Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica
Trentunesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

15 dicembre 2009

(caso $u: \mathcal{D} \to \mathbb{C}$)

Def. $u \in \mathcal{D}'$ definisco $\bar{u}$ in $\mathcal{D}'$ ponendo

$$\langle \bar{u}, \varphi \rangle = \overline{\langle u, \bar{\varphi} \rangle} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Se $u = T_f$ allora $\bar{u} = T_{\bar{f}}$ infatti

$$\langle \bar{u}, \varphi \rangle = \overline{\langle u, \bar{\varphi} \rangle} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{\varphi}(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\,\varphi(x) =$$

$$\langle T_{\bar{f}}, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Def. $\mathrm{Re}\, u = \dfrac{u + \bar{u}}{2}$; $\mathrm{Im}\, u = \dfrac{u - \bar{u}}{2i}$

Dico che u è reale (immaginario puro) se $\mathrm{Im}(u) = 0$ ($\mathrm{Re}\, u = 0$)

LE DISTRIBUZIONE AMMETTONO DERIVATE DI OGNI ORDINE

<u>Fatto</u> Se (φ_n) è una successione in $\mathcal{D}$ e se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, allora $\forall\, k \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi^{(k)}$$

(basta guardare la def. di convergenza in $\mathcal{D}$)

<u>Def.</u> (DERIVATA). Sia $u \in \mathcal{D}'$. Definisco la derivata u' di u mediante:

- $$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Se $k \in \mathbb{N}$

$$\langle u^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle u, \varphi^{(k)} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Perché la def. sia ben posta devo verificare che

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi' \rangle$$

è lineare e continua su $\mathcal{D}$. La linearità è evidente. Per la continuità supponiamo che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$

$$\Rightarrow \quad \varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi' \quad \Rightarrow \langle u, \varphi_n' \rangle \to \langle u, \varphi' \rangle$$

che è ciò che volevo.

<u>Osservazione</u> Se $u = T_f$ con f di classe C^1 allora $u' = T_{f'}$ (la derivata distribuzionale "coincide" con la derivata classica — quando quest'ultima esiste)

Infatti

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle =$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \underset{\text{(integro per parti)}}{=} -\underbrace{\Big[f(x)\,\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

0 perché $\varphi(x)$ si annulla fuori da un $[a,b]$

$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Dunque $u' = T_{f'}$

- Stesso discorso se $f \in L^1_{loc}$, f ha derivata debole f' in L^1_{loc} $\left(\Rightarrow (T_f)' = T_{f'} \right)$ — Avrei potuto dire $f' \in L^1_{loc}$ (intendendo f' come derivata distr.)

Quindi se $f' \in L^1_{loc} \Rightarrow f$ è continua.

• Esempio $u = H(x)$, funzione di Heavyside

$(H(x)=0$ x $x<0$, $H(x)=1$ x $x>0)$. Nel senso delle distribuzioni ciò che individua H è

$$\langle H, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

Chi è H' ?? — VEDIAMO COSA CI DÀ LA DEFINIZIONE!

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$-\left[\varphi(x)\right]_0^{+\infty} = \varphi(0) - \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)}_{=0} = \varphi(0) \quad (\varphi \in \mathcal{D})$$

$$= \langle \delta, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

$$\boxed{H' = \delta}$$

Si potrebbe vedere che, se f di classe C^1 eccetto che in un punto x_0, se f'_* è limitata in $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$

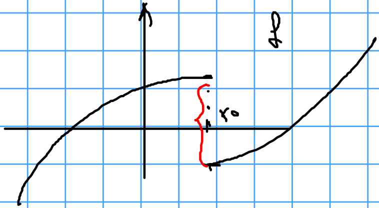
$*$ PUNTUALE

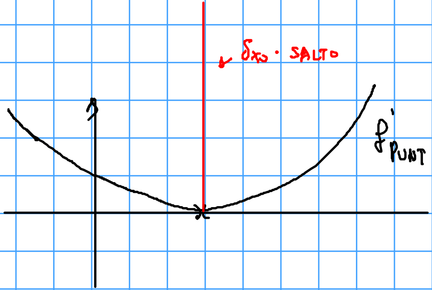
(questo si potrebbe generalizzare, per es. $f' \in L^1_{loc}$ su $\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$)

$\Rightarrow \exists\ f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$. Allora

$$\underset{*}{f'} = f'_{PUNT.} + \left(f(x_0^+) - f(x_0^-)\right)\delta_{x_0}$$

$*$ DISTRIBUZIONALE





Proposizione (derivata del prodotto) Se $u \in \mathcal{D}'$, $\psi \in \mathcal{E}$

allora $(\psi u)' = \psi' u + \psi u'$

Dim. Sia $\varphi \in \mathcal{D}$. Allora

$$\langle (\psi u)', \varphi \rangle \underset{\substack{\text{(DEF. DI} \\ \text{DERIVATA)}}}{=} - \langle \psi u, \varphi' \rangle \underset{\substack{\text{(DEF. DI} \\ \text{PRODOTTO)}}}{=}$$

$$- \langle u, \psi \varphi' \rangle \underset{\substack{\text{derivata del} \\ \text{prodotto per le funzioni } C^\infty}}{=} - \langle u, (\psi \varphi)' - \psi' \varphi \rangle =$$

$$- \langle u, (\psi \varphi)' \rangle + \langle u, \psi' \varphi \rangle \underset{\substack{\text{(def. di derivata} \\ \text{in } \mathcal{D}')}}{=} \langle u', \psi \varphi \rangle + \langle u, \psi' \varphi \rangle =$$

(def. di prodotto in $\mathcal{D}'$)

$$\langle u'\psi, \varphi\rangle + \langle u\psi', \varphi\rangle = \langle u'\psi + u\psi', \varphi\rangle$$

Ne segue la tesi.

<u>Oss.</u> Se $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u \Rightarrow u_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} u^{(k)}$; infatti

fissato $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha

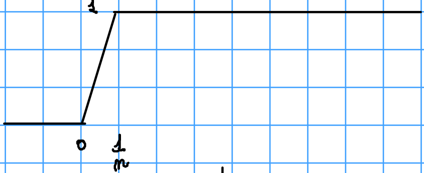
(per ipotesi)

$$\langle u_n^{(k)}, \varphi\rangle = (-1)^k \langle u_n, \varphi^{(k)}\rangle \longrightarrow (-1)^k \langle u, \varphi^{(k)}\rangle$$

$= \langle u^{(k)}, \varphi\rangle$. Ho quindi verificato $u_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} u^{(k)}$.

"LA DERIVATA È CONTINUA" IN $\mathcal{D}'$ (in realtà la convergenza in $\mathcal{D}'$ è assai debole!)

Esempio

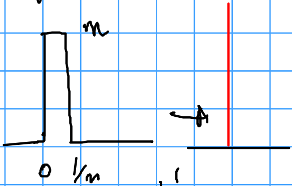
$f_n =$ 

Allora $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} H$ infatti $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\,\varphi(x_0)$

perché $f_n(x)\varphi(x) \to H(x)\varphi(x)$ (CONV. PUNTUALE) e

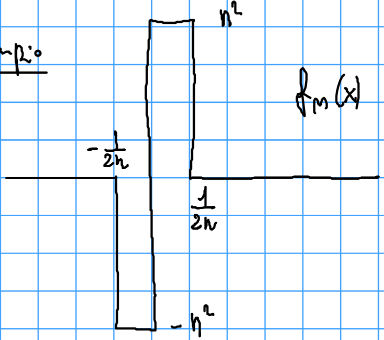
$|f_n(x)\varphi(x)| \le |\varphi(x)|$ integrabile (essendo in $\mathcal{D}$)

Quindi posso applicare Lebesgue.

Le derivate di f_n (deboli) sono 

e si vede (come fatto l'altra volta) che $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$

Esempio



due cariche concentrate uno da 0 e $\frac{1}{2n}$ di carica $\frac{n}{2}$ e l'altra da $-\frac{1}{2n}$ e 0 di carica $-\frac{n}{2}$. $n \to +\infty$??

$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'}$?? Per vedere che cosa succede prendiamo $\varphi \in \mathcal{D}$ e facciamo $\langle f_n, \varphi \rangle$ (e mandiamo $n \to +\infty$)

$$\langle f_n, \varphi \rangle = n^2 \left(-\int_{-\frac{1}{2n}}^{0} \varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\,dx \right) =$$

$$m^2\left(-\Big[x\,\varphi(x)\Big]_{-1/2n}^{0} + \int_{-1/2n}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx + \Big[x\,\varphi(x)\Big]_{0}^{1/2n} - \int_{0}^{1/2n} x\,\varphi'(x)\right) =$$

$$m^2\Bigg(\overbrace{-\frac{1}{2n}\varphi\left(-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n}\varphi\left(\frac{1}{2n}\right)} + \overbrace{\left[\frac{x^2}{2}\varphi'(x)\right]_{-\frac{1}{2n}}^{0} - \left[\frac{x^2}{2}\varphi'(x)\right]_{0}^{\frac{1}{2n}}}$$

$$\overbrace{-\int_{-1/2n}^{0}\frac{x^2}{2}\varphi''(x)\,dx + \int_{0}^{1/2n}\frac{x^2}{2}\varphi'(x)\,dx}^{3}\Bigg) =$$

$$\overbrace{\frac{m}{2}\left(-\varphi\left(-\frac{1}{2n}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2n}\right)\right)}^{1} = \frac{\cancel{m^2}}{2}\overbrace{\left(\frac{\varphi'(-1/2n)}{4\cancel{n^2}} - \frac{\varphi'(1/2n)}{4\cancel{n^2}}\right)}^{2}$$

$+ \; n^2 \Big($ DUE INTEGRALI $\Big)$

1 $\;= \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{2n}\right)-\varphi(0)}{\frac{1}{2n}} + \dfrac{\varphi\left(-\frac{1}{2n}\right)-\varphi(0)}{-\frac{1}{2n}}\right] \longrightarrow$

$$\frac{1}{4}\left[\varphi'(0)+\varphi'(0)\right] = \boxed{\frac{1}{2}\varphi'(0)}$$

2 $\;= \dfrac{1}{8}\left(\varphi'(-1/2n)-\varphi'(1/2n)\right) \to \dfrac{1}{8}\left(\varphi'(0)-\varphi'(0)\right)=0$

3 $\;\longrightarrow 0$ Pa es. il II^o che che int. è

$$|\mathrm{II}^o| \leq n^2\int_0^{1/2n} x^2\,|\varphi'(x)|\,dx \leq \cancel{n^2}\frac{1}{\cancel{4n^2}}\int_0^{1/2n}|\varphi''(x)|\,dx \longrightarrow 0$$

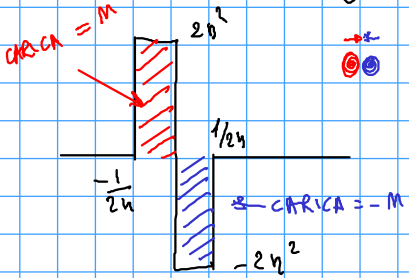
IN DEFINITIVA

$$\langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\varphi'(0) = \frac{1}{2}\langle \delta, \varphi' \rangle = -\frac{1}{2}\langle \delta', \varphi \rangle$$

DUNQUE

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} -\frac{1}{2}\delta'$$

Se le cambio di segno e moltiplico per due tenderanno a δ'



$\longrightarrow$ δ' : $\delta' \simeq$ dipolo

limite di due cariche opposte - divergenti - che tendono allo stesso punto

<u>Esempio</u> $\psi\delta' = ??$ So che $\psi\delta = \psi(0)\delta$

Derivo e uso la formula del prodotto

$$\psi'\delta + \psi\delta' = \psi(0)\delta' \iff$$

$$\psi'(0)\delta + \psi\delta' = \psi(0)\delta' \iff$$

$$\boxed{\psi\delta' = \psi(0)\delta' - \psi'(0)\delta}$$

CONTA SOLO LA ψ IN ZERO MA COMPARE ANCHE $\psi'(0)$

Analogamente

$$(\psi\delta)'' = \psi(0)\delta'' \iff (\psi'\delta + \psi\delta')' = \psi(0)\delta''$$

$$\psi''\delta + 2\psi'\delta' + \psi\delta'' = \psi(0)\delta''$$

$$\psi''(0)\delta + 2(\psi'(0)\delta' - \psi''(0)\delta) + \psi\delta'' = \psi(0)\delta'' \iff$$

$$\boxed{\psi\,\delta'' = \psi(0)\,\delta'' - 2\psi'(0)\,\delta' + \psi''(0)\,\delta}$$

intervengono $\psi(0), \psi'(0), \psi''(0)$

<u>PROBLEMA</u> Quali sono le distribuzioni $u \in \mathcal{D}'$, per cui

(P_0) $\quad \underbrace{x\, u(x)}_{\text{NOTAZIONE IMPROPRIA}} = 0$ $\quad$ (dove di φ: $\varphi u = 0$ dove $\varphi(x) = x$)

È chiaro che $u = 0$ verifica (P_0) – c'è qualcos'altro?

Sì, $u = \delta$ VERIFICA (P_0) e tutti i suoi multipli.

VEDIAMO CHE $\{u = \lambda\,\delta\}$ = SOLUZIONI DI P

Prop. Se $u \in \mathcal{D}'$ e $x u = 0$, allora esiste una costante λ tale che $u = \lambda \delta$.

Dim. (1) Notiamo che se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi(0) = 0 \Rightarrow$

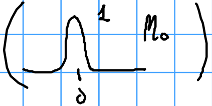
$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \varphi'(0) & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{è in } \mathcal{D}$$

Si vede che ψ è continua usando de l'Hôpital - con un po' di pazienza si vede anche che $\psi^{(k)}$ è continua $\forall k \geq 0$

(2) Se $x u = 0$ allora $\langle u, \varphi \rangle = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ con $\varphi(0) = 0$

Infatti se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi(0) = 0$ - posto $\psi(x)$ come in (1) -

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, x\psi(x) \rangle = \langle \underbrace{x u}_{=0}, \psi \rangle = \langle 0, \psi \rangle = 0$$

(3) Fisso una $\eta_0 \in \mathcal{D}$ con $\eta_0(0)=1$ 

Preso una qualunque $\varphi \in \mathcal{D}$ posso scrivere

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \underbrace{\varphi - \varphi(0)\eta_0}_{\text{nullo in zero}:\ \varphi(0)-\varphi(0)\eta_0(0) = \varphi(0)-\varphi(0)} + \varphi(0)\eta_0 \rangle \overset{\text{(per (2))}}{=}$$

$$\langle u, \varphi(0)\eta_0 \rangle = \underbrace{\varphi(0)}_{\langle \delta, \varphi \rangle} \underbrace{\langle u, \eta_0 \rangle}_{\text{lo chiamo } \lambda \text{ - NON DIPENDE DA } \varphi} =$$

$$= \lambda \langle \delta, \varphi \rangle = \langle \lambda\delta, \varphi \rangle .$$

→ DUNQUE $\boxed{u = \lambda \delta}$

PIÙ IN GENERALE DATO k INTERO, le sol. di

(P_k) $\qquad x^k u = 0$

sono date da $\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \delta^{(j)}$

Per es. $\quad x^3 u = 0 \quad$ ha come sol.

$$\lambda_0 \delta + \lambda_1 \delta' + \lambda_2 \delta''$$

Il fatto che siano soluzioni si vede facendo i conti

– guardare le formule di prima su $\psi \delta' / \psi \delta''$ –

il fatto che siano LE SOLE andrebbe dimostrato . . .

COME ERA CHIARO LE SOL. SONO UNO "SPAZIO LINEARE" visto che (P_k) è un problema lineare in u e omogeneo.

__Prop.__ Se $k \in \mathbb{N}$, $\bar{u} \in \mathcal{D}'$. Le sol. di

$$(\bar{P}_k) \qquad x^k u = \bar{u}$$

sono uno spazio affine di dim. k dato da

$$\left\{ u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \delta^{(j)} \right\}$$

dove u_0 è una sol particolare di $(\bar{P}_k)$ - se trovo uno ho trovato tutto.

__PROP.__ (ulteriore generalizzazione). Sia $\psi \in \mathcal{E}$, $\bar{u} \in \mathcal{D}'$

Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\psi(0) = \psi'(0) = \cdots = \psi^{(k-1)}(0) = 0 \quad \psi^{(k)}(0) \neq 0$

(anche $k=0$, nel qual caso la prima condizione non c'è)

Allora le soluzioni di

$$\psi u = \bar{u}$$

sono date da $\quad u_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \delta^{(j)}$

dove u_0 è una sol. particolare. (se $\bar{u}=0 \Rightarrow u_0=0$)

ANCORA PIU' GENERALE: $\quad \psi \in \mathcal{E}$, $\bar{u} \in \mathcal{D}'$

(IN REALTA' POTREBBE ESSERE $k=+\infty$ . ...)

$\psi(x) \neq 0$ se $x \notin \{x_1 \dots x_k\}$, mentre $\psi(x_j)=0$, x_j radice di molteplicità m_j. Allora le sol. di

$$\psi u = \bar{u}$$

sono tutte e sole espresse da $u_0 + \sum_{h=1}^{k} \sum_{j=0}^{m_h} \lambda_{h,j} \delta_{x_h}^{(j)}$

(u_0 sol. particolare $- x \bar{u} = 0 \Rightarrow u_0 = 0$)

<u>Per esempio</u>

$$(x^2-1)^2 u = 0 \iff u = \lambda_1 \delta_1 + \lambda_2 \delta_1' + \mu_1 \delta_{-1} + \mu_2 \delta_{-1}'$$

<u>Esempio</u> Posso considerare $u = \frac{1}{x}$??

ATTENZIONE $\frac{1}{x}$ NON È UNA FUNZIONE IN QUANTO NON È L^1_{loc} (NON È INTEGRABILE VICINO A ZERO)

Posso pormi il problema così: ci sono $u \in \mathcal{D}'$ con

$$x\,u = 1$$

[Per quanto appena visto se $x u_0 = 1$ anche

$x(u_0 + \lambda\delta) = 1$ (anzi $\{u : xu = 1\} = \{u_0 + \lambda\delta\}$

Vediamo di trovare u_0 - un modo possibile di introdurre u_0, per analogia con le funzioni, è quello di considerare la derivata di $\ln|x|$.

In effetti $\underline{f(x) = \ln|x|}$ è in L^1_{loc} - è una funzione.

<u>PONGO</u> $u_0(x) = f' = \frac{d}{dx}\ln|x|$ (in $\mathcal{D}'$)

Vediamo cosa fa $x\, u_0(x)$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle x\, u_0(x), \varphi \rangle = \langle u_0, x\varphi(x) \rangle = \langle f'(x), x\varphi(x) \rangle$$

$$= -\langle f, \frac{d}{dx}(x\varphi(x)) \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} \ln|x| \frac{d}{dx}(x\varphi(x))\, dx$$

(INTEGRALE DI LEBESGUE)

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x| \frac{d}{dx}(x\varphi(x))\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \ln|x| \frac{d}{dx}(x\varphi(x))\, dx \right) =$$

(per parti - ho scansato lo zero)

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Big[\ln|x|\, x\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{-\varepsilon} + \Big[\ln|x|\, x\varphi(x)\Big]_{\varepsilon}^{+\infty} \right)$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}\varphi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x}\varphi(x)\, dx \right)$$

Nella prima riga i termini a $\pm\infty$ spariscono perché $\varphi(x)=0$ per $|x|$ grande. $\Rightarrow$ la prima riga ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln(\varepsilon)\left(\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon)-\varepsilon\,\varphi(\varepsilon)\right)\right)=0$$

perché $\varepsilon\ln(\varepsilon)\to 0$ se $\varepsilon\to 0$

LA PRIMA RIGA SPARISCE

LA SECONDA RIGA DÀ

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx = \langle 1,\varphi\rangle$$

QUINDI

$$\langle x\,u_0(x),\varphi\rangle = \langle 1,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}.$$

EFFETTIVAMENTE $x\,u_0(x)=1$

Inoltre si vede facilmente che $u_0 = \frac{d}{dx}\ln|x|$ è dispari

(perché il $\ln|x|$ è pari e ...) — quindi chiamo

tale u_0 "valore principale di $\frac{1}{x}$" e lo indico con

$$(v.p.)\,\frac{1}{x}$$ (spesso scriveremo solo $\frac{1}{x}$, però ...)

Dunque
$$\boxed{x\,u = 1 \iff u = (v.p.)\,\frac{1}{x} + \lambda\,\delta}$$

Si potrebbe anche vedere che

$$\left\langle (v.p.)\,\frac{1}{x}\,,\ \varphi \right\rangle = (v.p.) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

(esiste se $\varphi \in \mathcal{S}$)

Analogamente posso definire

$$\boxed{\frac{1}{x^k} := \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (\mathrm{v.p.}) \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^k}{dx^k} \ln|x|}$$

$$x^{-1} \quad , \quad (-1)\, x^{-2} \quad , \quad (-1)(-2)\, x^{-3}$$

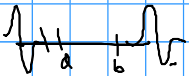
<u>Nota</u> $\quad x^k u = 1 \iff u = \frac{1}{x^k} + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_j \delta^{(j)}$

Per es. $\quad x^3 u = 1 \iff u = \frac{1}{x^3} + \lambda_0 \delta + \lambda_1 \delta' + \lambda_2 \delta''$

Trasformata di Fourier delle distribuzioni

- PURTROPPO NON SI PUÒ TRASFORMARE UNA GENERICA u in $\mathcal{D}'$
- Vediamo che si possono trasformare le $u \in \mathcal{D}'$ con supporto limitato. Per vederlo mi serve CARATTERIZZARE tali u.

Ricordo che $spt(u) \subset [a,b]$ significa



$\langle u, \varphi \rangle = 0$ se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $spt(\varphi) \cap [a,b] = \emptyset$.

Per tali φ ha senso considerare

$$\langle u, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{E}$$

Pensiamo al caso di $u = T_f$.

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

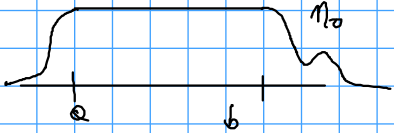
se f è solo localmente integrabile (per es $f(x) = e^x$)

non posso mettere φ in $\mathcal{E}$ (non posso mettere $\varphi = 1$)

MA SE f ha supporto in un $[a,b]$ posso mettere una $\varphi \in C^\infty$ qualunque (tanto è f che fa zero)

Allora posso fare così: data u con supporto in $[a,b]$, prendo $\eta_0 \in \mathcal{D}$ tale che

$\eta_0(x) = 1$ se $x \in [a,b]$



Per ogni $\varphi \in \mathcal{E}$ definisco

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \overbrace{\eta_0 \varphi}^{\in \mathcal{D} \text{ — HA SENSO}} \rangle$$

dato che $u = 0$ fuori $[a,b]$ si vede facilmente che l'espressione sopra non dipende da η_0 — DUNQUE HO ESTESO $\langle u, \varphi \rangle$ a tutte le $\varphi \in \mathcal{E}$

Tale espressione ha le proprietà di epep

(a) Lineare in φ. (ovvio)

(b) Continua in φ rispetto a $\mathcal{E}$:

se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi \Rightarrow \langle u, \varphi_n \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$

Per questo motivo chiamo $\mathcal{E}'$ le distribuzioni a supporto limitato (dato che $\mathcal{D} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}' \subset \mathcal{D}'$)

Si potrebbe dim. che se $T : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ lineare e continuo esiste una $u \in \mathcal{D}'$ con supporto limitato tale che

$$\langle u, \varphi \rangle = T(\varphi)$$

FATTI Se $u \in \mathcal{E}'$ $\Rightarrow$

- $\psi u \in \mathcal{E}'$ $\quad \forall \psi \in \mathcal{E}$
- $\frac{d^k}{dx^k} u \in \mathcal{E}'$

Def. Sia $u \in \mathcal{E}'$, Definisco $\hat{u}(\omega)$ (che è una funzione di ω), mediante

$$\hat{u}(\omega) = \langle u(x), e^{-i\omega(x)} \rangle$$

che ha senso in quanto – a ω fissato – $\varphi(x) = e^{-i\omega x} \in \mathcal{E}$

<u>Teorema</u> La funzione $\hat{u}(\omega)$ è di classe C^∞ e vale

$$\frac{d^h}{d\omega^h}\hat{u}(\omega) = \left\langle u(x), \frac{d^h}{d\omega^h} e^{-i\omega x}\right\rangle =$$

$$(-i)^h \left\langle u(x), x^h e^{-i\omega x}\right\rangle =$$

$$(-i)^h \left\langle x^h u(x), e^{-i\omega x}\right\rangle =$$

$$(-i)^h \widehat{x^h u(x)}(\omega)$$

(NO DIM.)

<u>NOTA CHE</u> u MOLTO IRREGOLARE MA NULLA A $\pm\infty$

$$\Downarrow$$

$\hat{u}$ MOLTO REGOLARE (MA GROSSA A ∞)

Esempio $u = \delta$. Allora

$$\hat{\delta}(\omega) = \langle \delta(x), e^{-i\omega x} \rangle = e^{-i\omega x}\Big|_{x=0} = 1$$

PURTROPPO NON RECUPERO LE FUNZIONI ...

$$u = \delta^{(k)}$$

$$\hat{u}(\omega) = \langle \delta^{(k)}(x), e^{-i\omega x} \rangle =$$

$$(-1)^k \langle \delta(x), \frac{d^k}{dx^n} e^{-i\omega x} \rangle =$$

$$(-1)^k \langle \delta(x), (-i\omega)^k e^{-i\omega x} \rangle =$$

$$(i\omega)^k \langle \delta(x), e^{-i\omega x} \rangle = (i\omega)^k$$

PIÙ DERIVO - PIÙ u è "IRREGOLARE" PIÙ $\hat{u}(\omega)$ CRESCE, ALL'INFINITO.