Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica
Trentesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**

Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

14 dicembre 2009

Distribuzioni (funzioni generalizzate)

Def: Chiamo $\mathcal{D}$ l'insieme $C_0^\infty = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, \varphi$ tale che $\exists\, \varphi^{(k)}\ \forall k$ ed $\exists\, a, b$ con $\varphi(t) = 0$ fuori $[a,b]\}$

(il simbolo $\mathcal{D}$ è "tradizionale" in questo contesto)

Gli elementi di $\mathcal{D}$ si chiamano "test"

Vediamo le funzioni L^1_{loc} da un altro punto di vista.

Data $f \in L^1_{loc}$ risulta definito il "funzionale" che a ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ associa $\boxed{T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt}$

Nota che $T_f(\varphi) = \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt$ dove a e b (che cambiano a seconda di φ) sono tali che $\varphi = 0$ fuori $[a,b]$

Posso immaginare $T_f(\varphi)$ come "una misurazione" della f fatta mediante φ - non misura $f(x)$ una sua "media pesata da φ". Per quanto già visto se

$$T_f(\varphi) = T_g(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{ allora } f = g \text{ q.o.}$$

(cioè sono lo stesso oggetto di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$).

QUINDI T_f individua univocamente f

Che proprietà ha T_f?

(a) E' LINEARE IN φ: $T_f(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) =$

$$\lambda_1 T_f(\varphi_1) + \lambda_2 T_f(\varphi_2) \qquad (\text{OVVIO})$$

(b) È CONTINUO RISPETTO A φ :

$$\text{Se } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \overline{T}_f(\varphi_n) \xrightarrow{\mathbb{R}/\mathbb{C}} \overline{T}_f(\varphi)$$

Per scrivere questa proprietà devo prima dire cosa intendo con $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$

<u>Def.</u> Data una successione $\{\varphi_n\}$ in $\mathcal{D}$ e φ in $\mathcal{D}$, dico che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ se

(1) esiste $a < b$ tale che $\varphi_n(x) = 0$ fuori $[a,b]$ $\forall n$

(2) $\forall k \geq 0$ le derivate k-esime $\varphi_n^{(k)}$ tendono uniformemente su $[a,b]$ a $\varphi^{(k)}$ $\left(\Rightarrow \varphi = 0 \text{ fuori } [a,b] \right)$

Data la def. di convergenza, la (b) è chiaro, perché se

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ trovo $[a,b]$ tale che $\varphi_n = 0$ fuori $[a,b]$ e

poi $\varphi_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} \varphi$ $\quad (k=0)$. Ne segue che

$$T_f(\varphi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi_n(x) \underset{(*)}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,\varphi(x) = T_f(\varphi)$$

$(*)$ è conseguente del teorema di Lebesgue dato che,

$f(x)\,\varphi_n(x) \to f(x)\,\varphi(x) \qquad \forall x \in [a\ b]$ e

$|\varphi_n(x)| \leq M$ fisso a causa della conv. unif., da cui

$|f(x)\,\varphi_n(x)| \leq M|f(x)|$ integrabile.

In realtà ho usato solo la conv. uniforme di $\varphi_n \to \varphi$ su $[a,b]$ (non ho usato le proprietà di $\varphi_n^{(k)}$).

Definizione Chiamiamo distribuzione un qualunque (funzionale) $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R} / \mathbb{C}$ tale che

(a) T è lineare: $T(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2)$

(b) T è continuo: se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow T(\varphi_n) \to T(\varphi)$

(T "opera" sui test φ e restituisce un numero)

Indico con $\mathcal{D}'$ l'insieme delle distribuzioni.

Convenzione Se $T \in \mathcal{D}'$ e se $\varphi \in \mathcal{D}$ scriverò

$\langle T, \varphi \rangle$ invece di $T(\varphi)$ $\left(o \ \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} \right)$

Osservazione $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$

(è la definizione di somma tra due funzioni, che sono le T_1 e T_2)

Def. Dico che una successione $\{T_n\}$ in $\mathcal{D}'$ converge a una T in $\mathcal{D}'$ se

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathbb{R}/\mathbb{C}} \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

(è una convergenza MOLTO DEBOLE)

Oss. Con le def. fatte: se $T_n \to T$ e $\varphi_n \to \varphi$

$$\langle T_n, \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

(SI VEDE — NO DIM.)

Ogni funzione f di L^1_{loc} definisce automaticamente la distribuzione T_f — d'ora in poi possiamo "confondere" (a meno che non serva fare la distinzione)

f con T_f e scrivere

$$\underset{\varphi}{\langle f, \varphi \rangle} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

(a rigore dove scrivere T_f)

Posso dire che "le funzioni (localmente integrabili) sono quelle distribuzioni che operano sui test mediante l'integrale"

VEDIAMO CHE OLTRE ALLE FUNZIONI C'È DELL'ALTRO

<u>Def.</u> Chiamo δ l'elemento di $\mathcal{D}'$ def. da

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

PER DARE TALE DEF. DEVO PRIMA VERIFICARE CHE

$T(\varphi) = \varphi(0)$ è lineare e continuo in φ.

(a) $(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)(0) = \lambda_1 \varphi_1(0) + \lambda_2 \varphi_2(0)$

(per definizione di funzione somma / prodotto)

(b) Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\text{UNIF}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{\text{PUNT.}} \varphi$

$\Rightarrow \varphi_n(0) \to \varphi(0)$ cioè $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$

Quindi δ è una "distribuzione accettabile" — VEDIAMO

che δ NON È UNA FUNZIONE, cioè che non esiste nessuna

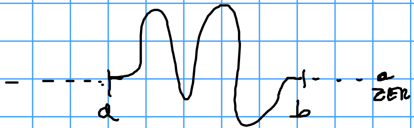
f in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

Mettiamo per assurdo che esista una tale f. Prendiamo

$[a,b]$ con $0 \notin [a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([a,b])$$

($\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, inf. derivabile, e nulle in $[c,d]$ con $]c,d[\subset [a,b]$)



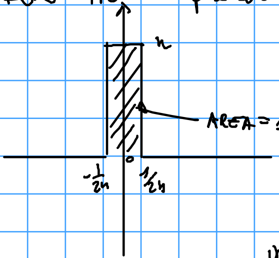
$\Longrightarrow$ $f(x) = 0$ quasi ovunque su $[a,b]$

Dato che 0 è un singolo punto $\Rightarrow$ $f(x) = 0$ per quasi ogni x di $\mathbb{R}$. Allora, se $f = 0$ q.o., $T_f(\varphi) = 0$ $\forall \varphi$, ma questo non è possibile dato che se $\varphi(0) \neq 0$ $T(\varphi) = \varphi(0) \neq 0$

δ NON E' UNA FUNZIONE

Vediamo che δ è limite (in $\mathcal{D}'$) di funzioni

Dato n, prendo $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{se } |x| > \frac{1}{2n} \end{cases}$



$\left(f_n \in L^1(\mathbb{R}), \ \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1, \ \forall n \right)$

Dico che $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta$, cioè che

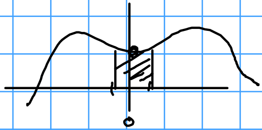
$$\langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathbb{R}/\mathbb{C}} \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Infatti

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\,dx$$

$\left(\text{media di } \varphi \text{ in } \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \right)$

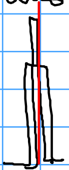
(Re parte)



$\longrightarrow \varphi(0)$

Teorema fond. calcolo integrale

Idealmente δ rappresenta la "densità" di una massa unitaria concentrata in zero. È come se avessi una "funzione" nulla per ogni $x \neq 0$, con integrale uno — UNA FUNZIONE COSÌ NON ESISTE.



Questa nozione serve come modello per le masse / cariche .. puntiformi.

CHE OPERAZIONI POSSO FARE SULLE DISTRIBUZIONI

(a) $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}'$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \mathbb{C} \Longrightarrow \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$

(combinazione lineare).

(b) Posso considerare il prodotto di una $\underline{u \in \mathcal{D}'}$

per una $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Convenzione Tradizionalmente $C^\infty(\mathbb{R})$ si chiama $\mathcal{E}$

e si dice che φ_n (succ. in $\mathcal{E}$) converge in $\mathcal{E}$ a φ

se $\varphi_n^{(k)} \longrightarrow \varphi^{(k)}$ UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$, $\forall k$.

Lo indico con $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi$.

Def. (PRODOTTO) Data $u \in \mathcal{D}'$ e $\psi \in \mathcal{E}$, definisco il

prodotto ψu mediante:

$$\langle \psi u, \varphi \rangle = \underbrace{\langle u, \psi\varphi \rangle}_{\otimes} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Devo verificare che $\otimes$ È LINEARE E CONTINUO IN φ. In effetti

dato $\psi \in \mathcal{E}$ succede che: (NON LO DIMOSTRO)

(a) $\varphi \longrightarrow \psi\varphi$ (da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}$) è lineare

(b) Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \implies \psi\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \psi\varphi$

DA QUESTO SI DEDUCE CHE

$$\varphi \longmapsto \langle u, \psi\varphi \rangle$$ è

lineare e continuo e quindi definisce un elemento di $\mathcal{D}'$

IL PRODOTTO È BEN DEFINITO.

COME MI È VENUTA IN MENTE QUESTA DEF: ?

Fatto Se $f \in L^1_{loc}$ $\psi \in \mathcal{E} \implies \psi T_f = T_{\psi f}$

(nelle funzioni il prodotto "distribuzionale" coincide con prodotto solito). Infatti

$$\langle \underbrace{\psi T_f}_{u}, \varphi \rangle \underset{\substack{\text{(def. di prodotto} \\ \text{distribuzionale)}}}{=} \langle T_f, \psi\varphi \rangle \underset{\text{(def. di } T_f)}{=}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(\psi\varphi)(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\psi(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f\psi)(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle \underbrace{T_{\psi f}}_{v}, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

dunque $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle \;\; \forall \varphi$ cioè $u = v$

$$\psi T_f = T_{\psi f} \qquad \#$$

- Posso estendere il prodotto purché uno dei due fattori sia "MOLTO REGOLARE", ammettendo che l'altro sia una distribuzione

<u>ESEMPIO</u> $\psi \cdot \delta = ??$ Formalmente:

$$\langle \psi\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \psi\varphi \rangle$$ cioè

$$\langle \psi\delta, \varphi \rangle = \psi(0)\varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Ma dato che $\varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$ posso dire che

$$\langle \psi\delta, \varphi \rangle = \psi(0)\langle \delta, \varphi \rangle = \langle \psi(0)\delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

<u>DUNQUE</u> $\boxed{\psi\delta = \psi(0)\,\delta}$

qualunque sia ψ in $\mathcal{E}$.

Per esempio
$$\sin(x)\cdot\delta = \sin(0)\cdot\delta = 0$$
$$\cos(x)\cdot\delta = \cos(0)\cdot\delta = \delta$$

" δ guarda solo cosa succede in zero " !!

(c) Nozione di positività, supporto di una di una distribuzione

- Dato $u \in \mathcal{D}'$ dico che $u \geq 0$ se

$$\langle u, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ con } \varphi \geq 0$$

<u>Esempio</u> $\delta \geq 0$ $\left(\text{se } \varphi \geq 0 \Rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \geq 0 \right)$

- Più in generale se $a < b \in \mathbb{R}$ posso dire

che $u \geq 0$ in $]a, b[$ se

$$\langle u, \varphi \rangle \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}' \text{ t.c. che } \varphi \geq 0, \ \varphi = 0 \text{ fuori }]a,b[$$

Stesso discorso con "≤ 0" e quindi con "$= 0$"

<u>ESEMPIO</u> $\delta = 0$ su $]a, b[$ per ogni $a < b$ con

$0 \notin]a,b[$. Infatti se $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi(x)=0$ fuori

$]a,b[\Rightarrow \varphi(0)=0 \Rightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = 0$

(in realtà non serve parlare di intervalli - solo di aperti)

NOTIAMO che posso dire $u=0$ su $]a,b[$ ma non posso
aperto

parlare di valore $u(x)$ di u in un punto.

Def. Data $u \in \mathcal{D}'$ il supporto si può definire come "il più piccolo insieme chiuso E tale che $u=0$ fuori di E"

Esempio: $spt(\delta) = \{0\}$ (ma $\delta \geq 0$ e $\delta \neq 0$)

Fatto Se $f \in L^1_{loc}$ allora $f \geq 0$ q.o. $\Leftrightarrow T_f \geq 0$

(su $]a,b[$). (SENZA DIM.)

(d) Traslazione / riflessione / riscalamento di una distribuzione

Sia $u \in \mathcal{D}'$.

- Dato $T_0 \in \mathbb{R}$ chiamo traslata di T_0 la dist. u_{T_0}:

$$\langle u_{T_0}, \varphi \rangle = \langle u, \varphi_{-T_0} \rangle$$

$$\langle u(t-t_0), \varphi(t) \rangle = \langle u(t), \varphi(t+t_0) \rangle$$

anche se non sarebbe lecito parlare di $u(t)$

IDEA CHE STA SOTTO LA DEF.

È facile vedere che la def. va d'accordo con la solita traslazione, quando $u = T_f$:

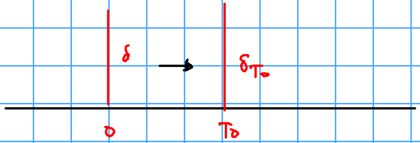
$$(T_f)_{T_0} = T_{f_{T_0}} :$$

(cambio di var. $t - t_0 = s$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\varphi(s+t_0)\,ds$$

Per esempio δ_{T_0} è dato da

$$\langle \delta_{T_0}, \varphi \rangle = \langle \delta, \varphi(t+T_0) \rangle = \delta(0+T_0) = \delta(T_0)$$



- u^* (riflesso) è def da

$$\langle u^*, \varphi \rangle = \langle u, \varphi^* \rangle$$

più in generale se $a \neq 0$ lo "riscalato" $u(at)$ è def da

$$\langle u(at), \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle u, \varphi \tfrac{t}{a} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Se $u = T_f$ lo def va d'accordo con la situazione solita: $\left(s = at, \quad t = \frac{s}{a}, \quad dt = \frac{1}{a} ds \right.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\frac{1}{a}\,ds \quad \text{se } a>0$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} f(s)\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\frac{1}{a}\,ds \quad \text{se } a<0$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right) ds \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

<u>Esempio</u> $\quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\,\delta, \quad \delta^{*} = \delta$

$$\langle \delta(at), \varphi \rangle = \frac{1}{|a|}\left\langle \delta, \varphi\left(\frac{t}{a}\right)\right\rangle = \frac{1}{|a|}\,\varphi\left(\frac{0}{a}\right) =$$

$$\frac{1}{|a|}\,\varphi(0) = \frac{1}{|a|}\langle \delta, \varphi \rangle$$

<u>Def.</u> u PARI SE $u = u^*$

u DISPARI SE $u = -u^*$

$\Rightarrow$ per es. δ è PARI.