# Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica
# Ventisettesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

3 dicembre 2009

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = H(t)\sin(\omega t) \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases} \qquad (y \in L_0^+)$$

Uso Laplace

$$\mathcal{L}(H(t)\sin(\omega t))(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2}$$

$$\check{y}(z) = \frac{\omega}{z^2+\omega^2} \, \frac{1}{z^2+2z+2}$$

Uso il metodo dei residui per calcolare $y(t)$

$y(t) = 0$ se $t < 0$, mentre se $t > 0$

$$y(t) = \sum \text{tutti i residui di } \frac{\omega\, e^{zt}}{(z^2+\omega^2)(z^2+2z+2)}$$

• tutti poli semplici, cioè $\pm \omega i$, $-1 \pm i$

• $$\mathrm{Res}(\omega i) = \left.\frac{\omega\, e^{zt}}{2z(z^2+2z+2) + (2z+2)(z^2+\omega^2)}\right|_{z=\omega i}$$

○ se $z = -1 \pm i$ ○ se $z = \pm \omega i$

$$= \frac{\cancel{\omega}\, e^{i\omega t}}{2\cancel{\omega} i(-\omega^2 + 2\omega i + 2)} = \frac{e^{i\omega t}(2-\omega^2-2\omega i)}{2i[(2-\omega^2)^2 + 4\omega^2]}$$

$$= \frac{e^{i\omega t}[(2-\omega^2) - 2\omega i]}{2i(\omega^4+4)}$$

• $$\mathrm{Res}(-\omega i) = \frac{e^{-i\omega t}[(2-\omega^2)+4\omega i]}{(-2i)(\omega^2+4)}$$

• $$\mathrm{Res}(-1+i) = \frac{\omega\, e^{t(-1+i)}}{(2i)((-1+i)^2+\omega^2)} =$$

$$\frac{\omega e^{-t} e^{it}}{(2i)(\omega^2-2i)} = \frac{\omega e^{-t} e^{it}(\omega^2+2i)}{(2i)(\omega^4+4)}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\left(\frac{a+ib}{i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{a}{i}+b\right) = b}$$

- $$\mathrm{Res}(-1-i) = \frac{\omega e^{-t} e^{-it}}{(-2i)(\omega^4+4)}$$

Calcoliamo $y(t)$ per $t>0$

$$\cancel{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{i\omega t}[(2-\omega^2)-2\omega i]}{\cancel{2}i(\omega^4+4)}\right\} + \cancel{2}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\omega e^{-t} e^{it}(\omega^2+2i)}{(\cancel{2}i)(\omega^4+4)}\right\}$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i\omega t}[(2-\omega^2)-2\omega i]}{\omega^4+4}\right) + \omega e^{-t}\,\mathrm{Im}\,\frac{e^{it}(\omega^2+2i)}{\omega^4+4} =$$

$$= \underbrace{\frac{-2\omega\cos(\omega t)+(2-\omega^2)\sin(\omega t)}{\omega^4+4}}_{\text{REGIME}} + \underbrace{\omega e^{-t}\,\frac{2\cos(\omega t)+\omega^2\sin(\omega t)}{\omega^4+4}}_{\text{TRANSITORIO}}$$

Sarebbe interessante studiare l'ampiezza del termine di regime al variare di $\omega$.

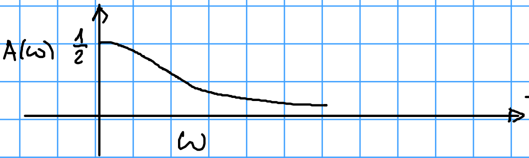
Se $y_s(t) = \dfrac{-2\omega}{\omega^4+4}\cos(\omega t) + \dfrac{2-\omega^2}{\omega^4+4}\sin(\omega t)$

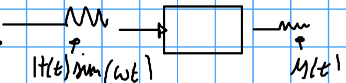
$$= A\cos(\omega t + \theta) \qquad (A = A(\omega))$$

$$A^2 = \left(\frac{-2\omega}{\omega^4+4}\right)^2 + \left(\frac{2-\omega^2}{\omega^4+4}\right)^2 =$$

$$A = \frac{\sqrt{4\omega^2 + (2-\omega^2)^2}}{\omega^4+4} = \frac{1}{\sqrt{\omega^4+4}}$$

funzione decrescente di $\omega$



**Teorema** $a_0, a_1, \dots a_N \in \mathbb{C}$, $a_N \neq 0$, $f \in L_0^+$

$$\begin{cases} a_N y^{(N)} + \dots + a_0 y = f \\ y \in L_0^+ \end{cases}$$

($P(z) := a_N z^N + \dots + a_0$ polinomio caratteristico)

**Ipotesi ragionevole** $\alpha(f) < +\infty$,

$$|\check{f}(z)| \leq \frac{\text{costante}}{1+|z|} \quad \text{per } \operatorname{Re} z > \alpha(f)$$

Allora posso usare Laplace e trovo

$$\boxed{\check{y}(z) = \frac{\check{f}(z)}{P(z)}}$$

; con l'ipotesi fatta su $\check{f}$ posso antitrasformare e trovo $y \in L_0^+$, $y, y', \dots, y^{(N-1)}$ sono continue perché le loro trasformate di $\mathcal{L}$ hanno crescita

$\simeq \frac{C}{1+|z|^{N+1}}, \frac{C}{1+|z|^{N}}, \dots, \frac{C}{1+|z|^{2}}$, mentre

$y^{(N)}$ (che ha trasformata $\simeq \frac{C}{1+|z|}$) può

essere discontinua in zero.

Se $\check{f} = \frac{P_1(z)}{Q(z)}$ (funzione razionale) posso

usare il metodo dei residui per calcolare $y(t)$.

DI FATTO RISOLVIAMO IN QUESTO MODO

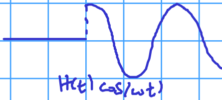
$$\begin{cases} a_N y^{(N)} + \dots + a_0 y = f & \text{su } t>0 \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(N-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

cioè il problema di Cauchy con tutti i dati nulli in $t=0$

(conveniente x $f \equiv 0 \Rightarrow y \equiv 0$).


## Altro esempio

$$\begin{cases} y'' + 4y = H(t)\cos(\omega t) \quad (= f(t)) \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases}$$




Uso Laplace: $\check{f}(z) = \dfrac{z}{z^2+\omega^2}$ $\left( \check{f}(z) \simeq \dfrac{1}{|z|} \right.$ $f$ è discontinua in $t=0$ $\left.\right)$

Ne ricavo $\check{y}(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)(z^2+\omega^2)}$

$\rightarrow$
- $\omega \neq 2$ 4 poli semplici $\pm 2i$ $\pm \omega i$
- $\omega = 2$ 2 poli doppi $\pm 2i$ (RISONANZA)

CASO $\omega \neq 2$   Mi servono i residui di $\dfrac{z\, e^{zt}}{(z^2+4)(z^2+\omega^2)}$ nei vari poli:

- $\mathrm{Res}(2i) = \dfrac{z\, e^{zt}}{2z(z^2+\omega^2)+2z(z^2+4)}\Bigg|_{z=2i} = \dfrac{\cancel{2i}\, e^{2it}}{\cancel{4i}\,2\,(\omega^2-4)}$

$$= \frac{e^{2it}}{2(\omega^2-4)}$$

- $\mathrm{Res}(-2i) = \dfrac{e^{-2it}}{2(\omega^2-4)}$  $\Big\} \leftarrow 1$

- $\mathrm{Res}(\omega i) = \dfrac{\omega i\, e^{i\omega t}}{2\omega i\,(4-\omega^2)} = \dfrac{e^{i\omega t}}{2(4-\omega^2)}$  $\Big\} \leftarrow 2$

- $\mathrm{Res}(-\omega i) = \dfrac{e^{-i\omega t}}{2(4-\omega^2)}$

- Sommo tutti i residui:

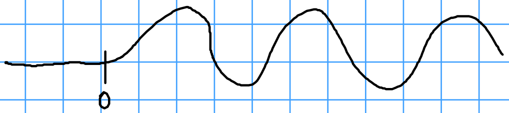
$$y(t) = \frac{\overset{1}{\mathrm{Re}\left(e^{2it}\right)}}{\omega^2-4} - \frac{\overset{2}{\mathrm{Re}\left(e^{i\omega t}\right)}}{\omega^2-4} = \frac{\cos(2t)-\cos(\omega t)}{\omega^2-4}$$

(per $t>0$)

Dato che $y(t)=0$ per $t<0$ posso scrivere:

$$y(t) = H(t)\,\frac{\cos(2t)-\cos(\omega t)}{\omega^2-4}$$

Noto che deve essere $y \in C^1$ $\left( y(0^+) = y'(0^+) = 0 \right)$




<u>caso $\omega = 2$</u> $\quad z = 2i$ è un polo doppio $\left( di \ \dfrac{z e^{zt}}{(z^2+4)^2} \right)$

$$\mathrm{Res}(2i) = \frac{d}{dz}\,\frac{z\,e^{zt}}{(z+2i)^2}\Bigg|_{z=2i} =$$

$$\frac{\left(e^{zt} + t z e^{zt}\right)(z+2i)^2 - z e^{zt}\,2\,(z+2i)}{(z+2i)^4}\Bigg|_{z=2i}$$

$$e^{2it}\,\frac{(1+2it)(4i)^2-2i\cdot 2(4i)}{(4i)^4}=$$

$$\frac{e^{2it}}{256}\Big[(1+2it)(-16)+16\Big]=\frac{e^{2it}}{16}\left(-1-2it+1\right)=$$

$$-\frac{e^{2it}}{8}\,it$$

- $\mathrm{Res}(-2i)=\frac{e^{-2it}}{8}\,it \implies$ se $t>0$ trovo

$$y(t)=2\,\mathrm{Re}\left(-\frac{e^{2it}\,it}{8}\right)=\frac{t}{4}\,\mathrm{Im}\left(e^{2it}\right)=$$

$$\frac{t\sin(2t)}{4}$$ . Volendo posso scrivere:

$$y(t)=H(t)\,\frac{t\sin(2t)}{4}\qquad\forall t\in\mathbb{R}$$

"VERIFICA" ~~x~~ $\omega \neq 2$

$$y(t) = H(t)\left(\frac{\cos(2t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - 4}\right).$$

Faccio il limite per $\omega \to 2$ (uso de l'Hôpital)

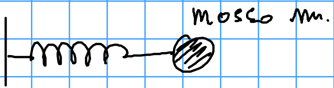
$$\frac{\frac{d}{d\omega} H(t)\left(\cos(2t) - \cos(\omega t)\right)}{\frac{d}{d\omega}\left(\omega^2 - 4\right)} =$$

$$H(t)\,\frac{t\,\sin(\omega t)}{2\omega} \xrightarrow{\omega \to 2} \frac{H(t)\,t\,\sin(\omega t)}{4}$$

quella del caso $\omega = 2$

Se studiamo il problema generale

$$\begin{cases} a y'' + b y' + c y \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases}$$




attrito    forza esterna

$$F = ma \iff -ky - by' + f = my''$$

forza elastica

$$\iff \underset{a}{m} y'' + \underset{b}{b} y' + \underset{c}{k} y = f$$

$\Big( P(z) = mz^2 + bz + k$

Pensiamo a $f(t) = H(t)\cos(\omega t)$

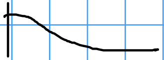
Se $b=0$ (no attrito) trovo un problema

come il secondo (c'è una risonanza se $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$)

Se $b > 0$ $\quad y(t) = \underset{\text{REGIME}}{y_0(t)} + \underset{\text{TRANSITORIO}}{y_1(t)}$

e ci sono due sottocasi. c'è un $\bar{b}$ tale che

- se $b \geq \bar{b}$ l'ampiezza di $y_0$ decresce al crescere di $\omega$



- se $b < \bar{b}$

APPENDICE (non fatto a lezione)

Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$; $P(z) = az^2 + bz + c$.

Allora $P(z) = a(z-z_1)(z-z_2)$ dove

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{se } \Delta \geq 0$$

$$= \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{se } \Delta < 0$$

Vogliamo studiare l'eq. ($\omega \geq 0$ parametro)

$$\begin{cases} a y'' + b y' + c y = H(t)\cos(\omega t) \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Applicando Laplace:

$$\check{y}(z) = \frac{z}{a(z-z_1)(z-z_2)(z^2+\omega^2)}$$

Supponiamo per semplicità che $z_1 \neq z_2$, $z_{1,2} \neq \pm i\omega$

(la seconda è sicuramente vera se $b > 0$).

Sia $g(z) = \dfrac{z e^{tz}}{P(z)(z^2+\omega^2)}$. Calcoliamo

$$\mathrm{Res}(g, i\omega) = \left.\frac{z\, e^{tz}}{P(z)\,(z+i\omega)}\right|_{z=i\omega} = \frac{i\omega\, e^{i\omega}}{P(i\omega)\,(2i\omega)} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{i\omega}}{-a\omega^2+ib\omega+c} = \frac{1}{2}\,\frac{e^{i\omega}\left[(c-a\omega^2)-ib\omega\right]}{(c-a\omega^2)^2+b^2\omega^2} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{e^{i\omega}}{a^2\omega^4+(b^2-2ac)\omega^2+c^2}\left[(c-a\omega^2)-ib\omega\right]$$

Per calcolare tutta la soluzione servirebbero anche i residui in $z_1$ e $z_2$ – tali residui però contribuiscono a formare il "termine transitorio". Dunque il "pezzo di regime" è

$$y_0(t) = \cancel{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{e^{i\omega}}{a^2\omega^4+(b^2-2ac)\omega^2+c^2}\left[(c-a\omega^2)-ib\omega\right]\right) =$$

$$\frac{(c-a\omega^2)\cos(\omega t)+b\omega\sin(\omega t)}{a^2\omega^4+(b^2-2ac)\omega^2+c^2} \qquad (\text{per } t>0)$$

Si vede facilmente (riguardando i calcoli fatti) che l'ampiezza $A = A(\omega)$ è uguale a

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a^2\omega^4+(b^2-2ac)\omega^2+c^2}}$$

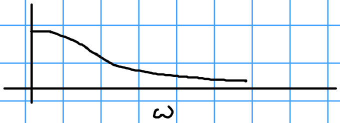
Per vedere l'andamento di $A$ conviene fare il grafico di $A^2$, che ha come derivata

$$(A^2)'(\omega) = \frac{-\left(4a^2\omega^3 + 2(b^2-2ac)\omega\right)}{\left(a^2\omega^4 + (b^2-2ac)\omega^2 + c^2\right)^2} =$$

$$\frac{-\omega\left(4a^2\omega^2 + 2(b^2-2ac)\right)}{\left(a^2\omega^4 + (b^2-2ac)\omega^2 + c^2\right)^2}$$

Si vede allora che:

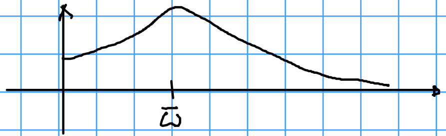
(1) se $b^2 - 2ac \geq 0$ la funzione $A^2$ è sempre decrescente



(2) Se $b^2 - 2ac < 0$ allora la derivata si

annulla se $\omega^2 = \dfrac{2ac - b^2}{4a^2}$ $(\omega > 0)$ e

quindi l'andamento di $A(\omega)$ è



dove $\bar{\omega} = \boxed{\sqrt{\dfrac{2ac - b^2}{2a}}}$

Notiamo che $b^2 < 2ac$ è compatibile con

$b^2 < 4ac$ (che significa $z_1 = \bar{z}_2$ non reali).

Se $b \to 0$ $\bar{\omega} \to \sqrt{\dfrac{c}{2a}}$ .