Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica
Ventiseiesima lezione

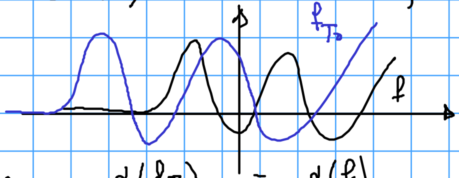
prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

1 dicembre 2009

Altre proprietà di $\mathcal{L}$ .. Sia $f \in L^+$

(Traslazioni) Se $T_0 \in \mathbb{R}$, $f_{T_0}(t) = f(t-t_0) \in L^+$



Allora $\alpha(f_{T_0}) = \alpha(f)$. e

$$\check{f}_{T_0}(z) = e^{-T_0 z}\check{f}(z)$$

Infatti $\mathcal{L}(f_{T_0})(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{T_0}(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-T_0)\, e^{-zt}\, dt$

$(\tau = t - T_0 \leftrightarrow t = \tau + T_0,\ dt = d\tau)$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-T_0 z} e^{-\tau z}\, d\tau$

$= e^{-T_0 z}\,\check{f}(z)$

(dovere anche dire $\alpha(f_{T_0}) = \inf\{x : e^{-xt} f_{T_0}(t) \in L^1\} =$

$$\inf\{x : e^{-xt} f(t-T_0) \in L^1\} = \inf \underbrace{\{x : e^{-x\tau} e^{-T_0 x} f(\tau) \in L^1\}}_{\{x :\, e^{-x\tau} f(\tau) \in L^1\}}$$

dunque $\alpha(f_{T_0}) = \alpha(f)$).

<u>Analogamente</u> Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in L^+$; $e^{z_0 t} f(t) =: g(t)$

allora $\alpha(g) = \alpha(f) + \mathrm{Re}(z_0)$ e

$$\check{g}(z) = \mathcal{L}\left(e^{z_0 t} f(t)\right) = \check{f}(\underbrace{z - z_0}_{\text{ha } \mathrm{Re}(\cdot) > \alpha(f)}) \quad \text{con } \mathrm{Re}\, z > \alpha(f) + \mathrm{Re}\, z_0$$

<u>Dim.</u> $\check{g}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{z_0 t} f(t) e^{-zt}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-(z-z_0)t}\, dt = \check{f}(z - z_0)$

(cioè $\check{f}_{z_0}(z)$)

Oss. (senza dim.) Se $f, g \in L^+$ $\alpha(f) < +\infty$, $\alpha(g) < +\infty$,

se $\alpha \geq \max(\alpha(f), \alpha(g))$ e se

$$\check{f}(z) = \check{g}(z) \qquad \forall z \in H_\alpha$$

$$\Longrightarrow \quad f = g$$ (nei casi in facciamo $\mathcal{L}^{-1}$ questa è una conseg.)

Problema da $\mathcal{L}^{-1}$ (antitrasformata di Laplace).

Dato $g(z)$ olomorfa definita in un semipiano H_α, ($\alpha \in [-\infty, +\infty[$)

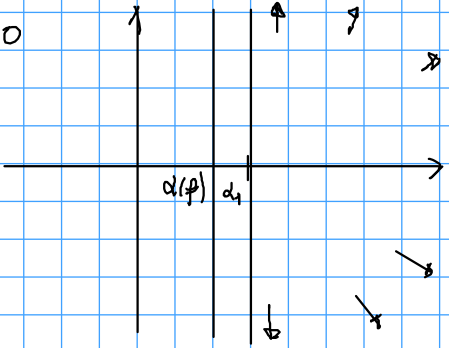
posso dire che esiste $f \in L^+$ tale che $\check{f}(z) = g(z)$

(e $\alpha(f) \leq \alpha$).

Poniamo $L_0^+(\mathbb{R}) = \{ f \in L^1_{loc} : f(t) = 0 \text{ se } t \leq 0 \}$

Prop. (che andare prima) Se $f \in L^1_0$, $\alpha(f) < +\infty$ allora

$$\forall \alpha' > \alpha(f) \qquad \lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ \operatorname{Re} z \geq \alpha'}} \check{f}(z) = 0$$



($\check{f}$ tende a zero all'infinito su ogni semipiano chiuso contenuto in H_α, che invece è aperto)

Dim (IDEA): Ci sono due fatti

(1) $\lim_{y \to \pm\infty} \check{f}(x+iy) = 0$, $x > \alpha(f)$

a causa del fatto che $\check{f}(x+iy) = \mathcal{F}\left(f(t)e^{-xt}\right)(y) \xrightarrow{y \to \pm\infty} 0$

(2) Se invece mando a $+\infty$ la x posso usare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di int. : per $t>0$

(i) $\left| f(t) e^{-xt} e^{-iyt} \right| = |f(t)| e^{-xt} \to 0$ se $x \to +\infty$

" " $= 0$ se $t<0$

(ii) $\left| f(t) e^{-zt} \right| \leq |f(t)| e^{-x_1 t} \in L^1$ per $\operatorname{Re} z = x > x_1$

$\forall z$ e

avendo fissato $x_1 > \alpha(f)$

(quindi posso applicare il teorema, quando mando $x \to +\infty$)

(3) (M) combinando (1) e (2) si ha la tesi

(con qualche calcolo)

Questo ultimo risultato ci dice che per essere una trasformata la $g(z)$ deve per lo meno andare a zero quando $|z| \to \infty$ (con...)

Facciamo ora vedere che, se quantifico come g va a zero riesco a dire che g è una trasformata.

<u>Teorema</u> Sia $\alpha \in [-\infty, +\infty[$, sia $g : H_\alpha \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che

$$|g(z)| \leq \frac{M}{|z|^2+1} \quad \forall z \in H_\alpha$$

(si annulla come $\frac{1}{|z|^2}$)

dove M è una opportuna costante.

Allora

(1) se $x > \alpha$ esiste l'integrale $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} g(z)\, e^{zt}\, dz$

ed è indipendente da x

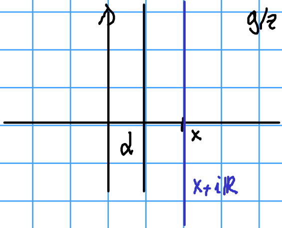
(b) $f(t)$ è continua in t

(c) $f(t) = 0$ se $t \leq 0$. $\left(f \in L^+_0(\mathbb{R}) \right)$.

(d) $\sigma(f) \leq \alpha$ e $\check{f}(z) = g(z)$ per $z \in H_\alpha$

<u>Dim.</u> Voglio considerare:

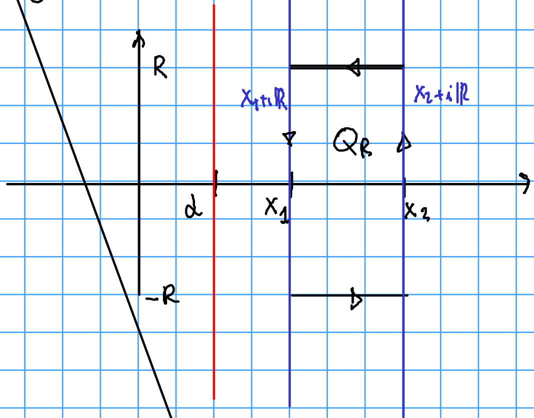
$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} g(z)\, e^{zt}\, dz$$



dove $x > \alpha$ (scelto ad arbitrio) e $x+i\mathbb{R}$ indica l'asse immaginario traslato in x. Vediamo che ciò ha senso.

(a) Fissiamo $t \in \mathbb{R}$. Dato $R>0$ consideriamo il rettangolo indicato Q_R

(dimenticato $\frac{1}{2\pi i}$ ...)



Dato che g è olomorfo in $H_\alpha \supset Q_R$ posso dir

$$\int_{\partial Q_R} g(z)\, e^{tz}\, dz = 0$$

Dimostro che il contributo dei lati orizzontali tende a zero ho dimostrato. Per questo

$$\left| \int_{\text{lato superiore}} g(z)\, e^{tz}\, dz \right| = \left| -\int_{x_1}^{x_2} g(x+iR)\, e^{(x+iR)t}\, dx \right| \leq$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{M}{1+x^2+R^2} e^{xt}\, dx \leq \frac{M}{R^2} \underbrace{\int_{x_1}^{x^2} e^{xt}\, dt}_{\text{NON DIPENDE DA } R} \xrightarrow{R \to +\infty} 0$$

e analogamente anche l'altro pezzo $\to 0$.

Dato poi che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x+iy)\, e^{(x+iy)t}\, i\, dy$ esiste ($\forall x > \alpha$), in quanto

il modulo dell'integrando è $\leq$

$$\frac{M}{x^2+y^2} e^{xt}$$

e è integrabile in y, ne posso

dedurre che tali integrali sono indipendenti da x $(> \alpha)$.

Dunque $f(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$

(b) La continuità di $f(t)$ si ricava applicando il solito teorema di passaggio al limite sotto il segno di int:

(1) l'integrando è continuo rispetto a t

(2) l'integrando si maggiora con una funzione integrabile

$$\left| g(x+iy)\, e^{t(x+iy)} \right| \le \frac{M}{x^2+y^2}\, e^{tx} \le \frac{M_1}{x^2+y^2}$$

$t_0-\delta \le t \le t_0+\delta$ (con M_1 opportuno)

(c) $f(t)=0$ se $t<0$. Sia $t<0$; dato che

$$|f(t)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x+iy)|\, e^{tx}\, dy \le \frac{e^{tx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{x^2+y^2}\, dy$$

ma dato che posso prendere x grande quanto voglio, e che $t<0$ il termine a destra tende a zero per $x\to+\infty$. Dunque $f(t)=0$

(d) • Mostriamo che $\alpha(f) \le \alpha$. Infatti se $x > \alpha$, $x > x_1 > \alpha$

$$\left| e^{-xt} f(t) \right| = \frac{1}{2\pi} e^{-xt} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+iy)\, e^{tx_1}\, dy \le$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M}{x^2+y^2}\, dy \quad e^{-(x-x_1)t}$$

← INTEGRABILE SU $[0,+\infty[$ perché $x > x_1$

Dato poi che $f(t) = 0$ per $t<0$ dico che

$$\forall x > \alpha \qquad e^{-xt} f(t) \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \alpha(f) \le \alpha$$

• Mostriamo che $\check{f}(z) = g(z)$. Abbiamo

$$f(t) = e^{xt} \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x+iy)\, e^{iy} \cancel{i}\, dy =$$

$$e^{xt}\,\mathcal{F}^{-1}\big(g(x+i\omega)\big)(t) \quad \Longleftrightarrow$$

$$e^{xt} f(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(g(x+i\omega)\big)(t) \quad \Longrightarrow$$

$$\mathcal{F}\big(e^{xt} f(t)\big)(\omega) = g(x+i\omega) \qquad \text{oppure}$$

$$\mathcal{F}\big(e^{xt} f(t)\big)(y) = g(x+iy) = g(z)$$

$$\mathcal{L}(f)(z) \qquad \#$$

MORALE se $g(z)$ si annulla quadraticamente $\Rightarrow$

$g(z)$ è trasformata di una $f \in L_0^+$, f continua

IN REALTA' BASTA

$$|g(z)| \leq \frac{M}{1+|z|^a} \qquad \text{con } a > 1$$

Posso indebolire l'ipotesi di crescita se g è "$\frac{P(z)}{Q(z)}$"

Teorema Se $g(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $\text{grado}(P) \leq \text{grado}(Q) - 1$

(se fosse -2, potrei usare il teorema precedente). Allora

posso definire $\alpha = \max\{\operatorname{Re} w,\ w \text{ radice di } Q\}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\, (\text{v.p.}) \int_{x + i\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{zt}\, dz \qquad \text{per } \operatorname{Re} z > \alpha$$

(a) tale $f(t)$ è ben definita e non dipende da x

(b) $f(t) = 0$ se $t < 0$

(c) $f(t)$ è continua per $t > 0$ (non in $t = 0$ in generale)

(d) $\lambda(f) \leq \alpha$, $\check{f}(z) = g(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$

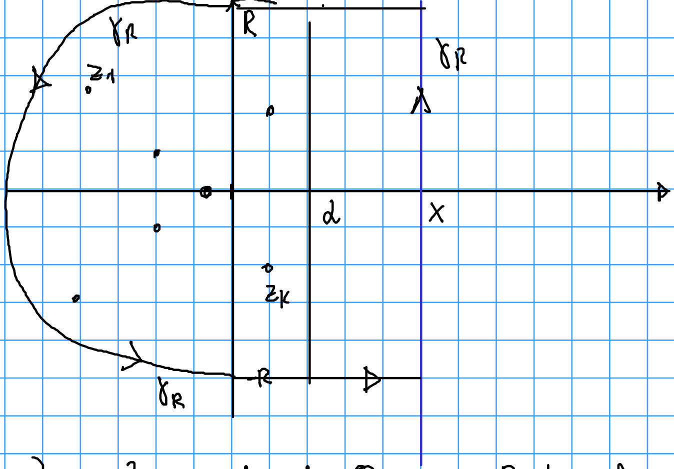
Inoltre:

$$f(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{Q(w)=0} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{tz}, w \right) & \forall\, t>0 \\ 0 & \forall\, t<0 \end{cases}$$

Dim. Mostro solo che, $\forall\ X > \alpha$

$$(v.p.)\ \frac{1}{2\pi i} \int_{x+i\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt}\, dt = \begin{cases} \sum \text{residui tutti i poli} \\ 0 & \forall\, t<0 \end{cases}$$

Fisso $R>0$ e considero il "disegno"



$z_1 \dots z_K$ = radici di Q. R tale che la curva γ_R tiene dentro tutte le radici di Q. Per il teorema dei residui

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} \, dz = \sum_{j=1}^{K} \operatorname{Res}\left(\frac{P}{Q} e^{zt}, z_j\right).$$

Si vede che i contributi su

- i due pezzi orizzontali (uno sopra e uno sotto)

- il pezzo semicircolare

TENDONO A ZERO se $R \to +\infty$. I pezzi orizzontali si trattano come nel caso precedente. Riguardo al pezzo semicircolare

$$\left| \int_{semicirc(R)} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{zt} \, dz \right| \leq \pi \cancel{R} \frac{cost}{\cancel{R}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tRe^{i\theta}} d\theta$$

$$\cancel{\frac{P(z)}{Q(z)}} \sim \frac{cost}{|z|}$$

e $e^{tRe^{i\theta}} \to 0$ se $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ per $R \to +\infty$

$\left| e^{tRe^{i\theta}} \right| \leq 1$ INTEGR. USANDO IL T. DI LEBESGUE $\Rightarrow$

$\int (\ ) dz \to 0$ se $R \to \infty$

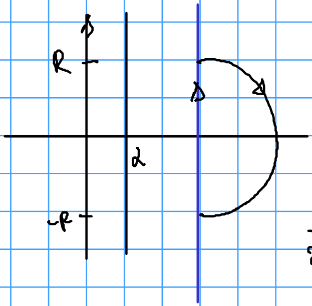
Dunque esiste

$$\frac{1}{2\pi i}(v.p.)\int_{x+i\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{tz}\, dz = \text{somma di tutti i residui}$$

$(t>0)$

(così il pezzo tondo $\to 0$ per $R \to \infty$)

Se invece $t<0$ "giro dall'altra parte". Dato che non ci sono poli, ragionando come prima, trovo



$$\frac{1}{2\pi i}(v.p.)\int_{x+i\mathbb{R}} \frac{P(z)}{Q(z)}\, e^{tz}\, dz = 0$$

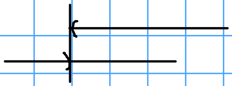
Per esempio

$$f(t) = H(t) \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \check{f}(z) = \frac{1}{z}$$

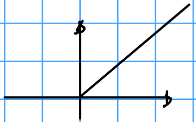
$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-zt}\, dt = \left[\frac{e^{-zt}}{-z} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{z}$$

$f(t)$ ha un salto in $t=0$



$$\check{f}(z) = \frac{1}{z}$$

Se invece $\quad f(t) = t\, H(t)$



Più in generale se $f(t) = t^k H(t) \Rightarrow$

$$\check{f}(z) = \frac{k!}{z^{k+1}}$$

e infine se $f(t) = H(t)\, t^k e^{z_0 t}$

$$\check{f}(z) = \frac{k!}{(z - z_0)^{k+1}}$$

Altro esempio: $f(t) = H(t) \sin(\omega t) = H(t) \dfrac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \rightarrow$

$$\check{f}(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - i\omega} - \frac{1}{z + i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\,\frac{\omega}{z^2 + \omega^2}$$

Invece se $f(t) = H(t)\cos(\omega t) = H(t)\dfrac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$

$$\check{f}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-i\omega} + \frac{1}{z+i\omega}\right) = \frac{z}{z^2+\omega^2}$$

Esempio

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = H(t)\sin(\omega t) \\ y(t) = 0 \quad \text{se } t < 0 \end{cases} \qquad \left(\sim \; y(0^+) = y'(0^+) = 0\right)$$

Applico Laplace

$$\left(z^2 + 2z + 2\right)\check{y}(t) = \frac{\omega}{\omega^2+z^2} \quad \Rightarrow$$

$$\check{y}(z) = \frac{\omega}{(z^2+2z+2)(z^2+\omega^2)}$$

quattro poli semplici $\pm i\omega$, $-1\pm i$. Dunque

$y(t) = 0$ se $t<0$, mentre se $t>0$

$$y(t) = \sum_{\substack{w=\pm i\omega \\ w=-1\pm i}} \mathrm{Res}\left(g(z), w\right)$$, dove $g(z) = \dfrac{\omega e^{zt}}{(z^2+2z+2)(z^2+\omega^2)}$

<u>NOTA</u> $\mathrm{Res}(g(z), \bar{w}) = \overline{\mathrm{Res}(g(z), w)}$ (se f è reale e i coeff dell'equazione sono reali)

CONTINUA ....