Complementi di Matematica
Ventiquattresima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

26 novembre 2009

· In generale supponiamo di avere:

$$(P)\begin{cases} a y'' + b y' + c y = f \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a, b, c \in \mathbb{R} \\ f \in L^2(\mathbb{R}) \end{array}$$

Cerco y tramite $\hat{y}$: applico $\mathcal{F}$ all'equazione

$$a(-\omega^2)\hat{y} + b(i\omega)\hat{y} + c\hat{y} = \hat{f} \qquad \text{cioè:}$$

$$(*) \qquad P(i\omega)\,\hat{y}(\omega) = \hat{f}(\omega) \qquad (P(z) = az^2 + bz + c)$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\hat{y}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}} \qquad \forall \omega \ (\text{tranne gli } \omega \text{ per cui } P(i\omega) = 0)$$

Il problema: $g(\omega) = \dfrac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}$ è in $L^2(\mathbb{R})$?

se lo è posso antitrasformare e trovare y

· ALTERNATIVA:

(a) se $g(\omega) \in L^2$ posso definire $\underline{y(t) = \mathcal{F}^{-1}(g)}$ —

tale y ha la proprietà $\hat{y} = g \Rightarrow$

$$\omega^2 \hat{y} = \omega^2 g(\omega) = \underbrace{\frac{\omega^2}{P(i\omega)}}_{\text{LIMITATO}} \underbrace{\hat{f}(\omega)}_{L^2} \in L^2 \Leftrightarrow$$ y ha derivata II° in L^2

$$\left|\omega \hat{y}\right| = \left|\frac{\omega}{P(i\omega)} \hat{f}(\omega)\right| \leq \underbrace{\frac{\cos t}{|\omega|}}_{L^2} \underbrace{|\hat{f}(\omega)|}_{L^2}$$ $\Rightarrow$ IMPLICA $\omega \hat{y} \in L^1$

INFATTI se $f, g \in L^2 \Rightarrow f \cdot g \in L^1$ a causa della dis di Schwartz

$$\int_{\mathbb{R}} |f g| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^2\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow$ $y' \in C^0_0$ cioè y è derivabile, y e $y' \to 0$ a $\pm\infty$

<u>DUNQUE</u> La y così costruita ha derivata II^a (debole) in L^2, derivata I° continua e nulla a $\pm\infty$, e anche y è (continua) e nulla a $\pm\infty$ (nulla nel senso che il limite è zero). Inoltre

$$a\, y'' + b\, y' + c\, y = f$$

y'': derivata debole — y': derivata forte

OVVIAMENTE SE SO DI PIÙ SU f, TROVERÒ DI PIÙ SU y. Se per esempio $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ (oltre che in L^2), allora

$$\omega^2 \hat{y} = \underbrace{\frac{\omega^2}{P(i\omega)}}_{\text{limitato}} \cdot \underbrace{\hat{f}}_{L^1} \implies \omega^2 \hat{y} \in L^1 \implies y'' \in C^0_0$$

ANCHE y'' ESISTE IN SENSO FORTE ED È NULLA a $\pm\infty$

(NOTA CHE SE $\hat{f} \in L^1 \implies f \in C^0_0$, a causa del fatto che $f = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\hat{f})^*$, cioè $f(t) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}}_{\text{INTEGRALE DI L. se } \hat{f} \in L^1}$)

. Quindi se $g \in L^2$ il problema ha una e una sola sol. nel senso detto (y'' è debole il resto è forte – la condizione $y \in L^2$ si traduce in y e $y' \in C_0^0$)

(b) se $g \notin L^2$ il problema NON HA SOLUZIONE

(DUNQUE (P) (a) ha sol. unica oppure (b) non ha sol.)

DA QUANTO SOPRA SI DEDUCE

(a') se $P(i\omega) \neq 0 \Rightarrow g(\omega) = \dfrac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} \in L^2$

qualunque sia $f \Rightarrow$ (P) ha soluzione unica

($P(z)$ non ha radici sull'asse immaginario)

(b') se $P(i\omega_k) = 0$ per qualche ω_k (al massimo 2)

a seconda di f il problema (P) può avere o non avere sol. (se ce l'ha è comunque unica). Ci vuole che $\hat{f}(\omega)$ "si annulli abbastanza" in questi ω_k

Per esempio se $P(i\omega) = \frac{1}{\omega^2-1} = \frac{1}{(\omega-1)}\frac{1}{(\omega+1)}$

basterebbe che $\hat{f}(\omega)$ fosse $(\omega^2-1)^\alpha$ con $\alpha > 1/2$ $\longrightarrow$

$$\left|\frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}\right|^2 = \left(\frac{1}{(\omega^2-1)^{1-\alpha}}\right)^2 = \frac{1}{|\omega-1|^{2-2\alpha}}\frac{1}{|\omega+1|^{2-2\alpha}} \quad \text{e } 2-2\alpha < 1$$

IN PRATICA, se $\hat{f}$ è un polinomio o più in generale una funzione olomorfe $\Rightarrow$ se $\hat{f}(\omega_k) = 0$ e se ω_k è radice semplice di $P(iz)$ allora O.K.

$$g(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)} = \frac{Q(\omega)}{P(i\omega)}$$

NON È L^2 se $Q(\omega_k) \neq 0$

È L^2 se $Q(\omega_k) = 0$ perché allora $Q(\omega) = (\omega - \omega_k)Q_1(\omega)$ $\Rightarrow g$ è limitata vicino a ω_k.

IN SOSTANZA SE $P(i\omega_k) = 0$, ω_k RADICE SEMPLICE DI $P(iz)$ se $\hat{f}$ polinomiale (o olomorfa), $g \in L^1 \Leftrightarrow \hat{f}(\omega_k) = 0$

RIMANE IL CASO $P(i\omega)$ HA UNA RADICE DOPPIA IN ω_k. Allora (se $\hat{f}$ è olomorfa) ci vuole $\hat{f}(\omega_k) = \hat{f}'(\omega_k) = 0$

· per esempio se ho $y'' = f \iff \hat{y} = \frac{\hat{f}(\omega)}{-\omega^2}$

ho soluzione $\iff \frac{\hat{f}(\omega)}{\omega^2} \in L^2$; nel caso in cui $\hat{f}$ decresce

questo equivale a $\hat{f}(0)=0$, $\hat{f}'(0)=0$

Per calcolare $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{P(i\omega)}\right)$ torna utile le formule con i residui.

Vediamo un po' di esempi

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = e^{-4|t|} \\ y \in L^2(\mathbb{R}) \ / \ y \text{ nulla all'infinito} \end{cases}$$

$$f(t) = e^{-4|t|} \Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{1}{4} \frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{4}\right)^2} = \frac{8}{16+\omega^2}$$

· (se mi ricordo che $\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$ e che
$$\mathcal{F}(h(4t)) = \frac{1}{4}\mathcal{F}(h(t))\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

Trasformo l'eq. (sto in L^1 – la sol. $\in C_0^2$)

$$(-\omega^2 + 2\omega i + 2)\,\hat{y}(\omega) = \frac{8}{16+\omega^2} \Leftrightarrow$$

$$\hat{y}(\omega) = \frac{-8}{(\omega^2 - 2\omega i - 2)(\omega^2+16)}$$

$\in L^2$ / anche L^1 (il den. non ha radici reali)

in – le radici del den. sono $\pm 4i$, $\pm 1 + i$ (semplici).

Posso usare i residui.

$$y(t) = \begin{cases} i \sum \text{Residui con p.imm.} > 0 & \text{se } t > 0 \\ -i \sum \text{Residui con p.imm.} < 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

CALCOLIAMO I RESIDUI: $\left(g(\omega) = \dfrac{-8e^{it\omega}}{(\omega^2 - 2i\omega - 2)(16+\omega^2)} \right)$

$$\cdot\ \mathrm{Res}(g, 4i) = \frac{-8e^{itz}}{(2z-2i)(16+\omega^2) + \underset{=0 \text{ se lo calcolo in } \pm 4i}{2\omega(\omega^2 - 2i\omega - 2)}}\Bigg|_{\omega=4i} =$$

$$\frac{-8e^{-4t}}{8i(-16+8-2)} = \frac{e^{-4t}}{10i}$$

$$\mathrm{Res}(g, -4i) = \sim\Big|_{\omega=-4i} = \frac{-8e^{4i}}{-8i(-16-8-2)} = \frac{e^{4i}}{(-i)\,26}$$

$$\mathrm{Res}(g, 1+i) = \frac{-8e^{itz}}{(2z-2i)(16+\omega^2) + \underbrace{2\omega(\omega^2-2i\omega-2)}_{=0 \text{ se } \omega = \pm 1 + i}}\Bigg|_{\omega=1+i} =$$

$$\frac{-8e^{(-1+i)t}}{2(16+2i)} = \frac{-\cancel{4}\, e^{-t} e^{it}}{\underset{64}{\cancel{16^2}} + \underset{1}{\cancel{2^2}}}(16-2i) = \frac{-e^{-t}e^{it}(16-2i)}{65}$$

$$\mathrm{Res}(g, -1+i) = \sim\Big|_{\omega=-1+i} = \frac{-8e^{(-1-i)t}}{(-2)(16-2i)} =$$

$$\cdot \frac{4e^{-t}e^{-it}}{16^2+4}(16+2i) = \frac{e^{-t}e^{-it}}{65}(16+2i) \not\leftarrow$$

Calcoliamo $y(t)$ per $t>0$ (tre residui)

$$y(t) = i\left(\mathrm{Res}(4i) + \mathrm{Res}(1+i) + \mathrm{Res}(-1+i)\right) =$$

$$\frac{e^{-4t}}{10} + \frac{e^{it}(-2-16i) + e^{-it}(-2+16i)}{65}e^{-t} =$$

$$\frac{e^{-4t}}{10} - \frac{e^{-t}\,2\,\mathrm{Re}\left(e^{it}(2+16i)\right)}{65} =$$

$$\frac{e^{-4t}}{10} - \frac{e^{-t}}{65}\left(4\cos(t) - 32\sin(t)\right) \qquad (y(t) \text{ per } t>0)$$

Calcoliamo $y(t)$ per $t<0$:

$$y(t) = \frac{e^{4t}}{26}.$$

Per curiosità facciamo qualche verifica: calcoliamo y' e y''

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{-4t}}{10} - \frac{e^{-t}}{65}\left(4\cos(t) - 32\sin(t)\right) & t > 0 \\ \frac{e^{4t}}{26} & t < 0 \end{cases}$$

(è chiaro che è $L^2(\mathbb{R})$)

facciamo le derivate "puntuali" per $t > 0$ e $t < 0$

$$y'(t) = \begin{cases} -\frac{2}{5}e^{-4t} + \frac{e^{-t}}{65}\left(4\cos(t) - 32\sin(t)\right) - \frac{e^{-t}}{65}\left(-4\sin(t) - 32\cos(t)\right) \\ = -\frac{2}{5}e^{-4t} - \frac{e^{-t}}{65}\left(-36\cos(t) + 28\sin(t)\right) & \text{se } t > 0 \\ \frac{2e^{4t}}{13} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$y'(0^+) = -\frac{2}{5} + \frac{36}{65} = \frac{-26+36}{65} = \frac{10}{65} = \frac{2}{13} = y'(0^-)$$

$$y''(t) = \begin{cases} \frac{8}{5} e^{-4t} + \frac{e^{-t}}{65}\left(-36\cos(t) + 28\sin(t)\right) - \frac{e^{-t}}{65}\left(36\sin(t) + 28\cos(t)\right) & \\ = \frac{8}{5} e^{-4t} - \frac{e^{-t}}{65}\left(64\cos(t) + 8\sin(t)\right) & \text{se } t > 0 \\ \frac{8}{13} e^{4t} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$y''(0^+) = \frac{8}{5} - \frac{64}{65} = \frac{8\cdot 13 - 8\cdot 8}{65} = \frac{8\cdot \cancel{5}}{13\cdot \cancel{5}} = \frac{8}{13} = y''(0^-)$$

VEDIAMO CHE y y' y'' SONO CONTINUE (le posso definire in zero in modo che lo siano $\Rightarrow$ $y(0^+) = y(0^-)$, $y'(0^+) = y'(0^-)$, $y''(0^+) = y''(0^-)$)

$y(0^+) = \frac{1}{10} - \frac{4}{65} = \frac{1}{26}$; $y(0^-) = \frac{1}{26}$ TORNA

$y'(0^+) = \frac{2}{13} = y'(0^-)$ TORNA

$y''(0^+) = \frac{8}{13} = y''(0^-)$ TORNA

(DUNQUE y y' y'' CONTINUE)

VERIFICHIAMO CHE VALE L'EQUAZIONE

$$y'' + 2y' + 2y \quad - \qquad \text{per } t > 0$$

$$\frac{8}{5} e^{-4t} - \frac{e^{-t}}{65}\left(64\cos(t) + 8\sin(t)\right) \qquad + \qquad (y'')$$

$$-\frac{4}{5} e^{-4t} - \frac{e^{-t}}{65}\left(-72\cos(t) + 56\sin(t)\right) + \qquad (2y')$$

$$\frac{e^{-4t}}{5} - \frac{e^{-t}}{65}\left(8\cos(t) - 64\sin(t)\right) \qquad =$$

$$= \frac{8-4+5}{5} e^{-4t} - \frac{e^{-t}}{65}\left(\underbrace{(64-72+8)}_{=0}\cos(t) + \underbrace{(8+56-64)}_{=0}\sin(t)\right)$$

$$1 \; \text{//}$$

$$= e^{-4t} \qquad (t>0)$$

Per $t < 0$

$$\frac{8}{13} e^{4t} + \frac{4}{13} e^{4t} + \frac{1}{13} e^{4t} = e^{4t} \qquad (t<0)$$

TORNA

DI FATTO tra tutte le soluzioni su $\mathbb{R}$ dell'eq.
(sol. particolare + tutte le sol dell'omogenea)
abbiamo SELEZIONATO L'UNICA IN $L^2(\mathbb{R})$
$\Longleftrightarrow$ l'unica che tende a zero a $\pm\infty$.