Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica
Venticinquesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

30 novembre 2009

Trasformata di Laplace.

Ricordiamo cosa fa la trasf. di Fourier:

data $f \in L^2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, con tante (ottime) proprietà.

(per es. trasforma problemi differenziali in problemi "algebrici")

PROBLEMA $\mathcal{F}$ opera su L^2 (f di energia finita) - le funzioni di energia finita "moralmente" vanno a zero a $\pm\infty$

IDEA cerco una "trasformata unilaterale" che operi su funzioni "asimmetriche". Le funzioni su cui farò questa trasf. saranno "molto buone" a $-\infty$, e "cattive" a $+\infty$ (buono e cattivo vanno intese nel senso dell'integrabilità).

APPROCCIO (non tradizionale) alla trasf. di Laplace, che è quello che poi si estende quasi immediatamente alle distribuzioni

$$\mathcal{L}(f)(z)=\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt \qquad \text{(Formula tradizionale)}$$

DI SOLITO dato $f(t)$ la sua trasf. di Laplace è

$$\mathcal{L}(f(t))(z) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-itz}\, dt \qquad z \in \mathbb{C}$$

(trasf. unilatera)

È preferibile vedere la formula di sopra in un altro modo.

Ricordo che $L^1_{loc}(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty],\ f \text{ integrabile su ogni } [a,b],\ -\infty < a < b < +\infty \}$

per es. $f(x) = x \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ma non in $L^1(\mathbb{R})$

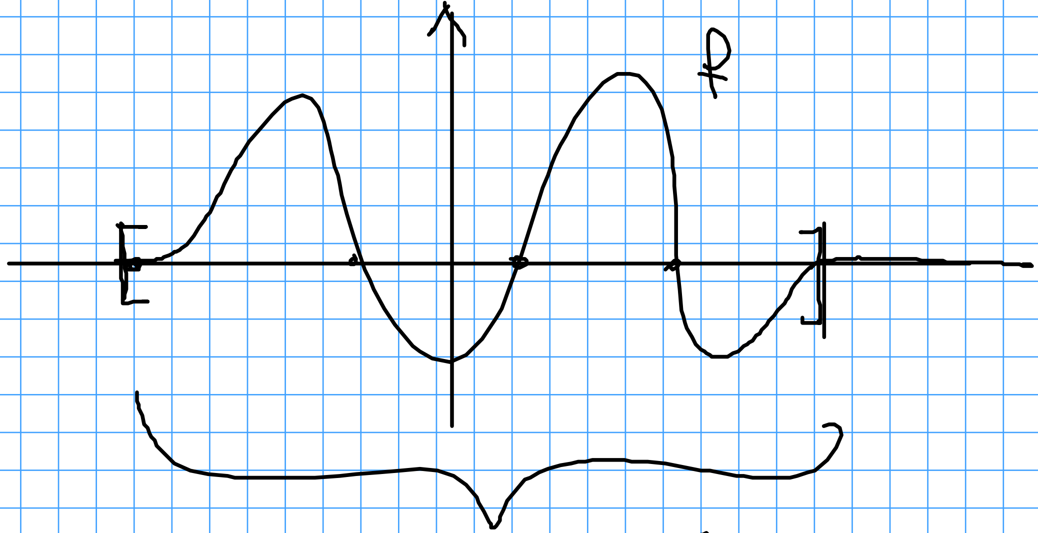
$\frac{1}{x} \notin L^1_{loc}$

tutte le funzioni che considero sono da $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$
(l'integrabilità è da forsi su $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$)

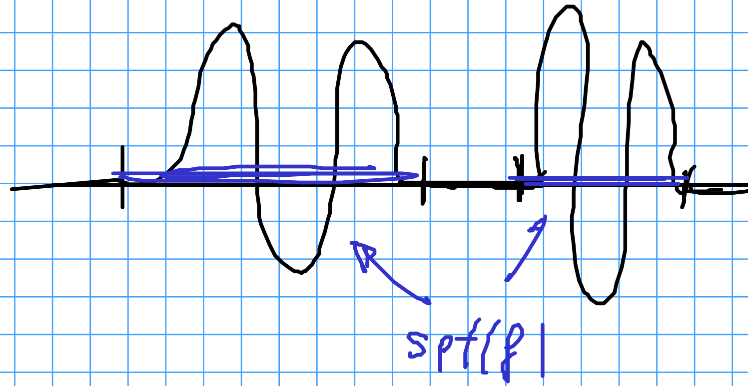
__Def.__ Sia $f \in L^1_{loc}$. Chiamo "supporto di f" il "più piccolo" insieme chiuso F tale che $f(x) = 0$ (q.o.) fuori da F

A rigore

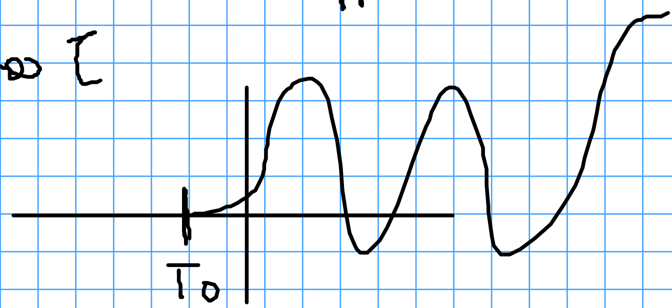
$$\mathrm{spt}(f) = \text{intersezione di tutti i chiusi } F' \text{ tali che } f(x) = 0 \text{ q.o. } x \text{ fuori } F'$$



supporto di f



Def. Dico che $f \in L^1_{loc}$ è a supporto destro se esiste $T_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) = 0$ per $t \leq T_0$ (cioè il supporto di f è tutto contenuto in una semiretta $[T_0, +\infty[$



(Tipicamente $T_0 = 0$, ma non serve)

Chiamo L^+ le funzioni a supporto destro.

Def. Data f in L^+ chiamo ascissa di convergenza il numero

$$\alpha(f) = \inf \{ x : f(t) e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R}) \}$$

. Notiamo che se $x > \alpha(f)$ $f(t) e^{-xt} \in L^1$, se $x < \alpha(f)$ $f(t) e^{-xt} \notin L^1$

Questo dipende dal fatto che $f \in L^+$ per cui

se $f(t)\, e^{-x_0 t} \in L^1$ e se $x > x_0 \Longrightarrow f(t)\, e^{-xt} \in L^1$

perché all'aumentare di x $f(t)\, e^{-xt}$ migliora su $[0, +\infty[$

(e peggiora su $]-\infty, 0]$ – ma qui $f(t) = 0$, almeno per $t < T_0$)

<u>NOTA</u> può essere $\alpha(f) = +\infty$ (non c'è nessun x : $f(t)\, e^{-xt} \in L^1$

per esempio $H(t)\, e^{t^2}$

oppure $\alpha(f) = -\infty$ (tutte le x vanno bene

per esempio $H(t)\, e^{-t^2}$)

$$\left(H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \right)$$

$H_\alpha = \{ z \in \mathbb{C} : Re(z) > \alpha \}$

è un semipiano aperto in $\mathbb{C}$

<u>Def.</u> Sia $f \in L^+$. Considero $H_{\alpha(f)} = \{ z \in \mathbb{C} : Re\, z > \alpha(f) \}$

e se $\alpha(f) < +\infty$ considero $\check{f} : H_{\alpha(f)} \to \mathbb{C}$ def da

$$\check{f}(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-izt}\, dt$$

È chiaro che l'integrale sopra è in realtà fatto su $[T_0, +\infty[$ (dove T_0 dipende da f ed è tale che $f(t) = 0$ se $t < T_0$)

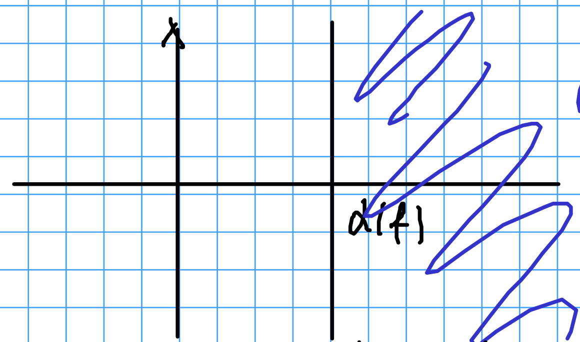
Notiamo che

$$\check{f}(z) = \check{f}(x+iy) = \mathcal{F}\left(f(t)\, e^{-ixt}\right)(y) :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t) e^{-xt}\right) e^{-iyt} = \mathcal{F}\left(f(t) e^{-xt}\right)(y)$$

$\check{f}$ lo chiamo trasformata di Laplace di f e lo indico anche con $\mathcal{L}(f)(z)$. Si tratta di una funzione di variabile complessa a valori complessi. $\check{f}$ è definita sul "semipiano di convergenza" $H_{\alpha(f)}$

(a patto che $\alpha(f) < +\infty$)



qui è definita $\check{f}(z)$

Sostanzialmente $f(t)$ può crescere (a $+\infty$) in modo esponenziale

Esempio $\qquad f(t) = H(t)\,e^{z_0 t} \qquad$ dove $\quad z_0 = x_0 + i y_0 \in \mathbb{C}$

$$\alpha(f) = x_0 \qquad \text{e} \qquad \check{f}(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Infatti

$$\left| f(t)\, e^{-xt} \right| = \left| H(t)\, e^{(x_0 + i y_0)t}\, e^{-x t} \right| =$$

$H(t)\, e^{(x_0 - x)t}$ è integrabile se e solo se $x_0 - x < 0$

$\iff x > x_0$. Se prendo $\alpha = \inf\{x : x > x_0\}$ trovo

$\alpha = \alpha(f) = x_0$ (noto che $f(t)\, e^{-x_0 t} \notin L^1$, ma ...)

Se ora $\operatorname{Re} z > x_0 = \operatorname{Re} z_0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(t)\, e^{z_0 t}\, e^{-zt}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{(z_0 - z)t}\, dt = \left[\frac{e^{z_0 - z}}{z_0 - z} \right]_0^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{z - z_0}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}\left(H(t)\, e^{z_0 t} \right)(z) = \frac{1}{z - z_0} \qquad \left(\alpha = \operatorname{Re}(z_0) \right)$$

Proprietà di $\mathcal{L}$.

Teorema Sia $f \in L^+_J$, se $\alpha = \alpha(f) < +\infty$. Allora $\check{f}$ è olomorfa su H_α e si ha

$$\frac{d}{dz} \check{f}(z) = -\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, e^{-zt}\, dt$$

(e si vede che l'integrale ha senso)

Dim. Mi basta dimostrare che, se $z > \alpha$, la funzione

$$t \mapsto t\, f(t)\, e^{-zt}$$

(che si ottiene derivando rispetto a z)

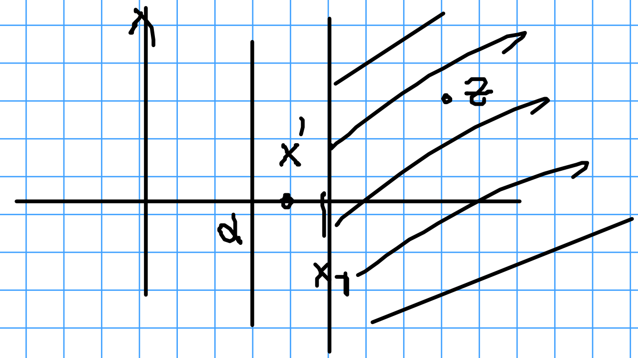
è maggiorata in modulo da una funzione di t integrabile

cioè

$$(*) \qquad \left| t\, f(t)\, e^{-zt} \right| \leq g(t) \quad (\text{con } g \in L^1) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall z \text{ vicino a } z_0$$

(z_0 è il punto in cui voglio derivare). Se lo dimostro allora posso applicare il teorema di derivazione sotto il segno di integrale (in versione complessa — abbiamo visto la versione reale)

Per dimostrare la disuguaglianza (*), faccio così:
Fisso x_1 con $x_1 > x' > \alpha$. Prendo z con $\operatorname{Re} z \geq x_1$



Per tali $z = x + iy$

$$\left| t f(t) e^{-zt} \right| =$$

$$t\,|f(t)|\,e^{-xt} \leq t\, f(t)\, e^{-x_1 t} =$$

$$\underbrace{t\, e^{-(x_1 - x')t}}_{\substack{\text{LIMITATO A } +\infty \\ \text{perché } x_1 - x' > 0}} \; \underbrace{|f(t)|\, e^{-x' t}}_{\in L^1 \text{ perché } x' > \alpha} = g(t) \text{ integrabile}$$

IN SOSTANZA per ogni z con parte reale $\geq x_1$

$$\left| t f(t) e^{-zt} \right| \leq g(t) \quad \text{integrabile}$$

DUNQUE
$\check{f}(z)$ è derivabile sugli z con $\operatorname{Re} z > x_1$ e vale

la formula di derivazione sotto il segno di integrale.
DATO CHE $x_1 > \alpha$ è arbitrario recupero tutte le $z \in H_\alpha$

Più in generale vale il

Teorema f è olomorfa su H_α e

$$\frac{d^k}{dz^k} = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\, e^{-zt} = \mathcal{L}\left((-1)^k t^k f(t)\right)(z)$$

(e $\alpha(t^k f(t)) = \alpha(f)$)

NOTA La "sommabilità" (o meglio la crescenza più o meno buona a $+\infty$) è legata a $\alpha(f)$: più f è "buona" a $+\infty$, più $\alpha(f)$ si sposta verso sinistra) Si pensi a

$f(x) = H(t)\, e^{at}$ $\qquad \alpha(f) = a$

TIPICAMENTE $\alpha(f) = 0 \rightsquigarrow$ crescita polinomiale

Teorema (attenzione - non è nella forma tradizionale) .

Se f è C^1 $f, f' \in L^+$ allora

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\,\mathcal{L}(f) \qquad z \in H_\alpha$$

se $\alpha = \max(\alpha(f), \alpha(f'))$

(le ipotesi fatte implicano che f si raccorda bene con lo zero)

Dim. (idea) Se f e f' sono nulle prima di T_0:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_{T_0}^{+\infty} f'(t)\, e^{-zt}\, dt = \text{(integro per parti)}$$

$$\Big[f(t) e^{-zt} \Big]_{T_0}^{+\infty} + \underbrace{\int_{T_0}^{+\infty} z\, f(t)\, e^{-zt}\, dt}_{z\, \mathcal{L}(f(t))(z)}$$

fa zero perché:

(1) $f(T_0) = 0$ (se f è $C^1 \Rightarrow f$ continua, $f(t)=0$ per $t<T_0$ $\Rightarrow f(T_0)=0$)

(2) $\lim_{t\to+\infty} f(t)\, e^{-zt} = 0$ (perché si deduce dall'ipotesi di dominabilità ...)

CI FIDIAMO...

NOTA Se f è C^1 (ma non a supporto destro) e considero $H(t)\, f(t)$ NON SONO AUTORIZZATO A USARE IL TEOREMA SOPRA (lo potrò fare quando la estenderò alle distribuzioni; vedremo che

$$\frac{d}{dt} H(t) f(t) = \delta \cdot f(0) + H(t) f'(t) \quad - - - -)$$

Vale un altro teorema.

<u>Teorema</u> Se f e f' sono L^1_{ex} (ma L^+) e continue.

$$\mathcal{L}(H(t) f'(t))(z) = z \mathcal{L}(H(t) f(t)) - f(0)$$

(formula tradizionale)

<u>Dim</u> (IDEA) Integro per parti come nella dim. precedente ($T_0 = 0$) e mi rimane il pezzo con $f(0)$.

$$\mathcal{L}(H f') = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-zt} dt = \left[f(t) e^{-zt} \right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} f(t) e^{-zt} dt$$

$$= -f(0) + z \mathcal{L}(H f)(z)$$

PIÙ IN GENERALE GLI STESSI TEOREMI VALGONO SE f' È LA DERIVATA DEBOLE ($\Rightarrow f$ CONTINUA)

Ancora più in generale

<u>Teorema</u> (1) Se $f, f', \dots, f^{(n)}$ esistono (deboli) e sono L^+

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z)$$

(2) Se $f, f', \dots, f^{(n)}$ esistono (deboli) in L^1_{loc} (ma L^+)

$$\mathcal{L}(H f^{(n)})(z) = f(z_0) z^{n-1} + f'(z_0) z^{n-2} + \dots + f^{(n-1)}(z_0) + z^n \mathcal{L}(Hf)(z)$$