\exists\ H: [a,b]\times[0,1] \to \Omega$, CONTINUA E TALE CHE

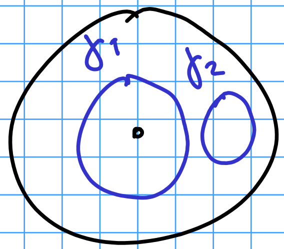
- $\forall s$ $H(a,s) = H(b,s)$
- $\forall t$ $H(t,0) = \gamma_0(t)$, $H(t,1) = \gamma_1(t)$



TEOREMA. Se $\vec{\omega}: \Omega \to \mathbb{R}^N$ è IRROTAZIONALE IN Ω e se γ_1 e γ_2 sono omotope (a estremi fissi / come curve chiuse)

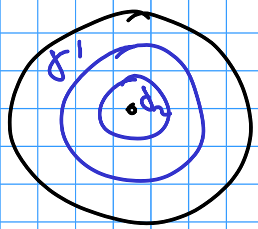
$$\Rightarrow \quad \oint_{\gamma_1} \vec{\omega} = \oint_{\gamma_2} \vec{\omega}$$

ESEMPI Se mi metto in $D^* = \{0 < x^2 + y^2 < 1\}$



γ_1 γ_2 NON SONO OMOTOPE

NON POSSO PASSARE PER $(0,0)$!!



γ_1 e γ_2 SONO OMOTOPE

DEF. Dico che Ω è SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni curva chiusa è omotopa a una curva costante.

MORALMENTE sto chiedendo che Ω "non abbia buchi"

D^* NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO

TEOREMA Se Ω è semplicemente connesso e $\vec{\omega}$ è irrotazionale $\Rightarrow$ $\vec{\omega}$ è CONSERVATIVO.

Dim. Preso γ curva chiusa $\to$ γ è omotopa a γ_0 curva costante $\Rightarrow$

$$\oint_\gamma \vec{\omega} = \oint_{\gamma_0} \vec{\omega} = 0$$

(è evidente, per def., che $\oint_{\gamma_0} \vec{\omega} = 0$)