Complementi di Matematica
Ventunesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

19 novembre 2009

. Nozione "debole" di derivata

Chiamo $L^1_{loc}(]a,b[) = \{ f :]a,b[\to [-\infty, \infty]$, tali che per ogni $[a_1,b_1] \subset]a,b[$
$(a,b \in [-\infty,+\infty])$ f è integrabile su $[a_1,b_1] \}$

per es. • $f(x) = x$ è $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, anche se non è $L^1(\mathbb{R})$

• $\frac{1}{x}$ non è L^1_{loc} (non è integrabile vicino a zero)

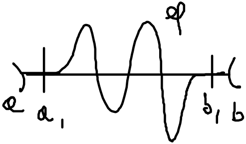
• $\frac{1}{x}$ è $L^1_{loc}(]0,1[)$ (se $0 < a < b < 1 \Rightarrow$ $\frac{1}{x}$ è int. su $[a,b]$)

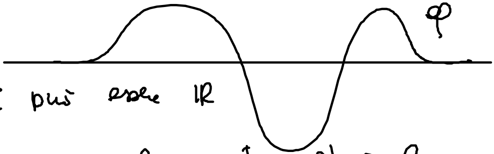
Def. (di derivata debole). Date f e g in $L^1_{loc}(a,b)$, dico che g è la derivata debole di f se

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,\varphi(x) \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(a,b)$$

φ per φ gli integrali hanno senso dato che in realtà sono fatti su $[a_1,b_1] \subset]a,b[$

Con $C_0^\infty(a,b)$ intendo le funzioni $\varphi :]a,b[\to \mathbb{R} / \mathbb{C}$ infinitamente derivabili, tali che esiste $[a_1,b_1] \subset]a,b[$ per cui $\varphi(x) = 0$ se $x \notin [a_1,b_1]$ ("TEST")





$]a,b[$ può essere $\mathbb{R}$

<u>Oss.</u> Se $f :]a,b[\to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ è di classe C^1, f' è la derivata debole di f — conseguenza dell'integrazione per parti:

Sia $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, siano a_1, b_1 tali che $[a_1,b_1] \subset]a,b[$ e $\varphi(x) = 0$ fuori $[a_1,b_1]$; allora

$$\int_a^b f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \underbrace{\big[f(x)\,\varphi(x) \big]_{a_1}^{b_1}}_{=0 \text{ perché } \varphi(a_1) = \varphi(b_1) = 0} - \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$- \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx$$

TORNA

· Oss. La derivata debole – se esiste – è unica

Se g e g_1 fossero due derivate deboli

$$\int_a^b g(x)\,\varphi(x) = -\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_a^b g_1(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \big(g(x)-g_1(x)\big)\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(a,b)$$

$\Longrightarrow$ $g(x)-g_1(x)=0$ q.o. x in $]a,b[$ cioè

$g = g_1$ (in L^1_{loc})

se g è la der. debole la indico con f'

Esempio $f(x)=|x|$ (non è C^1), $f'(x)= \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

(non importa definirla in $x=0$, tanto f' è def. quasi ovunque)

VERIFICHIAMOLO. Data $\varphi \in C_0^\infty$, sia $[a_1,b_1]$ tale che $\varphi(x)=0$ fuori da $[a_1,b_1]$ . . .

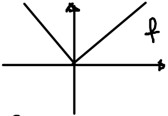
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\varphi'(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} |x|\,\varphi'(x)\,dx = \int_{a_1}^{0} (-x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_0^{b_1} x\,\varphi'(x)\,dx =$$

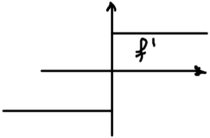
$$\left[(-x)\varphi(x)\right]_{a_1}^{0} + \int_{a_1}^{0}\varphi(x)\,dx + \left[x\,\varphi(x)\right]_{0}^{b_1} - \int_{0}^{b_1}\varphi(x)\,dx =$$

$$-0\cdot\underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(0)}} + a_1\underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(a_1)}} + b_1\underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(b_1)}} - 0\,\underset{0}{\underset{\parallel}{\varphi(0)}} + \int_{a_1}^{0}\varphi(x)\,dx - \int_{0}^{b_1}\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int_{a_1}^{b_1} g(x)\,\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \text{dove } g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$$

DUNQUE $g = f'$ (debole)





<u>NOTA</u> A differenza della def. classica, la derivata debole si "introduce in blocco"

<u>Proposizione</u> Se f ammette derivata debole allora f è continua e vale $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$

. Per es. $|x| = \int_0^x g(t)\,dt$ dove $g(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t<0 \\ 1 & \text{se } t>0 \end{cases}$

Proposizione Se $\{f_n\}$ è una successione di funzioni L^1/L^2 su $[a,b]$ e se $f_n \xrightarrow{L^1} f$ / $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Supponiamo che ogni f_n ammetta derivata debole f_n' in L^1/L^2.
Supponiamo che $f_n' \xrightarrow{L^1} g$ / $f_n' \xrightarrow{L^2} g$.
ALLORA f ha derivata debole e $f' = g$.

Dim Sia $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$. Allora (se $\varphi = 0$ fuori $[a_1,b_1]$)

$$\int_a^b f_n(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} f_n(x)\,\varphi'_n(x) \underset{\text{(def. di der. deb.)}}{=} \int_{a_1}^{b_1} f_n'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Se passo al limite per $n \to \infty$

$$\int_{a_1}^{b_1} f_n(x)\,\varphi'(x)\,dx \longrightarrow \int_{a_1}^{b} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \quad \left(\text{perché } f_n \xrightarrow{L^1/L^2} f \Rightarrow f_n\varphi \xrightarrow{L^1} f\varphi\right)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} f_n'(x)\,\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_{a_1}^{b} g(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \left(\text{perché } f_n' \xrightarrow{L^1/L^2} g\right.$$

· SE NE RICAVA $\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx$

$\forall\, \varphi \in C_0^\infty(a,b)$

CIOÈ $g = f'$ (debole)

DUNQUE Limite (L^1/L_2) di derivate = derivata
(il tutto in senso debole)

ATTENZIONE Non è detto che

$g(x) = f'(x)$ per q.o $x \Rightarrow g = f'$ (debole)

derivata puntuale

Per esempio $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

allora la derivata "puntuale" esiste per tutte le x, eccetto $x = 0$, e fa sempre zero. Però non è vero che $f'(x) = 0$ (debole)

MOTIVO INDIRETTO f NON È CONTINUA $\Rightarrow$ f NON HA DER. DEBOLE

MOTIVO DIRETTO Applico la def: Non è vero che $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} 0\cdot\varphi(x)\,dx = 0 \qquad (*)$$

NON È ZERO PER $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$= \int_{-\infty}^{0} (-1)\,\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$\Big[-\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{0} + \Big[\varphi(x)\Big]_{0}^{+\infty} = -2\varphi(0)$$

SE $\varphi(0) \neq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \neq 0 \Rightarrow (*)$ NON VALE !

<u>Prop.</u> Se f è <u>CONTINUA</u>, f regolare a tratti cioè esiste $f'(x)$ per ogni x eccetto $x_1, x_2, \dots, x_k$, $f'(x)$ (definita a piacere in $x_1 \dots x_k$) sta L^1_{loc}.

Allora tale f' è anche la derivata debole.

(L'esempio di prima $f(x) = |x|$ mentre in questo caso)

Teorema Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2 < +\infty$ allora $f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

ha derivata debole pari a $f' \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i n\omega c_n e_n$

Dim. Dato k pongo $F_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n(x)$.

Dato che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2 < +\infty$

so che $F_k \xrightarrow{L^2} f$.

È chiaro che F_k è di classe C^1 e che $F_k' = \sum_{n=-k}^{k} i n\omega c_n e_n$

Noto che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |i n\omega c_n|^2 = \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2|c_n|^2 < +\infty$

· dato che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |in\omega c_n|^2 < +\infty$

posso considerare $G(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} in\omega c_n e_n$, cioè

$$F'_k \xrightarrow{L^2} G \,. \quad \text{Dunque} \quad F_k \xrightarrow{L^2} F, \quad F'_k \xrightarrow{L^2} G$$

Per quanto visto nella parte precedente $G = F'$ (debole)

Più in generale

<u>Teorema</u> Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^{2k} |c_n|^2 < +\infty$, allora $f \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$

ammette derivate deboli fino all'ordine k e se $j = 0, 1, \dots, k$

$$f^{(j)}(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=\infty}^{+\infty} (in\omega)^j c_n e_n \,.$$

Se $j < k$ tali derivate sono continue (f è C^{k-1}) e

$$f^{(j)}(x) \underset{\text{UNIF.}}{=} \sum_{n=\infty}^{+\infty} (in\omega)^j c_n e_n \,. \qquad (j < k)$$

· Identici risultati per le serie di seni / di coseni

Teorema Supponiamo $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty$. Allora esiste

$$f(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n s_n(x) \qquad \left(s_n(x) = \sin(n\bar{\omega}x) \right)$$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k} |u_n|^2 < +\infty$, allora

f ha derivata debole fino all'ordine k e per $j = 1 \dots k$

$$f^{(j)}(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n s_n^{(j)}(x) \quad \left(= \text{serie di seni o di coseni a seconda che } j \text{ sia pari o dispari} \right)$$

Ne segue che se $j < k$ $f^{(j)}$ è continua, la conv. della serie è uniforme, e per j PARI $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(L) = 0$

(Analogo discorso per gli sviluppi in sol coseni)

· Torniamo ai problemi diff. con dati al bordo.

Per es.

$$(P_0) \begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{su } [0,L] \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

Avevamo visto come risolvere per serie $\left(\text{cerco } y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n s_n(x)\right.$ e trovo gli u_n ...$\left.\right)$ NEL CASO $f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m s_m$ con $\sum_{m=1}^{\infty} |f_m| < +\infty$

In questo caso si trova y derivabile due volte (in senso "standard") che risolve (P_0)

VENIVA $(*)$ $\boxed{y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{f_m}{\lambda - m^2 \bar{\omega}^2}}_{u_n} s_m(x)}$ (nel caso 1)

POSSO GENERALIZZARE mettendo solo $f \in L^2([0,L])$

se guardo la formula $(*)$ noto che y non ha derivato secondo "standard" — però

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 |u_n|\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^4}{\left(\lambda - n^2 \overline{\omega}^2\right)^2}}_{\text{limitati}} |f_n|^2 \leq \text{cost} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < +\infty}_{f \in L^2}$$

$\Rightarrow$ y ha derivata seconda <u>debole</u>, $y'' \in L^2$, e

$$y'' \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n s_n''$$

SE NE RICAVA CHE IL PROBLEMA (P_0) ha soluzione "in senso debole", cioè $\exists$ y, y', y'' deboli e verificano (P_0). In realtà se $\exists$ y'' debole $\Rightarrow$ $\exists$ y e y' in senso tradizionale, y, y' sono continue, $y(0) = y(L) = 0$ e quindi la condizione al bordo è verificata.

STESSI DISCORSI NEL CASO PERIODICO / CASO $y'(0) = y'(L) = 0$

• Notiamo che, in linea di principio, f può essere divergente in uno (o molti) punti PURCHÈ ABBIA ENERGIA FINITA (cioè $\int_0^L |f|^2 < +\infty$). Questo si riflette su y'', mentre y' e y rimangono continue

Per es.

$$\begin{cases} y'' + 3y = \dfrac{1}{x^{1/4}} \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \overline{\omega} = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{1/4}} \qquad \int_0^\pi f^2(x)\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty \quad \left(f \in L^2 \right)$$

$$f(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx) \quad \text{dove} \quad f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{x}\,dx$$

che non si sanno fare (☹) — però so che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 < +\infty$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{3-m^2} \sin(mx)$$ ($m^2 \neq 3 \ \forall n$ NON HO PROBLEMI)

y FORNISCE UNA SOLUZIONE "DEBOLE" (y'' NON C'È IN SENSO TRAD.) CHE PUÒ ESSERE CALCOLATA NUMERICAMENTE.
(VALUTANDO GLI ERRORI COMMESSI)

Al posto di "tutto y(x)" considero $\sum_{n=1}^{K} \frac{f_n}{3-n^2} \sin(nx)$ —
l'errore si valuta mediante

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{|f_m|}{3-m^2}$$

CONTINUA ..