DOMANDE/ESERCIZI[1]

Proposizione	Vera	Falsa
$A \subset [0,2]$ implica $\exists\ \sup A$	☐	☐
$A \subset [0,2]$ implica $\exists\ \max A$	☐	☐
$A \subset [0,2[$ implica $\exists\ \sup A$	☐	☐
$A \subset [0,2[$ implica ˜$(\exists\ \max A)$	☐	☐
$\sup A = 3$ implica $3 \in A$	☐	☐
$\sup A = 3$ implica $3 \notin A$	☐	☐
$(\sup A = 3) \wedge (3 \in A)$ implica $3 = \max A$	☐	☐

Proposizione	Vera	Falsa
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f \leq 1$	☐	☐
$f : [0,1] \to]-1,1[$ implica f limitata	☐	☐
$f : [0,1] \to]0,2[$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f \leq 2$	☐	☐
$f : [0,1] \to]0,2[$ implica $\sup\limits_{[0,1]} f = 2$	☐	☐
$f : [0,1] \to]0,2[$ implica che non esiste $\max\limits_{[0,1]} f$	☐	☐

$\sup\{y : (\exists x \in \mathbb{R} : y = \cos(x))\} =$	
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : x = \cos(y))\} =$	
$\sup\{x : \cos(x) = 1\} =$	
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : \cos(x) = y + 1)\} =$	
$\inf\{y : (\exists x \in [0,2[: y = -x^2 + 4)\} =$	
$\inf\{x : 4x - 2 \geq 10\} =$	
$\inf\{y : \forall x \in]-1,1[\quad 1 - x^2 < y)\} =$	

[1] cfr. http://www2.ing.unipi.it/ d8702/matematica/test00.html (prof. M. Franciosi)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

funzione	iniettiva ?	surgettiva ?
$f(x) = 2x - 5$		
$f(x) = x^2$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = x^2 + 4x + 4$		
$f(x) = \cos(x)$		
$f(x) = x^3 - x^2$		
$f(x) = x^3 - x$		
$f(x) = 2^x$		
$f(x) = 3^{-x}$		
$f(x) = 2^{1+x^2}$		
$f(x) = \ln(1 + x^2)$		
$f(x) = \sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$		
$f(x) = \lvert x - 3\rvert$		
$f(x) = x^{2000} + 2000$		

$f(x)$	A	$f(A)$	B	$f^{-1}(B)$
$2x-4$	$[0,3]$		$[0,2]$	
x^2	$[0,3]$		$[0,4]$	
x^3	$[0,3]$		$[0,27]$	
x^2+4x+4	$[-2,1]$		$[0,4]$	
$\cos(x)$	$[0,\pi]$		$[-2,2]$	
$f(x)$	A	$f(A)$	B	$f^{-1}(B)$
$\sin(x)$	$[0,\pi]$		$[1,2]$	
2^x	$]-\infty,0[$		$[1,+\infty[$	
$\ln(x)$	$]0,1]$		$[1,e^2]$	
$\lvert x-3\rvert$	$[2,4]$		$[0,2]$	
3^x	$\mathbb{R}$		$[1,3]$	

- Dimostrare che
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Dimostrare che
$$1+3+5+\cdots+(2n+1) = \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$$

- $(*)$ Trovare un polinomio $p(x)$ di grado quattro tale che
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = p(n)$$
Suggerimento: si cerchi $p(x)$ in modo che
$$p(0)=0 \text{ e } p(x+1)=p(x)+(x+1)^3$$
e poi si applichi l'induzione.

Svolgimento. Come da suggerimento cerchiamo

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

in modo che $p(0) = 0$ e $p(x+1) = p(x) + (x+1)^3$. La prima condizione equivale a $e = 0$. Cerchiamo di verificare la seconda:

$$a\left[(x+1)^4 - x^4\right] + b\left[(x+1)^3 - x^3\right] + c\left[(x+1)^2 - x^2\right] + d\left[(x+1) - x\right] = (x+1)^3$$

Ricordando la formula

$$A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i}B^i$$

prendendo $A = x+1$ e $B = x$, si passa alla condizione:

$$\begin{aligned}
&a\left[(x+1)^3 + x(x+1)^2 + x^2(x+1) + x^3\right] + \\
&b\left[(x+1)^2 + x(x+1) + x^2\right] + \\
&c\left[(x+1) + x\right] + \\
&d\left[1\right] = (x+1)^3
\end{aligned}$$

Cerchiamo di ottenere delle condizioni su a, b, c, d dalle condizioni sopra (senza sviluppare tutto – cosa che comunque si potrebbe fare). Se cerchiamo i coefficienti di x^3 notiamo che questi possono uscire solo dalla prima riga e dal termine $(x+1)^3$ Si vede allora che

$$4ax^3 + \text{polinomio di grado più basso} = (x^3+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

da cui $a = \dfrac{1}{4}$. Inoltre se calcoliamo le condizioni sopra per $x = 0$, troviamo

$$a + b + c + d = 1$$

mentre se mettiamo $x = -1$ viene

$$-a + b - c + d = 0$$

Purtroppo manca ancora una condizione. Mettendo $x = 1$ si trova

$$a\left[2^3 + 2^2 + 2 + 1\right] + b\left[2^2 + 2 + 1\right] + c\left[2 + 1\right] + d\left[1\right] = 2^3$$

e in definitiva il sistema

$$\begin{cases} a = & \dfrac{1}{4} \\ a+b+c+d = & 1 \\ -a+b-c+d = & 0 \\ 15a+7b+3c+d = & 8 \end{cases}$$

Sostituendo la seconda e la terza riga con le loro rispettive somme e differenze:

$$\begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ 2b+2d = & 1 \\ 2a+2c = & 1 \\ 15a+7b+3c+d = & 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ c = & \frac{1}{4} \\ 2b+2d = & 1 \\ \frac{15}{4}+7b+\frac{3}{4}+d = & 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ c = & \frac{1}{4} \\ 2b+2d = & 1 \\ 7b+d = & \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ c = & \frac{1}{4} \\ b = & \frac{1}{2} \\ d = & 0 \end{cases}$$

e quindi

$$p(x) = \frac{x^4+2x^3+x^2}{4} = \frac{x^2(x^2+2x+1)}{4} = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$$

In effetti (verifica)

$$\begin{aligned} p(x)+(x+1)^3 = \frac{x^2(x+1)^2}{4} + (x+1)^3 = \frac{(x+1)^2}{4}\left[x^2+4(x+1)\right] = \\ \frac{(x+1)^2}{4}\left[x^2+4x+4\right] = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{4} = p(x+1) \end{aligned}$$

A questo punto è facile dimostrare per induzione che:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = p(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$\square$