Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica
Trentatreesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

17 dicembre 2009

Trasformata di Laplace (per distribuzioni a supporto dx/sx)

Def.

$$\mathcal{D}_+ = \{ \varphi \in \mathcal{E} : \exists\, a \text{ per cui } \operatorname{spt}(\varphi) \subset [a, +\infty[\}$$

$$\mathcal{D}_- = \{ \varphi \in \mathcal{E} : \exists\, b \text{ per cui } \operatorname{spt}(\varphi) \subset]-\infty, b] \}$$

$$\mathcal{D}'_+ = \{ u \in \mathcal{D}' : \exists\, a \text{ per cui } \operatorname{spt}(u) \subset [a, +\infty[\}$$

$$\mathcal{D}'_- = \{ u \in \mathcal{D}' : \exists\, b \text{ per cui } \operatorname{spt}(u) \subset]-\infty, b] \}$$

Fatto

$u \in \mathcal{D}'_+ \iff u$ è lineare e continua su $\mathcal{D}_-$

$u \in \mathcal{D}'_- \iff u$ è lineare e continua su $\mathcal{D}_+$

Dico che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}_+} \varphi$ se ($\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}_-} \varphi$

- $\exists\, a$ $(\exists b)$ tale che $\forall n$ $\varphi_n(x) = 0$ per $x < a$ $(\forall x > b)$
- $\forall k$ $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ UNIF.

Come al solito indico con $\langle u, \varphi \rangle = u(\varphi)$

Posso anche definire: $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'_+} u \iff \langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_-$

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'_-} u \iff \langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_+$$

E' chiaro che se $u = T_f$ con f funzione dire che

$u \in \mathcal{D}'_+$ ($\mathcal{D}'_-$) equivale a dire che $\exists a$ $f(x) = 0$ per q.o. $x < a$ (per q.o. $x > a$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overbrace{\underset{\text{supp dx}}{f(x)} \; \underset{\text{supp sx}}{\varphi(x)}}^{\text{supp limitato}}$$

__Def.__ Sia $u \in \mathcal{D}'_+$. Chiamo ascissa di convergenza di u

il numero $\alpha(u) \in [-\infty, +\infty]$ definito da

$$\inf \{ x \in \mathbb{R} : e^{-xt} u(t) \in \mathcal{S}' \} \qquad (+\infty \text{ se l'insieme è vuoto})$$

Noto che ⊛ è una semiretta – dato che se $e^{-xt} u(t) \in \mathcal{S}'$

$\Rightarrow$ $e^{-yt} u(t) \in \mathcal{S}'$ per ogni $y > x$. Infatti

$$e^{-yt} u(t) = e^{-(y-x)t} \underbrace{e^{-xt} u(t)}_{\mathcal{S}' - \text{è nullo prima di } a}$$

lo posso modificare per $t < a$ in modo da renderlo nullo a $-\infty$ $\Rightarrow$ è limitato

& IL PRODOTTO $\in \mathcal{S}'$

Chiamo trasformata di Laplace di u $= \check{u} = \mathcal{L}(u)$

$$\check{u}(x+iy) = \mathcal{F}\left(e^{-xt} u(t)\right)(y) \qquad \text{per } x > \alpha(u)$$

A priori per $x > \alpha(u)$ fissato $\check{u}(x+iy)$ è in $\mathcal{S}'$ (rispetto a y)

Però posso dire di più

<u>Teorema</u> Per $x > \alpha(u)$ $y \mapsto \check{u}(x+iy)$ è una funzione di y. Inoltre $z \to \check{u}(z)$ è olomorfa e

$$\boxed{\frac{d^k}{dz^k}\check{u}(z) = (-1)^k \mathcal{L}(\underbrace{t^k u}_{\in \mathcal{D}'_+})(z)}$$

$\forall\, z$ con $\underline{\operatorname{Re} z > \alpha(u)}$

dove $\alpha(t^k u) = \alpha(u)$. (NO DIM.)

<u>Teorema</u> Se $u \in \mathcal{D}'_+$ ($\Rightarrow u^{(h)} \in \mathcal{D}'_+$) e

$$\boxed{\mathcal{L}(u^{(h)})(z) = z^h \check{u}(z)}$$

se $\operatorname{Re} z > \alpha(u^{(h)})$

<u>Dim.</u> Se $x = \operatorname{Re} z > \alpha(u^{(h)})$, Caso $h = 1$ (POI ITERO)

$$\mathcal{L}(u')(x+iy) = \mathcal{F}\left(e^{-xt} u'(t)\right)(y) =$$

$$\mathcal{Y}\left(\left(e^{-xt}u(t)\right)' + x\, e^{-xt} u(t)\right)(y) =$$

$$\mathcal{Y}\left(\left(e^{-xt}u(t)\right)'\right)(y) + x\, \check{u}(x+iy) =$$

$$iy\, \mathcal{Y}\left(e^{-xt}u(t)\right) + x\, \check{u}(x+iy) = (x+iy)\, \check{u}(x+iy)$$

__Teorema__ Se $u \in \mathcal{D}'_+$ e $T_0 \in \mathbb{R}$ $(\Rightarrow u_{T_0} \in \mathcal{D}'_+)$

e $\mathcal{L}(u_{T_0})(z) = e^{-T_0 z}\, \check{u}(z)$ $\quad (\alpha(u_{T_0}) = \alpha(u))$

(NO DIM)

__Teorema__ Se $u \in \mathcal{D}'_+$ e $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{z_0 t}u(t) \in \mathcal{D}'_+$

$\alpha(e^{z_0 t}u(t)) = \alpha(u) + \operatorname{Re} z_0$ e

$$\mathcal{L}(e^{z_0 t}u)(z) = \check{u}(z - z_0) \qquad \text{per } \operatorname{Re} z > \alpha(u) + \operatorname{Re} z_0$$

(NO DIM.)

Esempi

- $u = \delta$

$$\lambda(\delta) = \inf\{x : e^{-xt}\cdot\delta \in \mathcal{S}'\} = \inf\{x : \delta \in \mathcal{S}'\} = -\infty$$

INOLTRE

$$\check{\delta}(x+iy) = \mathcal{F}(e^{-xt}\delta(t))(y) = \mathcal{F}(\delta)(y) = 1$$

$$\boxed{\check{\delta} = 1}$$

- $u = \delta^{(k)} \Rightarrow \boxed{\check{u} = z^k}$

Teorema Sia $g(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ con P, Q polinomi

$\Rightarrow$ esiste $u \in \mathcal{D}'_{+,0} = \{u \in \mathcal{D}'_+ \text{ con } u = 0 \text{ su }]-\infty, 0[\}$

tale che $\check{u}(z) = g(z)$, per $\operatorname{Re} z > \lambda(u)$

dove $\alpha(w) = \max\{\operatorname{Re} w : Q(w)=0\}$

(supponendo che P e Q non abbiano radici comuni)

Dim. Posso scrivere $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = P_1(z) + \dfrac{R(z)}{Q(z)}$ dove

grado R < grado Q. Per quanto visto nelle funzioni

esiste f funzione L'exp, $f(t)=0$ per $x<0$, tale che

$\check{f}(z) = \dfrac{R(z)}{Q(z)}$ (e $\check{f}$ si calcola coi residui)

Se inoltre $P_1(z) = a_h z^h + \dots + a_0 \Rightarrow$

$u = a_h \delta^{(h)} + \dots + a_0 \delta + f$ ha la proprietà richiesta

Possiamo usare $\mathcal{L}$ per risolvere problemi con dato nullo prima di zero, con dato distribuzionale

Per es.

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \delta \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{x+i\mathbb{R}} \frac{e^{zt}}{z^2+2z+1}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ \sum \text{Res} & \text{se } t>0 \end{cases}$$

per vecchi motivi

Trasformo con Laplace

$$(z^2+2z+1)\,\check{y}(z) = 1 \iff \check{y}(z) = \frac{1}{z^2+2z+1}$$

Ho polo doppio in $z=-1 \Rightarrow$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t<0 \\ = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+1}, -1\right) = \frac{d}{dz} e^{zt}\Big|_{z=-1} = \end{cases}$$

$$t e^{zt}\Big|_{z=-1} = t e^{-t} .$$ Dunque $y(t) = H(t)\, t e^{-t}$

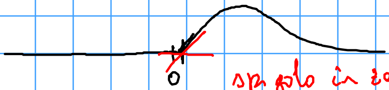
Facciamo una verifica:

$$y' = \underbrace{\delta\, t e^{-t}}_{=0} + H(t) e^{-t} - H(t) t e^{-t} = H(t) e^{-t}(1-t)$$

$$y'' = \underbrace{\delta\, e^{-t}(1-t)}_{=\delta} - H(t) e^{-t}(1-t) - H(t) e^{-t} =$$

$$\delta + H(t) e^{-t}(t-2)$$

$$y'' + 2y' + y = \delta + H(t) e^{-t}\left(\cancel{t} \cancel{-2} + \cancel{2} - \cancel{2t} \cancel{+t}\right) = \delta$$



spigolo in zero

HO DATO UNA "MARTELLATA"

Altro esempio

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = \delta'' \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Trasformo mediante Laplace.

$+2z+2-2z-2$

$$\Longrightarrow \quad \check{y}(z) = \frac{z^2}{z^2+2z+2} = 1 - \frac{2z+2}{z^2+2z+2}$$

$$y(t) = \delta - \text{antitrasf. di } \underline{\frac{2z+2}{z^2+2z+2}}$$

(Poli semplici in $-1 \pm i$

se $t<0$ viene 0, se $t>0$ viene

$$\frac{2z+\cancel{2}}{2z+\cancel{2}} e^{zt} \Big|_{z=-1+i} + \text{il coniugato} =$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(e^{-t}\,e^{i}\right) = 2e^{-t}\cos(t) \Rightarrow y(t) = \delta - 2H(t)\,e^{-t}\cos(t)$$

VERIFICA: $$y' = \delta' - 2\delta\, e^{-t}\cos(t) + 2H(t)\,e^{-t}\cos(t)$$

$$+\,2H(t)\,e^{-t}\sin(t) = \delta' - 2\delta + 2H(t)\,e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))$$

$$y'' = \delta'' - 2\delta' + 2\delta\, e^{-t}(\cos(t)+\sin(t)) - 2H(t)\,e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))$$

$$+\,2H(t)\,e^{-t}(-\sin(t)+\cos(t)) =$$

$$\delta'' - 2\delta' + 2\delta + H(t)\,e^{-t}(-2\sin(t))$$

$$y'' + 2y' + 2y = \delta'' - \cancel{2\delta'} + \cancel{2\delta} + \cancel{2\delta'} - \cancel{4\delta} + \cancel{2\delta}$$

$$+\,2H(t)\,e^{-t}\left(-\cancel{2\sin(t)} + \cancel{2\cos(t)} + \cancel{2\sin(t)} - \cancel{2\cos(t)}\right) = \delta''$$

Soluzione del problema di Cauchy: Per esempio:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 & \text{su } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \qquad y'(0) = -1 \end{cases}$$

<u>TRUCCO:</u> chiamo $v(t) = H(t)\, y(t)$ $\Rightarrow$ $v \in \mathcal{D}'_{+,0}$

che equazione risolve v ?

$$v'(t) = \delta \cdot y(t) + H(t)\, y'(t) = y(0)\, \delta + H(t)\, y'(t)$$

$$v''(t) = y(0)\, \delta' + \delta\, y'(t) + H(t)\, y''(t) =$$

$$y(0)\, \delta' + y'(0)\, \delta + H(t)\, y''(t) \implies$$

$$\begin{cases} v'' + 2v' + 2v = H(t)\underbrace{(y'' + 2y' + 2y)}_{\overset{!!}{0}} + y(0)\, \delta' + \underbrace{(y'(0) + 2y(0))}_{\text{ok}}\, \delta \\ v(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Se metto $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

$$\begin{cases} v''+2v'+2v = \delta'+\delta \\ v(t)=0 \quad \text{se } t<0 \end{cases} \Leftarrow \text{uso Laplace}$$

$$\check{v}(z)=\frac{+z+1}{z^2+2z+2}$$, antitrasformo con i residui

(poli semplici coniugati $-1\pm i$)

se $t>0$

$$v(t)= 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{+z+1}{2z+2}e^{zt}\Big|_{z=-1+i}\right)=$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2}e^{-t}e^{it}\right)= e^{-t}\cos(t)$$

$y(t)= e^{-t}\cos(t)$

VERIFICA $\quad y(0) = 1$

$$y'(t) = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \qquad y'(0) = -1$$

$$y''(t) = e^{-t}\cancel{\cos(t)} + 2e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cancel{\cos(t)}$$

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-t}\big(2\sin(t) - 2\cos(t) - 2\sin(t) + 2\cos(t)\big)$$

$$= 0 \quad !! \quad (\text{OK})$$

Collegamento tra trasformata di Fourier e serie di Fourier.

Sia $u \in \mathcal{D}'$ e sia $T > 0$.

Dico che u è T periodica se $u_T = u$.

Se $u \in \mathcal{S}'$ posso farci la trasf. di Fourier:

$$\hat{u} = \widehat{u_T} = e^{iT\omega}\,\hat{u}$$

DUNQUE $\underbrace{\left(e^{iT\omega}-1\right)}_{\text{è in } \mathcal{E}' \text{ e ha}}\hat{u}=0$ $\qquad T\omega = 2k\pi$

infiniti zeri semplici nei punti $\omega_k = \frac{2k\pi}{T} = k\omega_0$

(se $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$). Dunque per i discorsi fatti

$$(*) \quad \boxed{\hat{u} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_k \delta_{k\omega_0}} \quad \text{per } \gamma_k \in \mathbb{C}$$

"Lo spettro di u" è concentrato nei multipli di ω_0

Se u "è una funzione assolutamente sommabile su $[0,T]$"

vediamo chi sono i γ_k – Fisso $\langle \hat{u}, \varphi \rangle$

con $\varphi(\omega) = \psi(\omega - k_0\omega_0)$ (ψ DEFINITA SOTTO)

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = T\,\gamma_{k_0} \qquad \left(\text{perché } \varphi(k\omega_0) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq k_0 \\ T & \text{se } k = k_0 \end{cases}\right)$$

$$\parallel$$

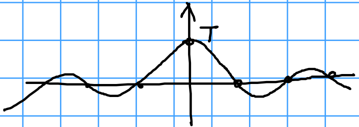
$$\langle u, \hat{\varphi} \rangle = \gamma_{k_0}$$

$$\parallel$$

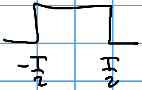
$$\hat{\varphi}(t) = 2\pi\, 1_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} \cdot e^{-k_0\omega_0 t}$$ dunque

$$\gamma_{k_0} = \frac{2\pi}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, e^{-k_0\omega_0 t}\, dt = 2\pi\, c_{k_0}$$ dove

c_{k_0} = coeff di Fourier.



$f(t) =$



$$\hat{f}(\omega) = \boxed{\frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{T}{2}\omega\right)} \quad \text{se } \omega \neq 0$$

$$= T \quad \text{se } \omega = 0$$

se $\psi(\omega) = \hat{f}(\omega) \Rightarrow \hat{\varphi}(t) = 2\pi f(-t) = 2\pi\, 1_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$