Complementi di Matematica
Ventottesima lezione (esercizi preparatori al compitino)

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

4 dicembre 2009

Risoluzione del compitino del 13 dicembre 2008

1. Si consideri la successione di funzioni definita da

$$f_n(x) := \frac{x^\alpha}{n^2 + x^3}.$$

dove α è un parametro reale

   1. Si dica per quali valori si α la serie

   $$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

   è convergente in $L^1([0, +\infty[)$.

   2. Si dica se, per $\alpha = \frac{3}{4}$, la serie scritta sopra è convergente in $L^2([0, +\infty[)$.

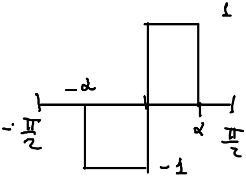
2. Si calcoli la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$$

3. Dato il parametro reale α con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ si consideri la funzione f_α definita da

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < \alpha \\ -1 & \text{se } -\alpha < t < 0 \\ 0 & \text{se } |\alpha| < t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$\alpha < |t| < \frac{\pi}{2}$



ed estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da essere π-periodica.

1. Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier di f_α.
2. Si mostri che il problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + y = f_\alpha & \text{in } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{\pi}{2}\right), y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

ha un'unica soluzione per ogni α e si esprima tale soluzione mediante una serie di Fourier.

3. Indicata con y_α la soluzione del problema precedente, si può dire che se $\alpha \to 0$ allora $y_\alpha \to 0$ uniformemente?

(1) $f_n(x) = \dfrac{x^\alpha}{n^2 + x^3}$. Studiare la convergenza

della serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in $L^1([0,+\infty[)$

al variare di α. Ricordo la convergenza L^1

della serie significa che esiste $S(x)$ in L^1

tale che $\left\| \sum_{n=1}^{K} f_n(x) - S(x) \right\|_{L^1} \xrightarrow{K \to \infty} 0$,

cioè $\int_0^{+\infty} \left| \sum_{n=1}^{K} f_n(x) - S(x) \right| dx \xrightarrow{K \to \infty} 0$

Dato però che L^1 è completo per questo basta la (sufficiente)

convergenza assoluta (L^1) cioè la conv. della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_{L^1} \quad \cancel{\to}$$

Però tale conv. assoluta non è necessaria.

Calcoliamo dunque

$$\| f_n \|_{L^1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{n^2+x^3}\, dx = \circledast$$

(mi serve vedere come dipende da n). Conviene fare un cambio di variabile: $x^3 = n^2 y^3 \iff y = n^{-\frac{2}{3}} x$

$\boxed{x = n^{\frac{2}{3}} y}$ $\quad dx = n^{\frac{2}{3}} dy$, y va da zero a $+\infty$

$$\circledast = \int_0^{+\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}\alpha}\, y^\alpha}{n^2(1+y^3)}\, n^{\frac{2}{3}} dy = n^{\frac{2}{3}\alpha - \frac{4}{3}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{y^\alpha}{1+y^3} dy}_{C_\alpha}$$

Oss. preliminare: Posso considerare queste norme L^1 soltanto se $f_n \in L^1$. Dato che all'infinito $f_n(x) \simeq \frac{x^\alpha}{x^3} = \frac{1}{x^{3-\alpha}}$

$f_n \in L^1 \iff 3-\alpha > 1 \iff \boxed{-1 < \alpha < 2}$

C'È ANCHE L'INTEGRABILITÀ IN ZERO $\iff \alpha > -1$

CONDIZIONE A PRIORI PER PORSI IL PROBLEMA

Sotto questa condizione $\int_0^{+\infty} \frac{y^\alpha}{1+y}\,dy = C_\alpha$ finito

Quindi: $\|f_n\|_{L^1} = \dfrac{C_\alpha}{n^{\frac{4-2\alpha}{3}}}$. È chiaro

che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^1} < +\infty \iff \frac{4-2\alpha}{3} > 1 \iff$

$\frac{4}{3} - 1 > \frac{2}{3}\alpha \iff 1 > 2\alpha \iff \boxed{\alpha < \frac{1}{2}}$

Questo mostra che se $-1 < \alpha < \frac{1}{2} \implies \sum f_n$ CONV. IN L^1

MA NON IL VICEVERSA. (la conv. non implica la conv. assoluta)

Scommettiamo sul fatto che $\sum f_n$ conv. <u>esattamente</u> per $\alpha < \frac{1}{2}$. Cerchiamo di far vedere allora che se $\alpha \geq 1$ la serie non converge in L^1.

USO QUESTO FATTO: se $f_n \xrightarrow{L^1(E)} f \Rightarrow$

$$\int_E f_n(x)\,dx \to \int_E f(x)\,dx.$$

Analogamente se

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ conv. } L^1(E) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \underset{\overset{\Uparrow}{\mathbb{R}}}{\int_E \left(\sum f_n(x)\right)dx}$$

Se faccio vedere che (nel nostro caso), per $\alpha \geq \frac{1}{2}$, la serie

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx}$$

non converge, allora

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ non può convergere L^1.

Si ha: (conto che le f_n sono ≥ 0)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=} \frac{C_\alpha}{n^{\frac{4-2\alpha}{3}}} = +\infty \text{ se } \alpha \geq \frac{1}{2}$$

Dunque $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ conv. in } L^1([0,+\infty[) \iff \alpha < \frac{1}{2}}$$

Nota In questo modo si vede che, se $f_n \geq 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ conv. } L^1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_1 < +\infty$$

CONSIDERIAMO LA CONV. $L^2([0,+\infty[)$

(Non è necessario portarsi dietro α - potrei subito mettere $\alpha > \frac{3}{4}$)

Facciamo prima la conv. assoluta.

$$\| f_n \|_2^2 = \int_0^{+\infty} |f_n(x)|^2 \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha}}{(n^2+x^3)^2} \, dx$$

Anche qui va prima visto per quali α le f_n sono L^2. Dato che $|f_n|^2 \simeq \frac{x^{2\alpha}}{x^6} = \frac{1}{x^{6-2\alpha}}$;

l'integrabilità $\Longleftrightarrow$ $6-2\alpha > 1$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{5}{2}}$

($\alpha > -\frac{1}{2}$ per avere l'integr. in

(condizione preliminare). Torniamo al calcolo di $\|f_n\|^2$

Come prima faccio una sostituzione $x = n^{\frac{2}{3}} y$

$dx = n^{\frac{2}{3}} \, dy$. Viene:

$$\| f_n \|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{(n^{\frac{2}{3}} y)^{2\alpha}}{(n^2 + n^2 y^3)^2} \, n^{\frac{2}{3}} \, dy =$$

$$\frac{n^{\frac{4\alpha}{3}}\, n^{\frac{2}{3}}}{n^4} \int_0^{+\infty} \frac{y^{2\alpha}}{(1+y^3)^2}\, dy = \frac{D\alpha}{n^{\frac{10-4\alpha}{3}}}$$

$$\|f_n\|_2 = \frac{\sqrt{D\alpha}}{n^{\frac{5-2\alpha}{3}}} .$$ Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty$

$(e\ \alpha > -\frac{1}{2})$

esattamente se $\frac{5-2\alpha}{3} > 1 \iff \frac{5}{3} - 1 > \frac{2}{3}\alpha \iff \boxed{\alpha < 1}$

Dato che $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$ la serie (con $\alpha = \frac{3}{4}$) conv. $L^2(0,+\infty)$

<u>Oss.</u> Nel caso L^2 non è così facile far vedere che

$\alpha < 1$ è anche necessaria (PERÒ È VERO !!!)

VARIANTE

Considero le stesse f_n su $[0,1]$

(In questo caso le f_n sono L^1 $\forall \alpha > -1$ / L^2 $\forall \alpha > -1/2$)

Facciamo la discussione L^1. Calcolo

$$\|f\|_1 = \int_0^1 \frac{x^\alpha}{n^2+x^3}\,dx$$. Stessa sostituzione

$$x = n^{\frac{2}{3}} y \quad , \; dx = n^{\frac{2}{3}}\,dy \quad , \; y = n^{-\frac{2}{3}} x$$

$$\|f\|_1 = \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} \frac{n^{\frac{2\alpha}{3}}\, y^\alpha}{n^2(1+y^3)}\, n^{\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$n^{\frac{2\alpha-4}{3}} \underbrace{\int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} \frac{y^\alpha}{1+y^3}\,dy}$$

questo tende a zero se $n \to +\infty$; mi serve capire con che ordine va annulla. Per questo o calcolo l'integrale (difficile) o valuto l'andamento rispetto a n?

Se $n \to \infty$ $n^{-\frac{2}{3}} \to 0$. Vicino a zero l'integranda $\simeq y^\alpha$. Quindi

$$\int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} \frac{y^\alpha}{1+y^3}\,dy \simeq \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} y^\alpha\,dy = \left.\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^{n^{-\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{1}{\alpha+1}\, n^{-\frac{2}{3}(\alpha+1)}.$$

Quindi complessivamente

$$\|f_n\|_1 \simeq \underline{\text{cost.}}\, n^{\frac{2\alpha-4}{3} - \frac{2\alpha+2}{3}} = \text{cost.}\, n^{-\frac{6}{3}} = \frac{\text{cost.}}{n^2}$$

DUNQUE (SE non ci sono errori)

$$\sum f_n \quad \text{conv.} \quad L^1(0,1) \quad \forall \alpha > -1$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} \frac{y^\alpha}{1+y^3} \leq \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} \frac{y^\alpha}{1+y^3}\,dy \leq \int_0^{n^{-\frac{2}{3}}} y^\alpha$$

vicino a zero

$$\frac{y^\alpha}{1+y^3} \simeq y^\alpha$$

DA RICORDARE

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \iff \alpha < 1$$

$$\left(\int_0^1 x^\alpha < +\infty \iff \alpha > -1 \right)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$$

$$\left(\int_1^{+\infty} x^\alpha < +\infty \iff \alpha < -1 \right)$$

(2) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases}$

$\mathcal{F}(e^{-|t|})(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$. Applico $\mathcal{F}$ all'equazione

$$(-\omega^2 + 2\omega i + 1)\,\hat{y}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{2}{(\omega+i)(\omega-i)}$$

$$z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 \Rightarrow (i\omega+1)^2 = -(\omega-i)^2$$

Dunque

$$\boxed{\hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(\omega-i)^3(\omega+i)}}$$

2 poli: i di ordine 3, $-i$ semplice.

Mi servono i residui di $\dfrac{-2e^{izt}}{(z-i)^3(z+i)}$

in $z=i$, $z=-i$

$$\operatorname{Res}(i) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{d^2}{dz^2} \frac{-\cancel{2}\, e^{izt}}{(z+i)}\Bigg|_{z=i} =$$

$$= -\frac{d}{dz} \frac{it e^{izt}(z+i) - e^{izt}}{(z+i)^2}\Bigg|_{z=i} =$$

$$= -\frac{\left[(it)^2 e^{izt}(z+i) + \cancel{it e^{izt}} - \cancel{it e^{izt}}\right](z+i)^2 - \dots}{(z+i)^4}$$

$$\dots \frac{-\left(it e^{izt}(z+i) - e^{izt}\right) 2(z+i)}{}\Bigg|_{z=i}$$

$$= -e^{-t}\, \frac{\left[-t^2\, 2i\right]\overset{-4}{(2i)^2} - \left(it(2i) - 1\right) 2(2i)}{(2i)^4} =$$

$$-i\frac{e^{-t}}{16}\left\{ 8t^2-4(-2t-1)\right\} = -i\frac{e^{-t}}{16}(8t^2+8t+4)$$

$$\text{Res}(-i) = \frac{-2e^{izt}}{(z-i)^3}\Bigg|_{z=-i} = \frac{-2e^{t}}{(-2i)^3} = \frac{e^{t}}{4}i$$

$$\Rightarrow \quad y(t)=\begin{cases} i(-i)\frac{e^{-t}}{16}(8t^2+8t+4) = \frac{e^{-t}}{4}(2t^2+2t+1) & \text{se } t>0 \\ (-i)i\frac{e^{t}}{4} = \frac{e^{t}}{4} & \text{se } t<0 \end{cases}$$

VEDIAMO SE y, y', y'' si "raccordano in zero"

$y(0^+) = \frac{1}{4} = y(0^-)$ ok

$t>0$ $\quad y'(t) = -\frac{e^{-t}}{4}(2t^2+2t+1) + \frac{e^{-t}}{4}(4t+2) = \frac{e^{-t}(-2t^2+2t+1)}{4}$

$t<0$ $\quad y'(t) = \frac{e^{t}}{4}$

$y'(0^+) = \frac{1}{4} = y'(0^-)$ ok

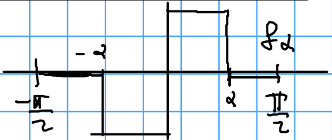
$t>0 \quad y''(t) = \frac{e^{-t}}{4}\left(+2t^2-2t-1\right) + \frac{e^{-t}}{4}\left(-4t+2\right) =$

$$\frac{e^{-t}}{4}\left(2t^2-6t+1\right) \qquad y''(0^+) = \frac{1}{4}$$

$t<0 \quad y''(t) = \frac{e^{t}}{4} \qquad y''(0^-) = \frac{1}{4}$

ok.

Es. 3



(1) sviluppo di Fourier di f_α

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_\alpha(t)\, e^{-i2nt}\, dt \qquad \left(T = \pi \Rightarrow \omega = 2\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\alpha} e^{-2nit}\,dt - \int_{-\alpha}^{0} e^{-2nit}\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-2nit}}{-2ni}\right]_0^{\alpha} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{-2nit}}{-2ni}\right]_{-\alpha}^{0} =$$

$$\frac{1}{2\pi n i}\left\{ e^{-2nai} - 1 - 1 + e^{+2nai} \right\} =$$

$$\frac{i}{n\pi}\left\{ \cos(2na) - 1 \right\}$$

(2) Risolvere

$$\begin{cases} y'' + y = f_a \\ y \ \pi\text{-periodica} \end{cases}$$

Se cerco $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n e^{2nit} \Rightarrow$

$y''(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} -4n^2 y_n e^{2nit}$ da cui

$$y_n(1-4n^2) = c_n$$

da cui ricavo $y_n = \dfrac{c_n}{1-4n^2} = \dfrac{i\,(\cos(2n\alpha)-1)}{\pi n\,(1-4n^2)}$

che mi dà una $y(t)$ soluzione unica.

(3) Che succede per $\alpha \to 0$; posso dire che

$y_\alpha \to 0$ unif ??

In effetti:

$$y_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n\, e^{2nit}$$

$$\|y_\alpha\|_\infty \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| y_{n,\alpha}\, e^{2nit} \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y_{n,\alpha}|$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(n\alpha)}{\pi\, n\,(4n^2-1)} \quad (*)$$

POSSO DIRE CHE LA SERIE $\to 0$ se $\alpha \to 0$??

→ Limite sotto il segno di serie.

(*) lo posso vedere come una serie di funzioni

$$g_n(\alpha) = \frac{1 - \cos(n\alpha)}{\pi\, n(4n^2-1)}$$, tutte continue rispetto ad α

__Domanda__ posso dire che la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n(\alpha)$ conv.

uniformemente – lo posso dire se ho la conv. totale

In effetti $\|g_n\|_\infty$ (su $[0\ 1]$) è

maggiorata da $\frac{2}{\pi n(4n^2-1)}$ ⟹

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|g_n\|_\infty < +\infty \implies \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n(\alpha) \xrightarrow{\text{UNIF.}} S(\alpha)$$

⟹ $S(\alpha)$ è continua rispetto ad α

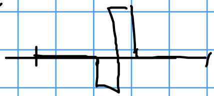
Dato che $S(0) = \sum \frac{1-\cos(2\alpha\cdot 0)}{----} = 0$

posso dire che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2\alpha n)}{\pi n (4n^2-1)} \to 0$ se $\alpha \to 0$

da cui (per la disuguaglianza di prima)

$\| y_\alpha \|_\infty \to 0$ se $\alpha \to 0$ cioè

$y_\alpha \xrightarrow{UNIF} 0$ per $\alpha \to 0$



ONLY FOR THE BRAVEST.