# Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica
# Trentaduesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

16 dicembre 2009

Abbiamo visto che se $u \in \mathcal{E}'$ posso definire

$$\hat{u}(\omega) = \langle \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{E}'}}{u(x)}, \underset{\substack{\uparrow \\ \mathcal{E}}}{e^{-i\omega x}} \rangle$$ (trasf. di Fourier di $u$)

**Fatti** (a) $\hat{u} \in \mathcal{E}$ e si ha

$$D^k \hat{u} \left( = \frac{d^k}{d\omega^k} \hat{u}(\omega) \right) = (-i)^k \widehat{x^k u(x)}(\omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{(iD)^k \hat{u}(\omega) = \widehat{x^k u(x)}(\omega)}$$

(b) $$\boxed{(i\omega)^k \hat{u}(\omega) = \widehat{D^k u(x)}(\omega)},$$

perché $\widehat{D^k u(x)}(\omega) = \langle D^k u(x), e^{-i\omega x} \rangle =$

$(-1)^k \langle u(x), D^k e^{-i\omega x} \rangle = (-1)^k (-i\omega)^k \langle u(x), e^{-i\omega x} \rangle$

$(i\omega)^k \hat{u}(\omega)$

(c) $$\widehat{u_{T_0}}(\omega) = e^{-iT_0\omega}\,\hat{u}(\omega)$$

(d) $$\widehat{e^{i\omega_0 x}u(x)}(\omega) = \hat{u}_{\omega_0}(\omega) = \hat{u}(\omega-\omega_0)$$

Infatti

(c) $$\widehat{u_{T_0}}(\omega) = \langle u_{T_0}(x), e^{-i\omega x}\rangle = \langle u(x), e^{-i\omega(x+T_0)}\rangle =$$

$$\langle u(x), e^{-iT_0 x}\, e^{-i\omega x}\rangle = \langle e^{-iT_0 x}u(x), e^{-i\omega x}\rangle =$$

$$= \widehat{e^{-iT_0 x}u(x)}(\omega)$$

(d) $$\widehat{e^{i\omega_0 x}u(x)}(\omega) = \langle e^{i\omega_0 x}u(x), e^{-i\omega x}\rangle =$$

$$\langle u(x), e^{i\omega_0 x}\, e^{i\omega x}\rangle = \langle u(x), e^{ix(\omega-\omega_0)}\rangle = \hat{u}(\omega-\omega_0)$$

(e) e le altre prop. trovate nel caso di $u \in L^1/L^2$

Per andare avanti dobbiamo "indovinare" una formula

di tipo integrale che possa "passare alle distribuzioni"

Tale formula è:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, g(\omega)\, d\omega = \int f(x)\, \hat{g}(x)\, dx}$$

che vale se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ (la dim. dipende dalla possibilità di fare uno scambio nell'ordine di integrazione - bisognerebbe usare Fubini-Tonelli)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, g(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\omega x} dx \right) g(\omega)\, d\omega \overset{(!!)}{=}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} g(\omega)\, d\omega \right) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \hat{g}(x)\, dx$$

DUNQUE <u>L'IDEA</u> È DI DEFINIRE $\hat{u}$ mediante

$$(*)\quad \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

PURTROPPO se $\varphi \in \mathcal{D}$ $\hat{\varphi} \notin \mathcal{D}$ IN GENERALE — NON posso scrivere $(*)$. Invece $\hat{\varphi} \in \mathcal{E}$ e quindi $(*)$ ha senso se $u \in \mathcal{E}'$ (e si vede che mi ridò la def. di prima). PERÒ DA $(*)$ POSSO tirare fuori di più. Vediamo come.

<u>Def.</u> Dico che una funzione $\varphi$ è "rapidamente decrescente" se $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e se $\forall h, k$ interi

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^{k}\varphi^{(h)}(x) = 0 \quad / \quad$$ potrei anche dirlo (SI VEDE) $\boxed{x^{k}\varphi^{(h)} \in L^{1}}$

(le $\varphi$ e tutte le sue derivate tendono a zero più rapidamente di qualunque potenza). Chiamo $\mathcal{S}$ l'insieme di tali funzioni (spazio di Schwartz).

Per esempio $f(x) = e^{-x^{2}} \in \mathcal{S}$. Chiaramente $\mathcal{S}$ è uno spazio lineare $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Definisco anche

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad \text{se} \quad \forall h\, k \quad x^{k}\varphi_n^{(h)} \xrightarrow{\text{UNIF.}} x^{k}\varphi^{(h)}$$

NOTA

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi .$$

Oss. (★★) Se $\boxed{\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \hat{\varphi} \in \mathcal{S}.}$ Prendiamo $h, k$

$$\omega^h D^k \hat{\varphi}(\omega) = \frac{\omega^h}{(i)^k} \widehat{x^k \varphi(x)}(\omega) =$$

$$\frac{1}{(i)^{2k}} \widehat{D^h x^k \varphi(x)}$$

è somma di $\widehat{\underbrace{x^p D^q \varphi(x)}_{\in L^1}} \Rightarrow$ lo dosf. $\to 0$

Si può anche vedere che, se $\underbrace{\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}.}_{(★★)}$

(SI DIMOSTRA)

**Def.** Dico che $u$ è una distribuzione temperata $- u \in \mathcal{S}' -$ se

$u : \mathcal{S} \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ lineare e continua (rispetto alla conv. di $\mathcal{S}$)

Come prima scrivo $\langle u, \varphi \rangle$ al posto di $u(\varphi)$

Per quanto visto si ha

$$\boxed{\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'}$$

Per es. se $u \in \mathcal{S}'$ allora

(a) $u$ è in particolare lineare su $\mathcal{D}$ $(\mathcal{D} \subset \mathcal{S})$

(b) $u$ è continuo rispetto a $\mathcal{D}$, infatti

$(u \in \mathcal{S}')$

se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \langle u, \varphi_n \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$

<u>Prop.</u> (1) Se $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow u^{(k)} \in \mathcal{S}' \quad \forall k$

(segue dal fatto che se $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi^{(k)} \in \mathcal{S}$ e l'opera=zione $\varphi \to \varphi^{(k)}$ è continua in $\mathcal{S}$)

(2) Se $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow x^k u \in \mathcal{S}'$

(dipende dal fatto che, se $\varphi \in \mathcal{S} \Rightarrow x^k \varphi(x)$ e

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow x_i^k \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} x_i^k \varphi$)

(3) Se $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow e^{i T_0 x} u \in \mathcal{S}'$ (tipo 2)

(in generale potrei dire che $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow \psi u \in \mathcal{S}'$ se

$\psi$ cresce al più come una potenza)

(4) Se $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow u_{T_0} \in \mathcal{S}'$.

<u>Prop.</u> Sono distribuzioni temperate tutte le funzioni $f$ che all'infinito crescono al più come delle potenze e quindi tutte le derivate (distribuzionali) di tali funzioni (NO DIM.)

Per esempio sono in $\mathcal{S}'$

$f(x) = 1$, $\quad f(x) = H(x)$, $\quad f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 


$f(x) = \ln(|x|)$ e quindi tutti gli $\dfrac{1}{x^k}$

(nel senso detto la volta scorsa)

Def. Se $u \in \mathcal{S}'$ posso definire la sua trasformata di Fourier $\mathcal{F}(u)$, $\hat{u}$, mediante $(*)$:

$$(*) \qquad \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

La def è ben posta a causa di $(**)$

Dunque $\hat{u}$ non esiste per TUTTE LE DISTRIBUZIONI –

Per esempio $f(x) = e^{x^2} \notin \mathcal{S}'$ (è una funzione –

quindi è una distribuzione – ma non è una distribuzione tempe-

rata in quanto $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \varphi(x)\, dx$ non si può fare

per TUTTE le $\varphi \in \mathcal{S}$ – per esempio non posso prendere

$\varphi(x) = e^{-x^2}$.

<u>ESEMPI</u> $f(x) = 1$ è (una funzione) in $\mathcal{S}'$

$\hat{1} = ??$ Applico la definizione: se $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = \langle 1, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(x)\, dx = 2\pi\, \varphi(0)$$

DATO CHE

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)\, d\omega$$

RIASSUMENDO

$$\langle \hat{1}, \varphi \rangle = 2\pi\, \varphi(0) = \langle 2\pi\delta, \varphi \rangle$$

$$\boxed{\hat{1} = 2\pi\,\delta}$$

Proprietà delle trasformate in $\mathcal{S}'$

Sia $u \in \mathcal{S}'$

se $h$ INTERO

(uso $\omega$ per "MOTIVI GRAFICI")

(a) $(i\omega)^h\, \hat{u}(\omega) = \widehat{D^h u}\,(\omega)$

(b) $(iD)^h\, \hat{u}(\omega) = \widehat{x^h u(x)}\,(\omega)$

(c) se $t_0 \in \mathbb{R}$ $\quad e^{-it_0\omega}\,\hat{u}(\omega) = \widehat{u(t-t_0)}(\omega)$

(d) se $\omega_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \widehat{e^{i\omega_0 t}u(t)}(\omega) = \hat{u}(\omega-\omega_0)$

(e) le altre ( $\widehat{u^*}$, $\hat{\bar{u}} = \cdots$ ) come nel caso delle funzioni

<u>Dim</u> (a) Sia $\varphi \in \mathcal{S}$ ; si ha:

$$< (i\omega)^k \hat{u}(\omega), \varphi(\omega) > = < \hat{u}(\omega), (i\omega)^k \varphi(\omega) > =$$

$$< u(x), \widehat{(i\omega)^k \varphi(\omega)}(x) > = < u(x), (-1)^k D^k \hat{\varphi}(x) > =$$

(proprietà di $\mathcal{F}$ sulle $\varphi$ di $\mathcal{S}$)

$$< D^k u(x), \hat{\varphi}(x) > = < \widehat{D^k u(x)}(\omega), \varphi(\omega) >$$

def di derivata distrib.

DUNQUE $(i\omega)^k \hat{u}(\omega) = \widehat{D^k u(x)}(\omega)$

(b), (c), (d), (e) si fanno in modo analogo.

ANTITRASFORMATA

Se $u \in \mathcal{S}'$ si ha

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(u)) = 2\pi u^{*}$$

Esempi (trasformate notevoli)

(1) $u = (v.p.)\frac{1}{t}$ So che $u \in \mathcal{S}'$, mi chiedo chi è $\hat{u}$?

So che $tu = 1$. Se trasformo ottengo

$\widehat{tu} = 2\pi\delta$ Ma $\widehat{tu} = iD\hat{u}$

quindi $D\hat{u} = -2\pi i\,\delta$ CIOÈ $\hat{u}$ è una primitiva di $-2\pi i\delta$

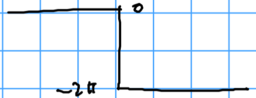
Ne segue (ANALOGO AI CASI CLASSICI $u'=0 \Leftrightarrow u$ costante) $\hat{u}(\omega) = -2\pi i\,H(\omega) + c$

per una costante $c$ in $\mathbb{C}$ COME TROVO $c$ ??

Noto che $u^* = -u$ ( $u = (v.p.)\frac{1}{t}$ è dispari — $\ln|t|$ è pari )

$\Rightarrow$ (proprietà (e)...) $\hat{u}$ E' DISPARI, quindi $c$ deve

essere tale che $-2\pi i H + c$ sia dispari. $c = \pi i$




DUNQUE

$$\hat{u}(\omega) = -\pi i \, sgn(\omega)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right)(\omega) = -\pi i \, sgn(\omega)}$$

(2) Trasformando la formula sopra trovo

$$\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right)(\omega) = -\pi i \; \mathcal{F}(sgn(x))(\omega) \iff$$

$$\cancel{-} 2\cancel{\pi} \; \frac{1}{\omega} = \cancel{-}\cancel{\pi} i \; \mathcal{F} sgn(x)(\omega)$$ CIOÈ

$$\boxed{\mathcal{F}(\text{sgn}(x))(\omega) = -\frac{i}{\omega}} \qquad -\frac{i}{2}\frac{1}{\omega} + \pi\delta$$

(3) Dato che $H(t) = \dfrac{\text{sgn}(t) + 1}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{F}(H(t)) = \frac{-i}{2\omega} + \pi\delta}$$

**Esempio** Dato $u \in \mathcal{S}'$ posso cercare le sol. di

$$\begin{cases} y'' + a y = u \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

Posso trasformare e trovo

⊛ $\left(-\omega^2 + a\right)\hat{y} = \hat{u}$

SUPPONGO $a < 0$ ⊛ È EQUIVALENTE A $\hat{y} = -\dfrac{\hat{u}}{\omega^2 + a}$
$a = -\ell^2$

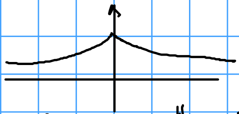
(perché $\psi(\omega) = \dfrac{1}{\omega^2 + a} \in \mathcal{E}$ e dunque ha senso considerare $\hat{u} \cdot \psi$)

Per esempio se $u = \delta$ TROVO $\hat{\delta} = 1$

$\hat{y}(\omega) = -\dfrac{1}{\omega^2 + \ell^2}$ posso antitrasformare nella funzione usando i residui (RADICI $\pm i\ell$)

$$y(t) = \begin{cases} i \dfrac{-e^{i\omega t}}{2\omega}\Big|_{\omega = i\ell} = \dfrac{-e^{-\ell t}}{2\ell} & \text{se } t > 0 \\ -i \dfrac{-e^{i\omega t}}{2\omega}\Big|_{\omega = -i\ell} = -\dfrac{e^{\ell t}}{2\ell} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$= -\frac{1}{2\ell} e^{-|\ell t|}$$



VERIFICHIAMO CHE $y$ risolve $y'' - \ell^2 y = \delta$

$$y(t) = -\frac{1}{2\ell} e^{-\ell|t|}$$

$$y'(t) = -\frac{-\ell}{2\ell} e^{-\ell|t|} \cdot \operatorname{sgn}(t) = \frac{e^{-\ell|t|}}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

$$y''(t) = -\ell \frac{e^{-\ell|t|}}{2} \underbrace{\operatorname{sgn}(t) \cdot \operatorname{sgn}(t)}_{1} + \frac{e^{-\ell|t|}}{2} \cdot 2\delta =$$

$$- \ell^2 \frac{e^{-\ell|t|}}{2\ell} + e^{-\ell|t|} \cdot \delta = \ell^2 y(t) + \delta$$

<u>CASO</u> $a = \ell^2 > 0$, $u = \delta$. Trasformo e trovo

$$(\ell^2 - \omega^2)\, \hat{y} = 1 \iff$$

( $\ell^2 - \omega^2$ ha due radici in $\pm \ell$

$$\hat{y} = \text{"}\frac{1}{\ell^2 - \omega^2}\text{"} + \lambda \delta_\ell + \mu \delta_{-\ell}$$

$$\frac{1}{2\ell}\left(-\frac{1}{\omega - \ell} + \frac{1}{\omega + \ell}\right)$$ NEL SENSO DEL V.P.

$$\hat{y} = \frac{1}{2\ell}\left(\frac{1}{\omega+\ell} - \frac{1}{\omega-\ell}\right) + \lambda\delta_{\ell} + \mu\delta_{-\ell} \qquad (\lambda,\mu\in\mathbb{C})$$

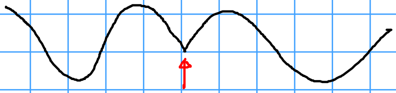
ANTITRASFORMO RICORDO CHE

$$\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t))(\omega) = -\frac{i}{\omega} \Longrightarrow \mathcal{F}\left(\frac{i\,\mathrm{sgn}(t)}{2\ell}\right)(\omega) = \frac{1}{2\ell\omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(e^{i\ell t}\,\frac{i\,\mathrm{sgn}(t)}{2\ell}\right)(\omega) = \frac{1}{2\ell}\,\frac{1}{\omega-\ell} \quad / \quad \mathcal{F}\left(e^{-i\ell t}\,\frac{i\,\mathrm{sgn}(t)}{2\ell}\right)(\omega) = \frac{1}{2\ell}\,\frac{1}{\omega+\ell}$$

$$\Rightarrow y(t) = i\,\frac{-e^{i\ell t} + e^{-i\ell t}}{2\ell}\,\mathrm{sgn}(t) + 2\pi\lambda\, e^{i\ell t} + 2\pi\mu\, e^{-i\ell t} =$$

$$\mathrm{sgn}(t)\,\frac{1}{\ell}\sin(\ell t) + \lambda'\sin(\ell t) + \mu'\cos(\ell t) \qquad \lambda',\mu'\in\mathbb{R}$$



VERIFICA con $\lambda' = \mu' = 0$

$$y(t) = \frac{1}{\ell}\, \mathrm{sgn}(t) \sin(\ell t)$$

$$y'(t) = \underbrace{\frac{\delta}{\ell} \sin(\ell t)}_{\substack{\| \\ 0 \text{ perché } \sin(0)=0}} + \frac{\ell}{\ell}\, \mathrm{sgn}(t) \cos(\ell t) =$$

$$= \mathrm{sgn}(t) \cos(\ell t)$$

$$y''(t) = \underbrace{\delta \cos(\ell t)}_{= \delta \text{ perché } \cos(0)=1} + \mathrm{sgn}(t)(-\ell) \sin(\ell t) =$$

$$= \delta - \ell^2 y(t)$$

DUNQUE $\quad y'' + \ell^2 y(t) = \delta$