Complementi di Matematica
Ventinovesima lezione (esercizi preparatori al compitino)

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

10 dicembre 2009

1. Si consideri la successione di funzioni definita da
$$f_n(x) := \frac{e^x}{n^2 + e^{\alpha n x}}.$$
dove α è un parametro reale. Studiamo la convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$
IR
in $L^1([0,+\infty[)/L^2([0,+\infty[)/L^1([0,1])/L^2([0,1])$.

2. Si calcoli la soluzione del problema differenziale
$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = H(t)e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$
dove H è la funzione di Heavyside definita da $H(x) = 1$ se $x > 0$ e $H(x) = 0$ se $x < 0$.

3. Dato il parametro α con $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ consideriamo la funzione f_α definita da

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\alpha} & \text{se } |t| < \alpha \\ -1 & \text{se } -1 \leq t \leq -\alpha \\ 1 & \text{se } \alpha \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere π-periodica.
Studiamo il problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 9y = f_\alpha & \text{in } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

(1) $$f_n(x) = \frac{e^x}{n^2 + e^{\alpha n x}}$$

convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in L^1/L^2

di $]-\infty, +\infty[$

- $L^1(\mathbb{R})$ – Comincio col vedere se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_1 < +\infty \qquad \text{(condizione sufficiente)}$$

$$\| f_n \|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{n^2 + e^{\alpha n x}}\, dx$$

Pongo $y = e^x$, $e^x dx = dy$ $\Rightarrow$

$$\| f_n \|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{n^2 + y^{\alpha n}} = \circledast$$, per "far uscire" la dipendenza

da n poniamo $y^{\alpha n} = n^2 z^{\alpha n} \iff y = n^{\frac{2}{\alpha n}} z$

$dy = n^{\frac{2}{\alpha n}} dz$ e $\circledast = \int_0^{+\infty} \frac{dz}{n^2(1+z^{\alpha n})} n^{\frac{2}{\alpha n}} =$

$$n^{\frac{2}{\alpha n}-2} \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^{\alpha n}} = \, ,$$

$$n^{\frac{2}{\alpha n}-3} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{w^{\frac{1}{n}-1}}{1+w^{\alpha}} dw}_{c_n}$$

$w = z^n$

$z = w^{\frac{1}{n}}$

$dz = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1} dw$

Se $n \to +\infty$ $c_n \xrightarrow{\text{(Lebesgue)}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{w(1+w^{\alpha})} dw = +\infty$!!

che è un numero reale, e posto da $\alpha > 0$

COMPLICATO

Da cap prendiamo $f_n = \dfrac{e^x}{n^2 + e^{\alpha x}}$

conv: $L^1(\mathbb{R}) / L^2(\mathbb{R})$

- Conv. assoluta $L^1(\mathbb{R})$

$$\| f_n \|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} | f_n(x) | \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{n^2 + e^{\alpha x}} \, dx$$

$y = e^x \qquad dy = e^x \, dx \quad \Rightarrow \quad$ Trovo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{n^2 + y^\alpha} .$$ Conviene porre $y = n^{\frac{2}{\alpha}} z$

$\Rightarrow \quad dy = n^{\frac{2}{\alpha}} \, dz \qquad$ per cui viene

$$\int_0^{+\infty} \frac{dz}{n^2 + n^2 z^\alpha} \, n^{\frac{2}{\alpha}} = n^{\frac{2}{\alpha}-2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^\alpha}}_{C_\alpha}$$

C_α è finito $\Leftrightarrow$ $\alpha > 1$. Dunque si è visto che

$f_n \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 1}$ (Prerequisito a tutto il resto)

Ne segue poi che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < +\infty \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{\alpha} > 1$

$\Leftrightarrow 1 > \frac{2}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 2}$.

Allora per $\alpha > 2$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. $L^1(\mathbb{R})$

- Vediamo che x $\alpha \leq 2$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ NON CONV.

Se convergesse dovrebbe essere...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)}_{\in L^1} dx \in \mathbb{R}$$

Ma essendo le $f_n \geq 0$ $\quad \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \|f_n\|_1$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_\alpha}{n^{2-\frac{2}{\alpha}}} < +\infty \iff \boxed{\alpha > 2}$$

(quindi per $\alpha \leq 2$ $\sum f_n$ non converge).

$$\boxed{\sum f_n \text{ conv. } L^1(\mathbb{R}) \iff \alpha > 2}$$

- Vediamo $L^2(\mathbb{R})$. Vediamo se $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(n^2 + e^{\alpha x})^2}\,dx \qquad (y = e^x,\ dy = e^x\,dx)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{y}{(n^2 + y^\alpha)^2}\,dy = ⊛$$

Parentesi

Per quali α la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^\alpha}$$

è integrabile su $[0,+\infty[$?

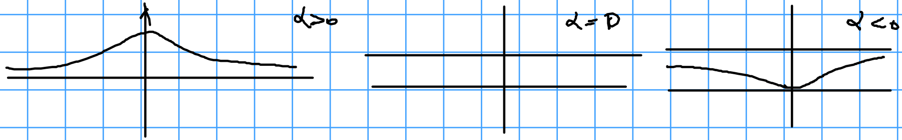
$\alpha > 0$ $\quad f(x)$ è continua su $[0,+\infty[$ e all'infinito $\to 0$ come $\frac{1}{x^\alpha}$. $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) < +\infty \iff \alpha > 1$

$\alpha = 0$ $\quad f(x) = 1$ NON È INT.

$\alpha < 0$ $\quad f$ è comunque continua in zero $(f(x) \to 0)$

Risulta $f(x) \to 1$ se $x \to +\infty$ e dunque

NON È INTEGRABILE



$$\int_0^{+\infty} \frac{y}{(n^2+y^\alpha)^2}\, dy = \left(y = n^{\frac{2}{\alpha}} z \,, \quad dy = n^{\frac{2}{\alpha}} dz \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{n^{\frac{2}{\alpha}}\, z}{(n^2+n^2 z^\alpha)^2}\, n^{\frac{2}{\alpha}}\, dz = \frac{n^{\frac{4}{\alpha}}}{n^4} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{z}{(1+z^\alpha)^2}\, dz}_{D_\alpha}$$

$$= \frac{1}{n^{4-\frac{4}{\alpha}}}\, D_\alpha$$

$$D_\alpha < +\infty \iff 2\alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 1$$

$$(f_n \in L^2 \iff \alpha > 1)$$

$$\|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{2-\frac{2}{\alpha}}} (D_\alpha)^{1/2}$$ e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty \iff 2-\frac{2}{\alpha} > 1 \iff 1 > \frac{2}{\alpha}$$
$$\iff \alpha > 2$$

Dunque se $\alpha > 2$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. in $L^2(\mathbb{R})$

NON POSSO DIRE (in modo semplice) il VICEVERSA

PROVIAMO A METTERCI SU $[0,+\infty[$ INVECE CHE SU $\mathbb{R}$.

- Caso L^1. Devo calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{n^2 + e^{\alpha x}} dx \quad (y = e^x) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^\alpha} dy$$

$$= \left(y = n^{\frac{2}{\alpha}} z \right) = \int_{n^{-\frac{2}{\alpha}}}^{+\infty} \frac{n^{\frac{2}{\alpha}}\, dz}{n^2(1+z^\alpha)} =$$

$$\frac{1}{n^{2-\frac{2}{\alpha}}} \int_{n^{-\frac{2}{\alpha}}}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^\alpha} = \frac{1}{n^{2-\frac{2}{\alpha}}} \quad C_{n,\alpha}$$

DATO CHE $C_{n,\alpha} \to \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1+z^\alpha}$ SI PUÒ RAGIONARE COME PRIMA

PROVIAMO A METTERCI SU $[0,1]$

CASO L^1 : $\int_0^1 \frac{e^x}{n^2+e^{2x}}\, dx \quad (y = e^x) =$

$$\int_1^e \frac{dy}{n^2+y^\alpha} = \left(y = n^{\frac{2}{\alpha}} z \right) =$$

$$\frac{1}{n^{2-\frac{2}{\alpha}}} \underbrace{\int_{n^{-\frac{2}{\alpha}}}^{e\,n^{-\frac{2}{\alpha}}} \frac{1}{1+z^\alpha}\,dz}_{} \qquad (\text{finito } \forall \alpha \in \mathbb{R})$$

$C_{\alpha,n}$ = tende a zero se $n \to \infty$

$\boxed{\text{se } \alpha > 0}$ $\qquad C_{\alpha,n} \simeq \displaystyle\int_{n^{-\frac{2}{\alpha}}}^{e\,n^{-\frac{2}{\alpha}}} 1\,dz = \frac{(e-1)}{n^{\frac{2}{\alpha}}}$

$$\Rightarrow \|f_n\|_1 \simeq \frac{(e-1)}{n^2} \Rightarrow \sum \|f_n\|_1 < +\infty \quad \forall \alpha > 0$$

$\boxed{\alpha = 0}$ NON È CHIARO COSA SIA l'integrale sopra..

conviene tornare all'inizio $\qquad f_n(x) = \dfrac{e^x}{n^2+1}$

dunque $\displaystyle\int_0^1 f_n(x) = \frac{1}{n^2+1}\int_0^1 e^x \Rightarrow$ tutto $\underline{\underline{\text{ok}}}$

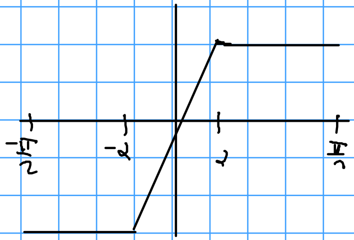
$\boxed{\alpha < 0}$ $$C_{n,\alpha} = \int_{n^{-\frac{2}{\alpha}}}^{e n^{-2/\alpha}} \frac{1}{1+z^{\alpha}} \simeq$$

$$\int_{n^{-\frac{2}{\alpha}}}^{e n^{-\frac{2}{\alpha}}} z^{-\alpha}\, dz = \frac{1}{1-\alpha}\Big[z^{1-\alpha} \Big]_{n^{-\frac{2}{\alpha}}}^{e n^{-\frac{2}{\alpha}}} \quad \ldots$$

SI PUÒ FARE (e dovrebbe serie sommabile) ..

. . . (DOVREBBE ESSERE SOMMABILE $\forall \alpha$)

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t}{\alpha} & |t|<\alpha \\ 1 & t>\alpha \\ -1 & t<-\alpha \end{cases}$$



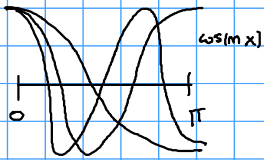
$$\begin{cases} y'' + 9y = f_\alpha \\ y'(-\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

$L = \pi$

$\omega_0 = 1$

Devo cercare $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \, c_n(x)$

dove $c_n(x) = \cos\left(n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$



Quindi devo scrivere $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, c_n(x)$

dove

$$f_0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 0 \qquad (f_\alpha \text{ dispari})$$

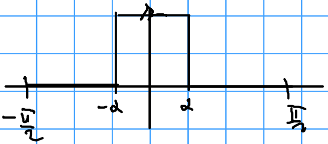
se $n \geq 1$

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, C_n(x)\,dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) dx = \star$$

NOTIAMO CHE f <u>continua</u>

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & |t| < \alpha \\ 0 & |t| > \alpha \end{cases}$$



dunque

$$\star = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{f(x) \sin\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)}{n} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{n\alpha} \sin\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) dx \right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\underbrace{\left(\frac{1\cdot \sin(n\pi)}{n} - \frac{(-1)\sin(n\cdot 0)}{n}\right)}_{=0} + \frac{1}{n^2\alpha}\left[\cos\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha n^2}\left[\cos\left(n\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right) - \cos\left(n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\alpha n^2}\left(\cancel{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}\cos(-n\alpha) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin(n\alpha) + \right.$$

$$\left. - \left(\cancel{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}\cos(-n\alpha) - \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\sin(-n\alpha)\right)\right) =$$

$$-\frac{4}{\pi}\frac{1}{\alpha n^2}\underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1\ \ldots}\sin(n\alpha) = \begin{cases} 0 & n \text{ PARI} \\ -\frac{4}{\pi}\sin(n\alpha) & n = 1+4k \\ \frac{4}{\pi}\sin(n\alpha) & n = 3+4k \end{cases}$$

DUNQUE

$$f_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_{2k+1}\, c_{2k+1}(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} -\frac{4}{\pi\alpha} \frac{\sin(2k+1)\alpha}{(2k+1)^2} (-1)^k\, c_{2k+1}(x)$$

PASSIAMO ALL' EQ. DIFF. $y(x) = \sum y_n\, c_n(x)$

$$y'' = \sum y_n\, (-n^2)\, c_n(x) \implies$$

$$(9 - n^2)\, y_n = f_n$$

RISOLVO SE $n \neq 0$ $\quad y_n = \dfrac{f_n}{9-n^2}$ $\quad (y_n = 0$ se n pari$)$

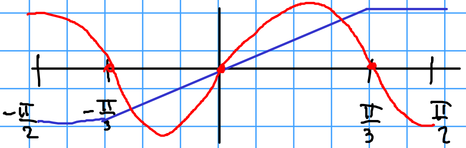
SE $n = 3$ CONDIZIONE $f_3 = 0 \iff \boxed{\sin(3\alpha) = 0}$

cioè $3\alpha = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\alpha = \frac{m\pi}{3}}$$

l'unico possibile è $m = 1$ cioè

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$$



$$\cos\left(3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(3x + \frac{3}{2}\pi\right) =$$

$$\cos(3x)\underbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}_{=0} - \sin(3x)\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(3x)$$

Quindi se $\alpha = \frac{\pi}{3}$ esiste sol. (se no non esiste)

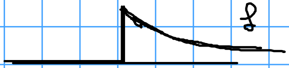
tale sol non è unica e si può scrivere

$$y(x) = \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k=0}}^{\infty} y_{2k+1}\, c_{2k+1}(x) + \bar{y}\, c_3(x)$$

con $\bar{y}$ arbitrario

vedi sopra - - .

$$y'' + 2y' + y = \underbrace{H(t)\, e^{-t}}_{f(t)}$$



Trasform. con Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(i\omega+1)t}\, dt =$$

$$\left[\frac{e^{-(i\omega+1)t}}{-(i\omega+1)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{i\omega+1}$$

Trasformo l'equazione

$$\hat{y}(\omega)\left[(-i\omega)^2 + 2(i\omega) + 1\right] = \frac{1}{i\omega+1}$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(-\omega^2 + 2i\omega + 1)(i\omega + 1)} = \frac{i}{(\omega^2 - 2i\omega - 1)(\omega - i)}$$

Pongo $g(z) = \dfrac{i e^{itz}}{(z^2 - 2iz - 1)(z - i)} = \dfrac{i e^{itz}}{(z - i)^3}$

Solo il polo $z = i$ TRIPLO.

Mi serve il residuo di $g(z)$ in i

$$\mathrm{Res}(g, i) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} i e^{itz} \Big|_{z=i} =$$

$$\frac{i}{2} \frac{d}{dz} i t e^{itz} \Big|_{z=i} = -\frac{t}{2} i t e^{itz} \Big|_{z=i} = -\frac{i t^2}{2} e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \begin{cases} i\,\mathrm{Res}(g, i) = \dfrac{t^2}{2} e^{-t} \\ 0 \quad \text{se } t<0 \end{cases} = H(t)\frac{t^2}{2} e^{-t}$$

VERIFICO (non necessario...) : $\quad t>0$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} e^{-t} \qquad y(0^+)=0$$

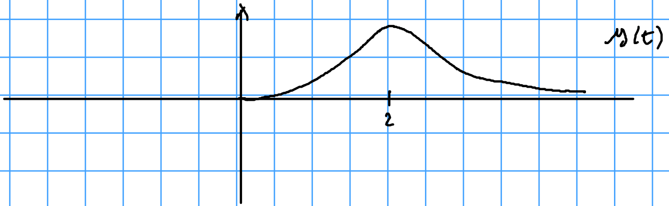
$$y'(t) = \frac{2t}{2} e^{-t} - \frac{t^2}{2} e^{-t} = \underline{\left(t - \frac{t^2}{2}\right)} e^{-t} \qquad y'(0^+)=0$$

$$y''(t) = (1-t)e^{-t} - \left(t - \frac{t^2}{2}\right) e^{-t} = \left(1 - 2t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}$$

$$\left(y''(0^+) = 1 \neq y''(0^-)\right)$$

$$y'' + 2y' + y =$$

$$e^{-t} H(t) \left(\left(1 - 2t + \frac{t^2}{2}\right) + 2\left(t - \frac{t^2}{2}\right) + \frac{t^2}{2} \right) = H(t)e^{-t} \qquad \text{TORNA}$$



2
y(t)