Complementi di Matematica
Ventitreesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

24 novembre 2009

· Prop. della Trasformata di Fourier

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(f)$$

– $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0^0$ (funzioni continue, "nulle" a $\pm\infty$)

$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ (CONTINUITÀ DELL'OPERATORE <u>LINEARE</u> $\mathcal{F} : L^1 \to C_0^0$)

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$$

– <u>Prop.</u> Se $|t^k f(t)| \in L^1 \xRightarrow{\text{CONTINUE}} \hat{f} \in C_0^k$ (derivabile k volte con tutte le derivate "nulle" a $\pm\infty$) e

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega) = (-i)^k \mathcal{F}(t^k f(t))(\omega)$$

- **Prop.** Se $\exists f^{(K)}$ (debole) e $f^{(K)} \in L^1 \Rightarrow$

$$\mathcal{F}(f^{(K)})(\omega) = (i\omega)^K \hat{f}(\omega)$$

da cui $\omega^K \hat{f}(\omega) \in C_0^0$

NOTA Non c'è un perfetto parallelismo tra le due prop.

TALE PARALLELISMO VARRÀ "IN L^2"

- **Prop.** Data $f \in L^1$ e $T_0 \in \mathbb{R}$ chiamo f_{T_0} la traslata $f_{T_0}(t) \underset{DEF}{=} f(t - T_0)$. Allora

$$\mathcal{F}(f_{T_0})(\omega) = e^{-iT_0\omega} \hat{f}(\omega)$$

Dim. $\hat{f}_{T_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-T_0)\, e^{-i\omega t}\, dt = \circledast$

pongo $t - T_0 = s \iff t = s + T_0$, $dt = ds$

$$\circledast = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, e^{-i\omega(s+T_0)}\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, e^{-i\omega s}\, ds \cdot e^{-iT_0\omega}$$

Prop. Se $f \in L^1$, $\omega_0 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}\left(e^{i\omega_0 t} f(t)\right)(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0)$$

Dim. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 t} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i(\omega-\omega_0)t}\, dt = \hat{f}(\omega - \omega_0)$

Prop. $f \in L^1$, $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0$

$$\mathcal{F}(f(at)) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad ?$$

Dim. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = (*)$ $\quad s = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$ $dt = \frac{ds}{a}$

$$(*) = \int_{-\infty \cdot a}^{+\infty \cdot a} f(s) e^{-i\omega \frac{s}{a}} \frac{ds}{a} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) e^{-i\frac{\omega}{a} s} ds = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Per esempio (riflessione) Chiamo $f^*(t) = f(-t)$

$$\Rightarrow \widehat{f^*} = \mathcal{F}(f^*)(\omega) = \mathcal{F}(f(-t))(\omega) = \hat{f}(-\omega) = \mathcal{F}(f)^* = \hat{f}^*$$

<u>Prop</u> $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{\mathcal{F}(f)^*}$ cioè $(f \in L^1)$

$$\widehat{\bar{f}}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

<u>Dim.</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)\, e^{i\omega t}}\, dt =$

$$\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t}\, dt} = \overline{\hat{f}(-\omega)}$$

<u>Conseguenze</u> (la freccia $\Rightarrow$ è facile, l'altra meno)

(a) f reale $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$ $\left(f = \bar{f} \Longleftrightarrow \hat{f}(\omega) = \overline{\hat{f}(-\omega)} \right)$

(b) f PARI $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}$ pari ($f = f^* \Longleftrightarrow \hat{f} = \hat{f}^*$)

(c) f DISPARI $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}$ dispari ($f = -f^* \Longleftrightarrow \hat{f} = -\hat{f}^*$)

In particolare

(d) f reale pari $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}$ reale pari

(e) f reale dispari $\Longleftrightarrow$ $\hat{f}$ immaginario puro, dispari

$$\underset{f \text{ pari}}{f \text{ reale}} \Leftrightarrow \quad \hat{f}^* \underset{\text{reale}}{=} \overline{\hat{f}} \underset{\text{prop. del coniugato}}{=} \widehat{\overline{f^*}} \underset{\substack{f \text{ pari} \\ \text{reale}}}{=} \hat{f} \qquad \hat{f} \text{ PARI}$$

e poi si fanno anche le altre proprietà

Antitrasformata   Come ricostruisco f a partire da $\hat{f}$

Risultati simili a quelli visti per le serie di Fourier.

IDEA: $$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}$$

Visto così è un problema dato che non so che $\hat{f} \in L^1$

$\rightarrow$ $\hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}$ non è integrabile in generale (secondo $\mathcal{L}$.)

PONIAMO $$f_M(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^{M} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

(ha senso perché $\hat{f}$ è continua e sto integrando su un intervallo limitato)

· Risultati analoghi a quelli visti per la serie di Fourier.

<u>Teorema</u> (1) Se $L^1 \ni f$ è regolare a tratti (ci sono dei punti $t_1\ t_2 \dots t_k$ in $\mathbb{R}$, f è derivabile su ogni $]t_j, t_{j+1}[$, f' è <u>limitata</u> su ogni $]t_j\ t_{j+1}[$)

allora per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{M\to+\infty} f_M(t) = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$$

($f(t^+)$ e $f(t^-)$ esistono se f è reg. a tratti)

$$\| \qquad (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

Cioè $f_M \longrightarrow \dfrac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$ puntualmente per $M\to+\infty$

(2) se f è C^1, $f, f' \in L^1$ (non basta per $\hat{f} \in L^1$)

allora $f_M \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ per $M \to +\infty$

(Risultati interessanti, ma non perfettamente soddisfacenti)

Per trovare dei risultati migliori <u>devo passare a L^2</u>

<u>PROBLEMA</u> Non posso definire $\hat{f}$ se $f \in L^2(\mathbb{R})$

mediante la formula $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(t)\, e^{-i\omega t}}$

NON È DETTO CHE
SIA INTEGRABILE
SE $f \in L^2$

Alcune considerazioni su L^1 / L^2

(1) Se siamo su un intervallo (o su un insieme di misura finita) $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$

(f ha energia finita $\Rightarrow$ f integrabile)

In effetti, a causa della dis. di Schwartz:

$$\left| \int_E f g \right| \leq \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_E |g|^2 \right)^{1/2}$$; in particolare

$$\int_E |f(x)| \, dx = \int_E |f(x)| \cdot 1 \, dx \leq \left(\int_E |f|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_E 1^2 \right)^{1/2}$$

$$= \|f\|_2 \cdot \sqrt{m(E)}$$ (se $m(E) < +\infty$ $L^2 \subset L^1$)

(2) Su $\mathbb{R}$ NON C'È RELAZIONE TRA $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$

Per esempio (a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ è integrabile

$\left(= \dfrac{1}{|x|^{1/2}} \right.$ e $1/2 < 1 \Big)$ ma non è L^2 in quanto

$$|f(x)|^2 = \frac{1}{|x|} \quad \text{NON INTEGRABILE}$$

(questo esempio potrebbe essere ristretto a $[-1,1]$ e fa vedere che $L^1(-1,1)$ è più grande di $L^2(-1,1)$)

(b) Posso anche prendere $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$. Questo non è L^1 (non è integrabile) ma $|f|^2$ lo è

$\left(|f|^2(x) = \dfrac{1}{|x|^2} \right.$ INTEGRABILE)

Torniamo al problema di definire $\hat{f}$ quando $f \in L^2$.

Si fa così: prendiamo $f \in L^2(\mathbb{R})$

(1) Dato $R > 0$ pongo

$$\hat{f}_R(\omega) = \int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

(si può fare perché $f \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^2(-R, R)$
$\Rightarrow f \in L^1(-R, R)$)

(2) Si dimostra che esiste $g \in L^2$ tale che

$$\hat{f}_R \xrightarrow{L^2} g \qquad \text{per } R \to +\infty$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_R(\omega) - g(\omega)|^2\, d\omega \to 0 \quad \text{se } R \to +\infty \right)$$

Scrivo questo nel seguente modo

$$\hat{f} \underset{L^2}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = L_2\text{-}\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

Quindi per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ è definito $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

(non è detto che $\hat{f} \in C^0_0$, a meno che $f \in L^1$.)

Tale trasformata verifica le seguenti proprietà:

(1) Se f è L^1 ritrovo la vecchia definizione.

(2) Se $t^k f \in L^2 \Longrightarrow \hat{f}$ ha derivata K-esima (debole) in L^2 e si ha:

$$\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f} = (-i)^k \mathcal{F}(t^k f(t))$$

(3) se f ha derivata debole $f^{(k)}$, $f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

$\omega^k \hat{f}(\omega) \in L^2$ e si ha

$$\mathcal{F}(f^{(k)}) = (i\omega)^k \hat{f}(\omega)$$

(NOTA (2) e (3) SONO UNA IL VICEVERSA DELL'ALTRA)

IN (2) e (3) POTREI METTERE (IL MOTIVO SI CAPISCE DOPO) $\Longleftrightarrow$

(4) $f \in L^2 \Longrightarrow \widehat{f_{T_0}} = e^{-iT_0\omega} \hat{f}(\omega) \quad (\in L^2)$

(5) $f \in L^2 \Longrightarrow \widehat{e^{i\omega_0 t} f}(\omega) = \hat{f}(\omega - \omega_0) = \hat{f}_{\omega_0}$

(6) $f \in L^2$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\omega}{a}\right)$

(7) $\mathcal{F}$ è <u>un'isometria</u>. Si ha

se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\langle f, g \rangle = 2\pi \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\,\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega}$$

In particolare

$$\|f\|_2^2 = 2\pi \|\hat{f}\|_2^2$$

cioè
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

(eg. di Parseval)

Oss In realtà vale (e qui si dovrebbe partire per la dim)

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\cdot \overline{\hat{g}(s)}\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)\overline{\hat{f}(s)} \quad \text{se } f,g \in L^1}$$

questo è facile da dim. (e ha chiaramente senso dato che nell'integrando una delle due funzioni è L^1 l'altra è limitata essendo C_0^0 $\Rightarrow$ il loro prodotto è L^1) – per la dim si usa Fubini-Tonelli

Con dei discorsi di approssimazione (introducendo R e M di prima) si dimostra il punto (7))

(8) $\mathcal{F}$ è invertibile in L^2 e

$$\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}^* \quad \text{cioè}$$

$$f(t) \underset{L^2}{=} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega}_{\widehat{\hat{f}(\omega)}(-t)} = L^2\text{-}\lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

non è detto che valga in nessun t

Detto in altro modo $\quad \mathcal{F}(\mathcal{F}(f(t))) \underset{(L^2)}{=} 2\pi f(-t)$

· NATURALMENTE QUESTI L^2 - INTEGRALI DIVENTANO V.P. O INTEGRALI DI LEBESGUE SE QUESTI ULTIMI ESISTONO.

Per esempio $\quad f(t) = \dfrac{P(t)}{Q(t)}$ $\quad P, Q$ polinomi con diff di grado ≥ 1

e Q SENZA RADICI REALI $\Longrightarrow f \in L^2$ (L^1 se lo scarto tra i gradi è ≥ 2) (per es. $f(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$)

Allora

$$\hat{f}(\omega) = (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} e^{-i\omega t} \, dt \qquad \text{per ogni } \omega$$

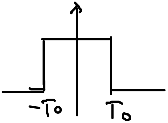
lo posso calcolare con le formule con i residui

· Analogamente se $\hat{f}(\omega) = \dfrac{P(\omega)}{Q(\omega)} \Longrightarrow$ per ogni t

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \, (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{i\omega t}$$

e la posso calcolare con i residui.

UN PO' DI ESEMPI

(1) 
$f(t) \Rightarrow \hat{f}(t) = \dfrac{2\sin(T_0\omega)}{\omega}$

(2) $f(t) = e^{-|t|}$; questa è L^1 la trasformata la posso calcolare con l'integrale.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(-i\omega+1)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{(-i\omega-1)t}\, dt =$$

$$\left[\frac{e^{(-i\omega+1)t}}{-i\omega+1} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-i\omega-1)t}}{-i\omega-1} \right]_{0}^{+\infty} =$$

$$\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} = \frac{2}{\omega^2+1} = \hat{f}(\omega)$$

NOTA • $e^{-|t|}$ è MOLTO SOMMABILE ($t^k e^{-|t|} \in L^1 \quad \forall k$)

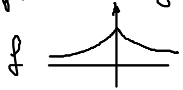
$\Rightarrow \hat{f}$ è C^∞ (e tutte le derivate $\to 0$ a $\pm\infty$)

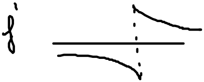
• $f(t) = e^{-|t|}$ è continua e ha come derivata

$$f'(t) = -\mathrm{sgn}(t)\, e^{-|t|} \quad \text{per } t \neq 0 \quad \left(\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0 \end{cases} \right)$$

$\Rightarrow$ f ha derivata debole pari a $-\mathrm{sgn}(t)\, e^{-|t|} \in L^2$ / anche L^1

Per quanto visto





• $\omega \hat{f}(\omega) \in C^0_0$ $\left(\text{infatti } \dfrac{2\omega}{1+\omega^2} \to 0 \right)$

• $$\mathcal{F}\left(-\mathrm{sgn}(t)\, e^{-|t|}\right) = \mathcal{F}(f') = \frac{2i\omega}{\omega^2+1}$$

che è L^2 ma non L^1

(questo ultimo fatto si può anche trovare coi calcoli)

- $f(t) = e^{-at^2}$ $\qquad a > 0$

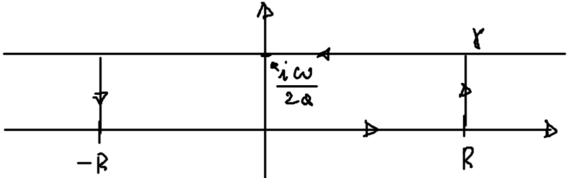
(ultra integrabile, C^∞) Mi ASPETTO CHE $\hat{f}$ sia "ultra" integrabile e "ultra" regolare.

Proviamo a calcolare $\hat{f}(\omega)$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2 - i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(t + \frac{i\omega}{2a}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4a}}\, dt =$$

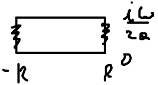
$$e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(t+\frac{i\omega}{2a}\right)^2} dt}_{(A)}$$



$$(A) = \int_\gamma e^{-az^2}\,dz \underset{(!!)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-az^2}\,dz$$

Per vedere che (!!) è vero introduco un $R>$ e considero

$$\int_{\partial Q_R} e^{-az^2}\,dz = 0 \quad (Q_R = \text{rettangolo}$$



$)$

viene 0 perché e^{-az^2} è olomorfo su Q_R

Dico che i contributi dei lati verticali tendono a zero se $R \to \infty$

In effetti

$$\left| \int_{\text{lato destro}} e^{-az^2} \right| = \left| i \int_0^{\frac{\omega}{2a}} e^{-a\left|R+iy\right|^2} dy \right| \leq$$

$$\int_0^{\frac{\omega}{2a}} \left| e^{-a\left(R^2+2iRy-y^2\right)} \right| dy = \int_0^{\frac{\omega}{2a}} e^{-a\left(R^2-y^2\right)} dy =$$

$$e^{-aR^2} \underbrace{\int_0^{\frac{\omega}{2a}} e^{ay^2} dy}_{\text{LIMITATO}} \leq e^{-aR^2} \text{costante} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

ALLA FINE

$$\int_\gamma e^{-az^2} dz = \int_{\mathbb{R}} e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

$$y=\sqrt{a}\,x\ ,\quad x=\frac{y}{\sqrt{a}}\ ,\quad dx=\frac{dy}{\sqrt{a}}$$

DUNQUE se $f(t)=e^{-at^2}$

$$\hat{f}(\omega)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

per es. se $a=\frac{1}{2}$ $\quad f(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}\ ,\quad \hat{f}(\omega)=\sqrt{2\pi}\,e^{-\frac{\omega^2}{2}}$

$$\left(e\ \hat{\hat{f}}=2\pi f\right)$$

- Uso della trasformata nella sol. di eq. diff. su $\mathbb{R}$ (con "condizioni a $\pm\infty$").

Esempio

$$(P)\begin{cases} y'' + \lambda y = e^{-|t|} \\ \text{"} y(+\infty) = y(-\infty) = 0 \text{"} \end{cases}$$

per risolvere (P) risolvo

$$(P')\begin{cases} y'' + \lambda y = e^{-|t|} \\ y \in L^2 \end{cases}$$

(y ha energia finita)

· "Moralmente" se $f \in L^2 \Rightarrow f(+\infty) = f(-\infty) = 0$ (nel senso del limite)

In realtà questo non è vero se $f \in L^2$, ma sarà vero per le sol. di (P).

Idea: cerco y tramite la sua trasformata $\hat{y}$.

Se trasformo l'equazione.

$$\mathcal{F}(y'' + \lambda y) = \mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\parallel$$

$$-\omega^2 \hat{y}(\omega) + \lambda \hat{y}(\omega)$$

quindi: $$(\lambda - \omega^2)\hat{y}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

che diventa $\boxed{\hat{y}(\omega) = \frac{1}{\lambda-\omega^2}\,\frac{2}{1+\omega^2}}$ $(\text{se } \omega^2-\lambda\neq 0)$

SE $\lambda>0$ la funzione scritta a destra NON È L^2

quindi tale funzione non è una trasformata.

Se $\lambda>0 \Rightarrow \lambda=\ell^2$ con $\ell>0$ e

$$\left(\frac{1}{\ell^2-\omega^2}\,\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\ell-\omega}\right)^2\left(\frac{1}{\ell+\omega}\right)^2\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2$$

ho due singolarità in $\pm\ell$ vicino alle quali non c'è integrabilità.

Se $\lambda>0$ NON TROVO SOL. IN $L^2(\mathbb{R})$

(se lo vedo sapendo le sol del prob. di Cauchy che sono seni e coseni + perturbazione, è chiaro che non trovo sol. in $L^2(\mathbb{R})$)

~~Solo per certi dati speciali c'è speranza di trovare $\hat{y} \in L^2$ e quindi $y \in L^2$~~ (lo vedremo).

Stesso discorso se $\lambda = 0$. Viceversa se $\lambda = -\ell^2 < 0$

funzione $\quad -\dfrac{1}{\ell^2+\omega^2}\,\dfrac{2}{1+\omega^2} \quad$ è L^2

(non ho singolarità reali e all'infinito $\simeq \dfrac{1}{\omega^4} \in L^2$)

Dunque esiste y : $\quad \hat{y}(\omega) = -\dfrac{1}{\ell^2+\omega^2}\,\dfrac{2}{1+\omega^2}$

Posso trovare y usando i residui

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-e^{i\omega t}}{(\ell^2+\omega^2)(1+\omega^2)}\, d\omega =$$

$$g(z) = \frac{-e^{izt}}{(\ell^2+z^2)(1+z^2)}$$

poli: $\pm i\ell$, $\pm i$ semplici se $\ell \neq 1$

$$
g(t) = \begin{cases} i \,\mathrm{Res}(g, \ell i) + i\,\mathrm{Res}(g, i) & \text{se } t > 0 \\[2em] -i\,\mathrm{Res}(g, -\ell i) - i\,\mathrm{Res}(g, -i) & \text{se } t < 0 \end{cases}
$$

NEL CASO $\ell \neq 1$ (se $\ell = 1$ c'è una coppia di poli doppi $\pm i$)

$$
\mathrm{Res}(g, i\ell) = \left. \frac{-e^{itz}}{2z(1+z^2) + 2z\underbrace{(\ell^2+z^2)}_{=0 \text{ se } z=\pm i\ell}} \right|_{z=i\ell} = \frac{-e^{-\ell t}}{2i\ell(1-\ell^2)}
$$

$$
\mathrm{Res}(g, -i\ell) = \frac{-e^{\ell t}}{-2i\ell(1-\ell^2)}
$$

$$
\mathrm{Res}(g, i) = \left. \frac{-e^{itz}}{\underbrace{2z(1+z^2)}_{=0 \text{ se } z=\pm i} + 2z(\ell^2+z^2)} \right|_{z=i} = \frac{e^{-t}}{2i(\ell^2-1)}
$$

$\cdot\ \mathrm{Res}(g, -i) = \dfrac{e^{t}}{-2i(\ell^2-1)}$ Ne segue

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{-e^{-\ell t}}{2\ell(1-\ell^2)} + \dfrac{e^{-t}}{2(\ell^2-1)} & \text{se } t>0 \\[2ex] \dfrac{-e^{\ell t}}{2\ell(1-\ell^2)} + \dfrac{e^{t}}{2(\ell^2-1)} & \text{se } t<0 \end{cases} =$$

$$= \frac{e^{-\ell|t|}}{2\ell(\ell^2-1)} + \frac{e^{-|t|}}{2(\ell^2-1)}$$

SE INVECE $\ell = 1$ (poli doppi)

$$\mathrm{Res}(g, i) = \mathrm{Res}\left(\frac{-e^{itz}}{(1+z^2)^2}, i\right) =$$

$$\cdot \quad \frac{d}{dz}\frac{-e^{itz}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \frac{-ite^{itz}(z+i)^2+e^{itz}\,2(z+i)}{(z+i)^4}\Big|_{z=i} =$$

$$\frac{-ite^{-t}(-4)+e^{-t}\,4i}{16} = \frac{ite^{-t}+ie^{-t}}{4}$$

$$\operatorname{Res}(g_1,-i) = \frac{-ite^{itz}(z-i)^2+e^{itz}\,2(z-i)}{(z-i)^4}\Big|_{z=-i} =$$

$$\frac{-ite^{t}(-4)+e^{t}(-4i)}{16} = \frac{te^{t}-e^{t}}{4}\,i$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} \dfrac{-te^{-t}-e^{-t}}{4} & \text{se } t>0 \\[2ex] \dfrac{te^{t}-e^{t}}{4} & \text{se } t<0 \end{cases} = \frac{-|t|e^{-|t|}-e^{-|t|}}{4}$$