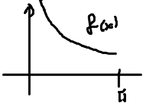
Complementi di Matematica
Ventiduesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

23 novembre 2009

$$\begin{cases} y'' + 3y = \dfrac{1}{x^{1/4}} & \text{su } [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$



(Termine in L^2 ma non continuo

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/4}} \in L^2 \qquad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx) \quad \text{dove} \quad \boxed{f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{x^{1/4}}\,dx}$$

$\left(\text{perché } \int_0^{\pi} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx < +\infty\right)$

(che non si calcola analiticamente). Valutiamo f_n (voglio "tirare fuori" la dipendenza da n). Pongo $y = nx \Rightarrow$

$x = \dfrac{y}{n}$, $dx = \dfrac{dy}{n}$. Dunque

$$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(y)}{(x/n)^{1/4}}\frac{dx}{n} = \frac{2}{\pi}\frac{n^{1/4}}{n}\int_0^{n\pi}\frac{\sin(y)}{y}\,dy = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^{3/4}}\int_0^{n\pi}\frac{\sin(y)}{y}\,dy$$

Ciò significa che $f_n \simeq \dfrac{1}{n^{3/4}}$ $\left(\displaystyle\int_0^{n\pi}\frac{\sin(y)}{y}\,dy \to \frac{\pi}{2} \text{ se } n \to +\infty\right)$

Se voglio qualche "risultato numerico" devo precisare "$\simeq$"!

So che

$$\sum_{j=0}^{n-1}\int_{j\pi}^{(j+1)\pi}\frac{\sin(y)}{y}\,dy = \int_0^{n\pi}\frac{\sin(y)}{y}\,dy \to \frac{\pi}{2} \quad (n\to\infty)$$

(⋆) a segni alterni

$$\cdot \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{\sin(y)}{y} = (-1)^{j} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y}\, dy \qquad \text{INOLTRE}$$

$$\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin(y)|}{y}\, dy \le \frac{1}{j\pi} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin(y)|\, dy = \frac{2\cancel{\pi}}{j\cancel{\pi}} = \frac{2}{j}$$

Dato che la serie (*) è a segni alterni e ha somma $\frac{\pi}{2}$ si sa che la somma è sempre compresa tra due termini consecutivi:

$$\sum_{0}^{2h+1} \dots \le \overset{\text{SOMMA}}{1} \le \sum_{0}^{2h}$$
$$\le \frac{\pi}{2} \le$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2}{\pi} \int_0^{m\pi} \frac{\sin(y)}{y} - 1 \right| \le \frac{2}{\pi} \int_{(m-1)\pi}^{m\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy \le \frac{4}{\pi m}$$

cioè
$$\boxed{\frac{2}{\pi} \int_0^{m\pi} \frac{\sin(y)}{y}\, dy = 1 \pm \frac{4}{m\pi}}$$

e quindi
$$f_m = \frac{1}{m^{3/4}} \left(1 \pm \frac{4}{m\pi}\right)$$

Nota che $\sum |f_n| = +\infty$

Però $\sum |f_n|^2 < +\infty$

· Risolvo "per serie" l'equazione. $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin(nx)$

$$\ldots \Rightarrow \quad y_n = \frac{f_n}{-n^2+3} = \underline{\frac{1}{n^{3/4}} \frac{1}{3-n^2} \left(1 \pm \frac{4}{\pi n}\right)}$$

Posso cercare di valutare l'errore: se $x \in [0,\pi]$

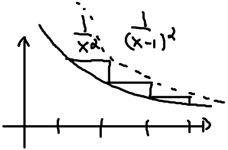
$$\left| y(x) - \sum_{n=1}^{k} y_n \sin(nx) \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |y_n| \leq$$

$(k \geq 3)$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}} \frac{1}{n^2-3} \underbrace{\left(1 + \frac{4}{n\pi}\right)}_{\leq 2} \leq 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/4}} \frac{1}{\frac{n^2}{2}} = 4 \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\frac{3}{4}}}$$

$$\left(n^2 - 3 \geq \frac{n^2}{2} \iff \frac{n^2}{2} \geq 3 \quad n^2 \geq 6 \Leftarrow n \geq 3 \right)$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_k^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_k^{+\infty} = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$



LO POSSO VALUTARE

$$\downarrow$$

$$\leq \frac{4}{1+\frac{3}{4}} \frac{1}{k^{1+3/4}}$$

$\leq \frac{2}{K^{1+3/4}}$. Se voglio che $\left| y(x) - \sum_{n=1}^{K} y_n \sin(nx) \right| < \frac{1}{10^3}$

posso cercare K tale che $\frac{2}{K^{\frac{7}{4}}} < \frac{1}{10^3} \iff$

$2 \cdot 10^3 < K^{\frac{7}{4}} \iff K > (2 \cdot 10^3)^{\frac{4}{7}} = 2^{\frac{4}{7}} 10^{\frac{12}{7}}$

(si fa il conto – $\qquad 2^{\frac{4}{7}} 10^{1{,}71}$

dovrebbero bastare circa 100 termini (tanti!))

FINE ESEMPIO

IDEA SUL PROSSIMO COMPITINO

VENERDÌ 11/12/2009 $\qquad$ 14.30 – 16.30

VENERDÌ 4/12/ $\qquad$ RECUPERI $\qquad$ 15.30 – 17.30 ??

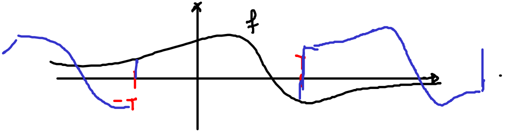
VENERDÌ 18/12

PER I NON ENERGETICI FINE CORSO QUESTO GIOVEDÌ o LUNEDÌ 29

Trasformata di Fourier

Modo "euristico" di arrivare alla trasformata.

Partiamo da una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile $(f \in L^1(\mathbb{R}))$



Prendiamo $T > 0$. Chiamo f_T la funzione che coincide con f su $[-T,T]$ ed è $2T$-periodica su $\mathbb{R}$

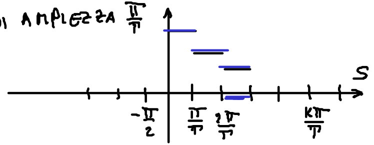
Posso sviluppare f_T in serie di Fourier di freq. ang. $\frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$

$$f_T(t) \underset{(\dots)}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{T}t} \qquad \text{dove} \qquad c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\tau)\, e^{-in\frac{\pi}{T}\tau}\, d\tau$$

$$\Rightarrow f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\tau)\, e^{-in\frac{\pi}{T}\tau}\, d\tau\right) e^{in\frac{\pi}{T}t}}_{a_n} =$$

VORREI INTEPRETARE LA SERIE COME INTEGRALE DI UNA FUNZIONE

· COSTANTE A TRATTI – TUTTI I TRATTI DI AMPIEZZA $\frac{\pi}{T}$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g_m(s)\,ds$$

dove $g_m(s) = \dfrac{a_n}{\pi/T} = \dfrac{T}{\pi} a_n$ per $n\dfrac{\pi}{T} < s < (n+1)\dfrac{\pi}{T}$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(\tau)\, e^{-i m \frac{\pi}{T}\tau}\, d\tau\right) e^{i m \frac{\pi}{T} t}$$

$$m\frac{\pi}{T} < s < (m+1)\frac{\pi}{T}$$

$$m < \frac{T}{\pi}s < m+1$$

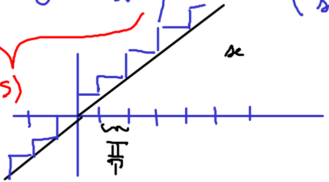
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(\tau)\, e^{-i \underbrace{\left[\frac{T}{\pi}s\right]\frac{\pi}{T}}_{\to s}\tau}\, d\tau\; e^{i\underbrace{\left[\frac{T}{\pi}s\right]\frac{\pi}{T}}_{\to s} t}$$

$$m = \left[\frac{T}{\pi}s\right]$$

Cosa succede se mando T a $+\infty$

$$g_m(s) \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-\tau s}\, d\tau\right)}_{\hat{f}(s)} e^{ist}$$

$$\left(\left[\frac{T}{\pi}s\right]\frac{\pi}{T} \to s \quad \text{se } T \to +\infty\right)$$



la distribuzione "continua"

Dunque se f non è periodica "posso scrivere"

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

dove $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$

(meglio scrivere ω al posto di s) $\longrightarrow$ $\hat{f}(\omega)$ è la "componente" di $f(t)$ rispetto a $e^{i\omega t}$

— ora ω varia con continuità su tutto $\mathbb{R}$, la serie di Fourier è diventata un integrale

$\hat{f}(\omega)$ è il corrispondente di $c_n = c_{\omega_n}$

$\omega_n = n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}$

$\hat{f}(\omega)$ sarà la "Trasformata di Fourier"

· Formalmente

Def. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ $\quad (f : \mathbb{R} \to \mathbb{C})$ definisco

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \qquad \left(o \quad \mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega)\right)$$

$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice Trasformata di Fourier di f

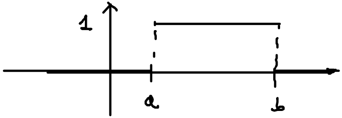
(è chiaro che $\hat{f}(\omega)$ ha senso dato che

$$\text{☆} \qquad |f(t)\, e^{-i\omega t}| \le |f(t)| \in L^1$$

e quindi $\quad f(t)\, e^{-i\omega t} \in L^1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$

Prop. $\hat{f}(\omega)$ è continua in ω. Basta usare il teorema di limite sotto il segno di integrale, che vale a causa di ☆

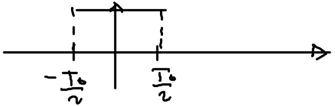
- **Esempio** $\quad f(t) = 1_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [a,b] \\ 0 & \text{se } t \notin [a,b] \end{cases}$



$$\hat{f}(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t}\,dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_a^b = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega}$$

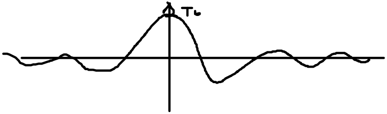
(se $\omega \neq 0$) ; se $\omega = 0$ $\hat{f}(0) = b - a$

Se per esempio $a = -\frac{T_0}{2}$, $b = \frac{T_0}{2}$ $\Rightarrow$



$$\hat{f}(\omega) = \frac{e^{\frac{T_0}{2} i\omega} - e^{-\frac{T_0}{2} i\omega}}{i\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{T_0\omega}{2}\right)}{\omega} = T_0 \,\mathrm{sync}\left(\frac{T_0}{2}\omega\right)$$

$\hat{f}(0) = T_0$



se $\mathrm{sync}(y) = \frac{\sin(y)}{y}$, $\mathrm{sync}(0) = 1$

<u>NOTA</u> $\hat{f}(\omega) \notin L^1(\mathbb{R})$ – (secondo Lebesgue)

· **Proposizione** Sia $f \in L^1$. Allora $\hat{f}(\omega)$ tende a zero per $\omega \to \pm\infty$.

IDEA DI DIM.

(1) se $f(t) = 1_{[a,b]}(t)$, allora è vero (appena visto)

$$\left(\hat{f}(\omega) = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega}\right.$$

($\to 0$ all'infinito): NUMERATORE LIMITATO, DENOMINATORE DIVERGENTE)

(2) se $f = \sum_{k=0}^{M} c_k 1_{[a_k b_k]}$ (funzione a scala)

$\Rightarrow$ VERO (segue da (1) $\hat{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{M} c_k \frac{e^{-i\omega b_k} - e^{-i\omega a_k}}{-i\omega}$)

la cosa funziona perché ho un numero finito di addendi.

(3) In generale so che esiste f_n di funzioni a scala tali che $f_n \xrightarrow{L^1} f$. $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n - f|\,dx \to 0\right)$

$$|\hat{f}_n(\omega) - \hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) e^{-i\omega t} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| =$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(t) - f(t)) e^{-i\omega t} \, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{=1} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t) - f(t)| \, dt \quad . \quad \text{Dunque}$$

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow \quad \hat{f}_n \longrightarrow \hat{f}$ UNIFORMENTE (VERO IN GENERALE ANCHE SE LE f_n NON SONO COST. A TRATTI)

Dato che $\hat{f}_n$ tende a zero a $\pm\infty$, e che $\hat{f}_n \to \hat{f}$ UNIF.

$\Rightarrow \quad \hat{f}$ tende a zero a $\pm\infty$

DUNQUE La trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ manda ogni funzione $f \in L^1$ (integrabile) in una $\hat{f} \in C_0^0$ (continue e nulle all'infinito)

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{\mathcal{F}} & C_0^0 \\ f & & \hat{f} \end{array}$$

INOLTRE

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$$

· Tale "OPERATORE" (da L^1 in C_0^0) è

· LINEARE $\left(\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g) \leftrightarrow \widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g} \right)$ FACILE DA VERIFICARE

· CONTINUA: se $f_n \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow \mathcal{F}(f_n) \xrightarrow{\text{UNIF.}} \mathcal{F}(f)$

$\left(\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_\infty \leq \|f_n - f\|_1 \right)$ $\left(\hat{f}_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} \hat{f} \right)$

Altre proprietà di $\mathcal{F}$

Prop. Supponiamo che $t f(t) \in L^1$ $\left(\Leftrightarrow |t f(t)| \in L^1 \right)$

Allora $\hat{f}(\omega)$ è derivabile in ω,

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -i \mathcal{F}(t f(t))(\omega)$$

In particolare $\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$ tende a zero se $\omega \to \pm\infty$ $\left(\hat{f} \in C_0^1 \right)$

· <u>Dim.</u> Segue dal teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Per poter derivare

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

mi servono:

(a) la derivabilità rispetto a ω dell'integrando $f(t) e^{-i\omega t}$

<u>OK</u> dato che $\frac{d}{d\omega} f(t) e^{-i\omega t} = -it\, f(t)\, e^{-i\omega t}$

(b) $\left| \frac{d}{d\omega} f(t) e^{-i\omega t} \right| \leq g(t) \in L^1$

<u>OK</u> basta $g(t) = |t\, f(t)| \in L^1$ per ipotesi

Applicando il teorema trovo

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} -it\, f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = -i\, \mathcal{F}\big(t f(t)\big)(\omega)$$

· **Prop.** Se $t^K f(t) \in L^1 \Longrightarrow \hat{f}(\omega)$ ha derivate fino all'ordine K, che tende a zero a $\pm\infty$ $\left(\hat{f} \in C_0^K\right)$

Inoltre

$$\frac{d^j}{d\omega^j}\hat{f}(\omega) = (-i)^j\, \mathcal{F}\left(t^j f(t)\right)(\omega)$$

<u>COMMENTO</u> sommabilità di $f \Longrightarrow$ derivabilità di $\hat{f}$

Per esempio se $f(t) = 1_{[a,b]}$ 

$t^K f(t) \in L^1 \quad \forall K \Longrightarrow f^K$ è C^∞ e tutte le derivate $\longrightarrow 0$ a $\omega \longrightarrow \pm\infty$ $\left(\hat{f}(\omega) = \text{- - - -}\right)$

VALE ANCHE IL VICEVERSA

Regolarità di $f \Longrightarrow$ sommabilità di $\hat{f}$

· **Prop** Se f' esiste ed è in L^1 $\Rightarrow$

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$$

in particolare $\omega \hat{f}(\omega) \to 0$ se $\omega \to \pm\infty$

Dim (idea)

$$\widehat{f'}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = (\text{per parti})$$

$$\Big[f(t) e^{-i\omega t} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-i\omega)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$\underset{0}{\parallel}$ (andrebbe visto che $f(t) \to 0$ x $t \to \pm\infty$) $\quad \underset{i\omega \cdot \hat{f}(\omega)}{\parallel}$

Dunque se $f' \in L^1$ (in senso tradizionale) $\Rightarrow \omega \hat{f}(\omega) \in C_0^0$

$\hat{f}$ è "più nulla" a $\pm\infty$.

- In realtà non serve che f' esista in senso "tradizionale" basta che $\exists\ f'$ debole, e che $f' \in L^1$ (perché nella dim si sfrutta solo l'integrazione per parti)

Vale in effetti un Teorema più generale

<u>Prop.</u> Se $K \in \mathbb{N}$, se $\exists\ f^{(K)}$ (debole), $f^{(K)} \in L^1$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(f^{(K)}\right)(\omega) = (i\omega)^K \hat{f}(\omega)$$

In particolare $\omega^K \hat{f}(\omega) \to 0$ se $\omega \to \pm\infty$

Per esempio se $f'' \in L^1 \Rightarrow \omega^2 \hat{f}(\omega) \to 0$ a $\pm\infty \Rightarrow$

$\left(\hat{f}(\omega) = \dfrac{o(1)}{\omega^2} \right)$ $\hat{f}(\omega)$ è L^1

Mentre $f' \in L^1 \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{o(1)}{\omega}$, non basta per $\hat{f} \in L^1$