# Analisi Complessa e Funzioni Armoniche in due variabili

## Percorso di Eccellenza 2011

## Lezione 1, 10 marzo 2011

Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata Ulisse Dini.
http://saccon.blog.dma.unipi.it (email sul sito)
ricevimento: lunedì ore 8,30 presso il D.M.A.

Oggetto del corso:

Studio delle proprietà delle funzioni complesse di variabile complessa che siano DERIVABILI. Al contrario del caso reale tali funzioni sono MOLTO REGOLARI (se hanno la derivata prima automaticamente hanno infinite derivate e molte altre proprietà).
Queste funzioni si rivelano molto utili per descrivere problemi di fisica e di geometria.
Vedremo in particolare che esse coincidono con le FUNZIONI ARMONICHE in due variabili, che sono alla base dello studio dell'elettrostatica e di molti altri campi della Fisica Matematica.

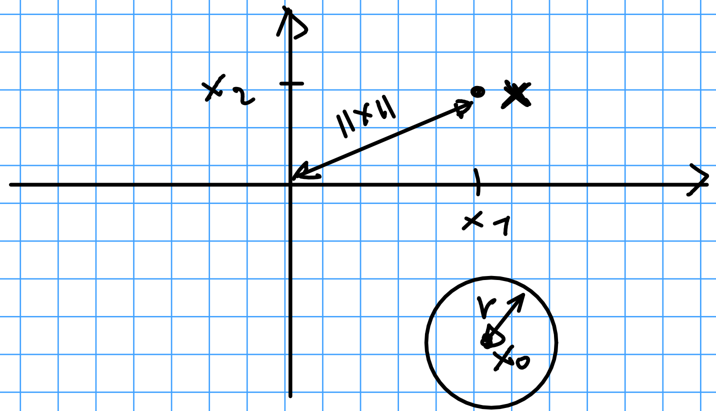
I testi delle lezioni saranno disponibili sul sito
http://saccon.blog.dma.unipi.it/lezioni-per-il-percorso-di-eccellenza-2011/
assieme a una dispensa (in fase di rielaborazione)

# Calcolo differenziale in più variabili. (a noi servono 2 variabili)

$$\mathbb{R}^N = \{(x_1 \dots x_N),\ x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}\}$$

in $\mathbb{R}^N$ è definita la norma

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_N)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$$




Se $x$ e $y$ sono due punti di $\mathbb{R}^N$, chiamo DISTANZA TRA $x$ e $y$ il numero $\|x - y\| =$

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2}$$

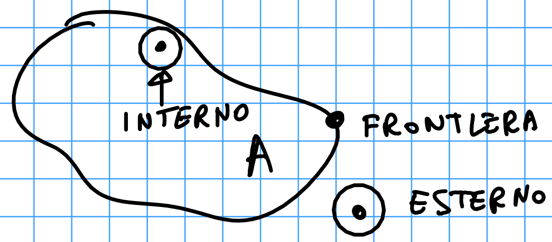
## LIMITE (in più variabili)

(1) - Dato $r>0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, chiamo disco di centro $x_0$ e raggio $r$ l'insieme

$$D(x_0, r) = \{x : \|x - x_0\| < r\}$$

Se $A \subset \mathbb{R}^N$ dico che

- $x_0$ è INTERNO ad $A$, quando $\exists\, r>0$ per cui $D(x_0, r) \subset A$
- $x_0$ è ESTERNO ad $A$, se $\exists\, r>0$ tale che $D(x_0, r) \cap A = \emptyset$




- di FRONTIERA per $A$ se NON È NÉ INTERNO, NÉ ESTERNO
- di ACCUMULAZIONE se per ogni $r>0$ esiste $x$ con $x \in A$, $x \neq x_0$ e $x \in D(x_0, r)$
  (ci sono punti in $A$, diversi da $x_0$, vicini quanto voglio a $x_0$)

- $A$ si dice APERTO quando tutti i suoi punti sono INTERNI ($\Leftrightarrow$ non contiene la frontiera)
- $A$ si dice CHIUSO quando contiene tutti i suoi pti di frontiera

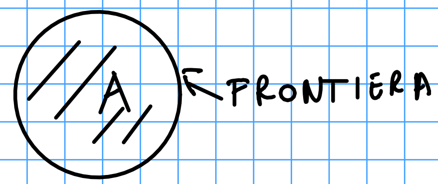
- SE $N=1$ $A =$ INTERVALLO, $A$ chiuso $\Leftrightarrow$ $A$ contiene gli estremi. $x_0$ di frontiera $\Leftrightarrow$ $x_0$ è un estremo

<u>ESEMPIO</u> $A = \{ x : \|x\| \leq 1 \}$ (disco chiuso di raggio 1)

allora $A$ è chiuso e la sua frontiera è

$$\{ \mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| = 1 \}$$

$\uparrow$ circonferenza




---

$f : A \to \mathbb{R}^M$ (ARRIVO) con $A \subset \mathbb{R}^N$ (PARTENZA)

$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ di accumulazione per $A$, $\ell \in \mathbb{R}^M$

**Def.** Dico che $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \ell$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che per $\mathbf{x} \in D(\mathbf{x}_0, \delta) \cap A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ si ha $\| f(\mathbf{x}) - \ell \| < \varepsilon$

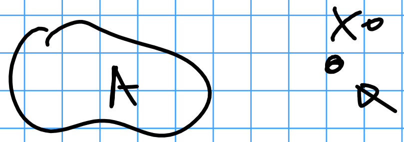
($f(\mathbf{x})$ si avvicina a $\ell$ quando $\mathbf{x}$ si avvicina a $\mathbf{x}_0$)

Valgono le solite proprietà dei limiti (quando hanno senso).

**CONTINUITÀ** Se $f : A \to \mathbb{R}^M$, $\mathbf{x}_0 \in A$ dico che $f$ è continua in $x_0$ quando:

- $\boxed{x_0 \text{ è di accumulazione per } A \text{ e } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

- $x_0$ non è di accumulazione




qui qualunque $f$ è continua
(a noi non interesserà mai!)

(varie proprietà delle funzioni continue, ..., Weierstrass, ...)

<u>FATTO</u> Se $f: A \to \mathbb{R}^M \Rightarrow f(x_1 \dots x_N) = f_1(x_1 \dots x_N), \dots, f_M(x_1, \dots, x_N))$

$f$ è continua in $x_0 \iff$ tutte le sue "componenti" $f_1(\text{—}), \dots, f_M(x_1 \dots x_N)$ (che vanno da $A \to \mathbb{R}$) sono continue in $x_0$. ("posso trattare ogni componente per conto suo")

## CALCOLO DIFFERENZIALE

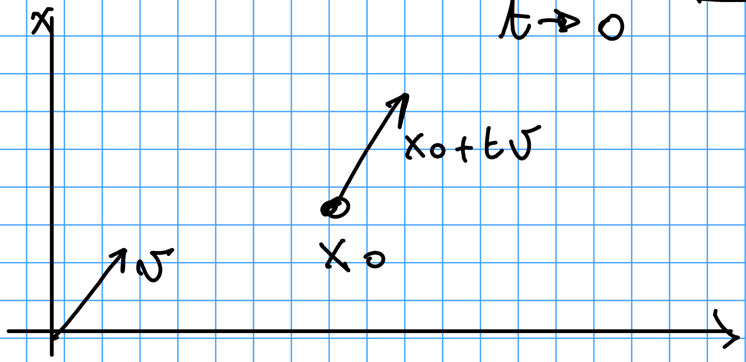
<u>Def.</u> (derivata direzionale) $A \subset \mathbb{R}^N$, $x_0$ INTERNO ad $A$,

$f: A \to \mathbb{R}^M$. Se fisso un vettore $v \in \mathbb{R}^N$ posso considerare

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = f'(x_0)(v)$$

(se esiste).

DERIVATA DI $f$ IN $x_0$ LUNGO LA DIREZIONE $v$




Posso dire che $f$ è <u>derivabile "secondo Gateaux"</u> in $x_0$ se esiste la derivata direzionale rispetto a ogni $v$

PURTROPPO (se $N>1$) questa proprietà è troppo debole, non implica per esempio che $f$ sia continua in $x_0$.

MI SERVE UNA PROPRIETÀ PIÙ FORTE:

<u>Def.</u> $x_0$ interno ad $A$, $f : A \to \mathbb{R}^M$. Dico che $f$ è DIFFERENZIABILE IN $x_0$ se esiste una mappa lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$$

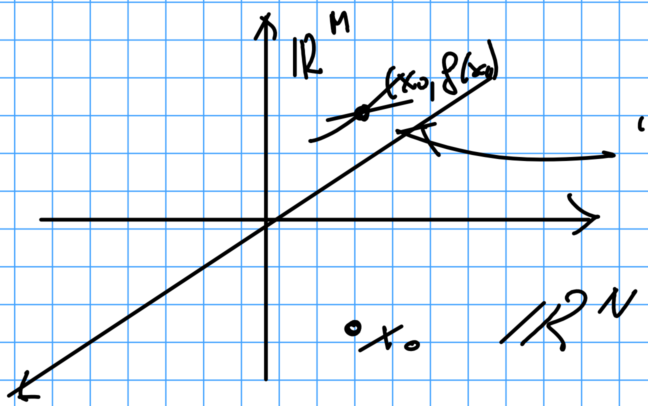
equivalentemente deve succedere che

$$f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x)$$

con $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{\|x - x_0\|} = 0$ (cioè $r(x)$ infinitesimo di ordine superiore a $\|x - x_0\|$)

$\leadsto$ si può approssimare $f(x)$ con $\underbrace{f(x_0) + L(x - x_0)}$

mappa "affine" che ha come grafico il piano tangente




"ci dovrebbe essere il piano tangente" (il grafico di $f$ è vicino a un piano)

di equazione $z = f(x_0) + L(x - x_0)$

SI VEDE CHE

(1) se $f$ è differenziabile

$$f'(x_0)(v) = Lv \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

(dove $L$ è quella della definizione) In particolare

$v \mapsto f'(x_0)(v)$ è lineare in $v$ (COSA FALSA IN GENERALE)

$\Rightarrow$ <u>$L$ è unico</u>. Posso chiamare $L$

il DIFFERENZIALE di $f$ in $\mathbf{x}_0$ e indicarlo

con $\boxed{df(\mathbf{x}_0)}$ : $df(\mathbf{x}_0)$ è l'unica mappa

lineare da $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ t.c.

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

e si può chiamare PIANO TANGENTE IL PIANO

$$z = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

<u>Def.</u> Chiamo derivate parziali le derivate direzionali rispetto ai "versori" $\hat{e}_1 \dots \hat{e}_N$ dove

$$e_1 = (1, 0 \dots 0) \quad \dots e_N = (0, \dots, 1)$$

IN SOSTANZA se $\mathbf{x}_0 = (x_1^0 \dots x_N^0)$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \text{derivata di } f(x_1^0 \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posto } i\text{-esimo}}}{x} \dots x_N^0)$$

IN DUE VARIABILI

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0) = \lim_{x \to x_1^0} \frac{f(x, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0)}{x - x_1^0}$$

Allora se $f$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$

$df(\mathbf{x}_0)$ è rappresentato da una <u>matrice</u>

con M righe ed N colonne $(M \times N)$

$$J_f(\mathbf{x}_0) = \left( \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_N} \right)$$ ← MATRICE JACOBIANA (IN $\mathbf{x}_0$)

$$f(x) = f(x_0) + J_f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

PRODOTTO MATRICE × VETTORE

<u>Teorema</u> (differenziale totale) Se $f$ ha le derivate parziali in tutto un disco $D(x_0, r)$ $(r > 0)$ e queste derivate sono continue in $\mathbf{x}_0$ $\Rightarrow$ $f$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0$

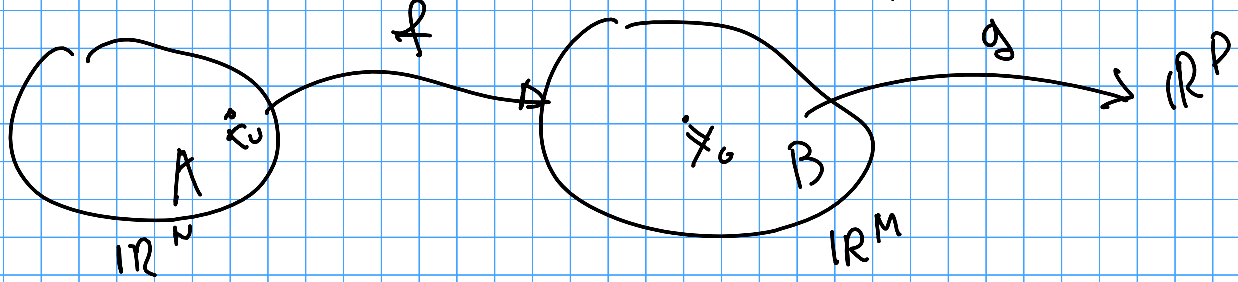
($\Rightarrow$ VALE TUTTO QUANTO SEGUE DALLA DIFFERENZIABILITÀ)

VALGONO TUTTI I RISULTATI CHE "SI POSSONO IMMAGINARE"

(somme, prodotti (se hanno senso)) —

NON È OVVIO IL SEGUENTE

**Teorema** (di composizione). Se $f: A \to B$, $x_0$ INTERNO AD $A$, $B \subset \mathbb{R}^M$, $y_0 = f(x_0)$ INTERNO A $B$, $g: B \to \mathbb{R}^P$




$f$ differenziabile in $x_0$, $g$ differenziabile in $y_0$ $\Longrightarrow$

$g \circ f$ è differenziabile in $x_0$ e

$$d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$$

IN TERMINI DI MATRICI JACOBIANE HO

$$J_{g\circ f}(x_0) = J_g(y_0) \bullet J_f(x_0)$$ ($\bullet$ è il prodotto tra matrici)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial (g\circ f)_j}{\partial x_i}(x_0) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(x) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x_0)$$

$i = 1 \dots N$

$j = 1 \dots P$

$\left( J_f(x_0) = (a_{ij}) \right.$ dove $a_{ij} = \dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$

$$\mathbb{R}^N \xrightarrow{f} \overset{K}{\mathbb{R}^M} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^P$$

CASO IMPORTANTE $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$J_f(x_0)$ è una matrice $1 \times N$

$$J_f(x_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)$$

Chiamo GRADIENTE DI $f$ IN $x_0$ il VETTORE

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (\text{tutto in } x_0) \quad = \nabla f(x_0)$$

(nabla)

TALE VETTORE HA LA PROPRIETÀ:

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$

$$= f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N}(x_0) \cdot (x_N - x_N^0) + o(-)$$

QUESTO IMPLICA CHE

$$f'(x_0)\,v = \nabla f(x_0) \cdot v$$

prodotto scalare

DUNQUE IL GRADIENTE INDICA LA DIREZIONE VERSO LA QUALE $f$ CRESCE DI PIÙ

(se prendo tutte le direzioni $v$, con $\|v\|=1$, la quantità $\nabla f(x_0)\cdot v$ è massima se $v = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$

(a patto che $\nabla f(x_0) \neq 0$) e il modulo $\|\nabla f(x_0)\|$

dice "quanto" cresce (lungo tale direzione)

SI PUÒ VEDERE CHE IL GRADIENTE È PERPENDICOLARE ALLE LINEE DI LIVELLO DI $f$