Complementi di Matematica
Ventesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

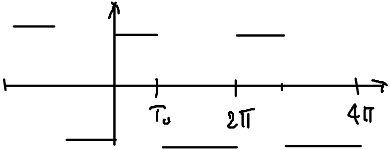
17 novembre 2009

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f(t) \\ y \quad 2\pi \text{ periodica} \end{cases} \qquad 0 < T_0 < 2\pi$$

dove

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < T_0 \\ -1 & T_0 < t < 2\pi \end{cases}$$

(periodicizzata di periodo 2π su tutto $\mathbb{R}$)



Se cerco $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \Rightarrow$

$$y' = \sum in\, c_n e^{int}$$

$$y'' = \sum (-n^2) c_n e^{int} \qquad \Rightarrow$$

$$(*) \qquad c_n\left(-n^2 + 2in + 2\right) = f_n$$

dove $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{int}$. Dobbiamo calcolare gli f_n

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{T_0} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_{T_0}^{2\pi}$$

$$= \frac{i}{2\pi n}\left\{ e^{-inT_0} - e^{0} - e^{-in2\pi} + e^{inT_0} \right\} =$$

1

$$= \frac{i}{\pi n}\left(e^{-inT_0} - 1\right) = f_n$$

Nella condizione $(*)$ $-n^2 + in + 2 \neq 0 \ \forall n \Longrightarrow$

$$c_n = \frac{f_n}{2-n^2+2in} = \frac{f_n}{(2-n^2)^2+4n^2}\left(2-n^2-2in\right) =$$

$$\cdot \quad \frac{2n+(2-n^2)i}{\pi n(4+n^4)}\Big(\cos(nT_0)-1+i\sin(nT_0)\Big) =$$

$$\frac{2n(\cos(nT_0)-1)-(2-n^2)\sin(nT_0)}{\pi n(4+n^4)} + i\,\frac{(2-n^2)(\cos(nT_0)-1)+2n\sin(nT_0)}{\pi n(4+n^4)}$$

$\frac{a_n}{2}$ // se $n\neq 0$, a_0 se $n=0$ $\qquad\qquad = -\frac{b_n}{2}$

DUNQUE $y(t)$ — scritta in termini reali

$$y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nt)+\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nt) \qquad \text{dove}$$

per esempio se $T_0=\pi$ () $\Rightarrow$

$$a_n=\frac{4n\left[(-1)^n-1\right]}{\pi n(4+n^4)} \text{ se } n>0,\quad a_0=0,\quad b_n=\frac{2(2-n^2)\left[(-1)^n-1\right]}{\pi n(4+n^4)}$$

(= 0 se n PARI) $\quad a_{2k}=b_{2k}=0$

$$a_n=\frac{-8n}{\pi n(4+n^4)},\quad b_n=\frac{4(n^2-2)}{\pi n(4+n^4)} \qquad \text{se } n=2k+1$$

DUNQUE SI VEDE CHE

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f \\ y \ 2\pi \text{ periodica} \end{cases}$$

È RISOLUBILE E HA SOLUZIONE UNICA QUALUNQUE SIA

f 2π periodica $\Leftrightarrow$ $\boxed{-n^2 + 2in + 2 \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}}$

(posso sempre ricavare i $c_n = \dfrac{f_n}{-n^2 + 2in + 2}$)

$\forall$ f 2π-PERIODICA ESISTE UNA E UNA SOLA

y PERIODICA SOL. DI $y'' + 2y' + 2y = f$

L'equazione VA D'ACCORDO COL DATO PERIODICO

Altro esempio

$$(P)\ \begin{cases} y'' + 4y' = f \\ y \ \ 2\pi\text{-periodica} \end{cases}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO $\Rightarrow P(z) = z^2 + 4z$

$P(in) = -n^2 + 4in$. $P(in) = 0 \iff n = 0$

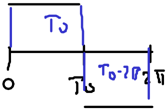
Allora (P) è risolubile solo se $f_0 = 0$ cioè se

$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Se $\int_0^{2\pi} f(t) \neq 0$ (P) NON È RISOLUBILE

Cioè l'equazione $y'' + 4y' = f$ NON HA SOL. PERIODICHE

Se prendo la $f(t)$ dell'esempio precedente la condizione diventa

$$0=\int_0^T f(t)\,dt = T_0-(2\pi-T_0) = 2T_0-2\pi \iff \boxed{T_0=\pi}$$



Se rifaccio i conti arrivo a

$$c_n\, P(in) = f_n \qquad \text{MA per } n=0 \text{ trovo}$$

$$c_0\cdot 0 = f_0 \qquad \Longrightarrow f_0 = 0 \quad \left(\begin{array}{l}\text{se } f\neq 0\\ \text{NO SOL.}\end{array}\right)$$

Se poi $f_0=0 \iff T_0=\pi$ ho infinite soluzioni perché posso scegliere arbitrariamente c_0; cioè

$$y(t) = \underbrace{c_0}_{\text{libera}} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{f_n}{-n^2+4in}\, e^{int}$$

(y è def a meno di una costante – se $f_0=0 \iff T_0=\pi$)

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' + 4y = f \\ y \quad 2\pi\text{-periodica} \end{cases}$$

$$P(z) = z^2 + 4 \qquad P(in) = -n^2 + 4 \; ; \; P(in) = 0 \iff n = \pm 2$$

Il problema è risolubile $\iff f_2 = f_{-2} = 0$ cioè se

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{2it}\, dt = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-2it}\, dt = 0$$

$$\iff \int_0^{2\pi} f(t) \sin(2t)\, dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(2t)\, dt = 0 \qquad \triangle\!\!-\!\!-$$

Il problema è risolubile $\iff$ f è "ortogonale" a $\sin(2t)$ e $\cos(2t)$

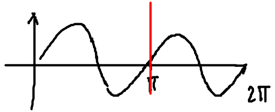
Se f è quella di prima trovo

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(2t)\,dt = \int_0^{T_0} \sin(2t)\,dt - \int_{T_0}^{2\pi} \sin(2t)$$

CIOÈ

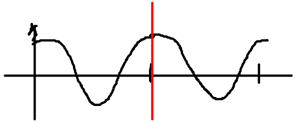
$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(2t)\,dt = \int_0^{T_0} \cos(2t)\,dt - \int_{T_0}^{2\pi} \cos(2t)$$

(1) $$\int_0^{T_0} \sin(2t)\,dt = \int_{T_0}^{2\pi} \sin(2t)\,dt$$



sin(2t)

(2) $$\int_0^{T_0} \cos(2t)\,dt = \int_{T_0}^{2\pi} \cos(2t)\,dt$$



cos(2t)

A OCCHIO DOVREBBE SIGNIFICARE $T_0 = \pi$ → ANALITICAMENTE

(1) $$-\frac{\cos(2t)}{2}\Big|_0^{T_0} = -\frac{\cos(2t)}{2}\Big|_{T_0}^{2\pi} \iff \cos(2T_0) - 1 = 1 - \cos(2T_0) \iff$$

$$\cos(2T_0) = 1 \iff 2T_0 = 2k\pi$$

$$\iff T_0 = \pi$$

(2) si verifica che $T_0 = \pi$ va bene ...

DUNQUE il problema è risolubile con questo $f \Leftrightarrow T_0 = \pi$

e in tal caso

$$y(t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq \pm 2}} \frac{f_n}{-n^2 + 4} e^{int} + \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)$$

$$\left(\alpha' e^{i2t} + \beta' e^{-i2t} \right)$$

SI PUÒ SCRIVERE IN TERMINI REALI COME

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 2}}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)$$

α, β arbitrari

si ricavano dai c_n (...)

(probabilmente $a_n = 0$ perché i c_n sono immaginari puri)

Esempio (quello di prima con un periodo T generico)

$$\begin{cases} y'' + 4y = f \\ y \ T\text{-periodica} \end{cases} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$P(z) = z^2 + 4$$

devo vedere se $P(i\omega n) = 0$ per qualche n, cioè

$$P\left(i \frac{2\pi}{T} n\right) = 0 \text{ per qualche } n \iff$$

$$-\frac{4\pi^2}{T^2} n^2 + 4 = 0 \iff 1 = \frac{\pi^2}{T^2} n^2 \iff \frac{T^2}{\pi^2} = n^2$$

$$\iff \boxed{\frac{T}{\pi} \text{ è un numero intero}}$$

DUNQUE IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y'' + 4y = f \\ y \quad T\text{-periodico} \end{cases}$$

HA SOLUZIONE PER OGNI f $\iff \dfrac{T}{\pi} \notin \mathbb{N}$

$\underbrace{}_{\text{NO RISONANZA}}$

SE INVECE $\dfrac{T}{\pi} = k \in \mathbb{N}$, allora il problema ha soluzione $\iff$ $\displaystyle\int_0^T f \cos(k\omega t)\,dt = \int_0^T f \sin(k\omega t)\,dt = 0$

e in questo caso la soluzione è definita a meno di

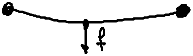
$$\alpha \cos(k\omega t) + \beta \sin(k\omega t) \qquad (\alpha, \beta \text{ arbitrari})$$

SE $T = k\pi$ CON k INTERO C'È UN FENOMENO SPECIFICO (RISONANZA?)

TUTTO QUANTO DETTO FIN'ORA RIGUARDA IL PROBLEMA CON CONDIZIONE DI PERIODICITÀ

PROBLEMA CON DATO NULLO AGLI ESTREMI

$$
(P_0) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = f & \text{su } [0, L] \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}
$$



(VALIDO PER PICCOLI SPOSTAMENTI)

Dovrebbe essere un modello MOLTO SEMPLIFICATO DI UNA <u>SBARRA</u> ELASTICA FISSATA AGLI ESTREMI — f RAPPRESENTA UNA FORZA ESTERNA

(λ è un coeff. di elasticità — PARAMETRO "INTERNO" ALLA SBARRA)

· Cerco $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n s_n(x)$ $\qquad s_n(x) = \sin(\bar{\omega} n x)$

dove $\bar{\omega} = \frac{\pi}{L}$

(scelgo i seni a causa della condizione "zero agli estremi")

$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \bar{\omega} n \cos(\bar{\omega} n x)$; $y''(x) = \sum u_n \bar{\omega}^2 n^2 (-\sin(n\bar{\omega} x))$

DUNQUE VIENE SPONTANEO SCRIVERE

$$(\ast) \qquad (-\bar{\omega}^2 n^2 + \lambda) u_n = f_n$$

DOVE $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n s_n(x)$, CIOÈ $f_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\bar{\omega} x) dx$

ADESSO SI RAGIONA COME PRIMA – ALTERNATIVA

(1) Se $\lambda - n^2\bar{\omega}^2 \neq 0 \quad \forall n \geq 1$

posso ricavare $c_n = \dfrac{f_n}{\lambda - n^2\bar{\omega}^2}$ (per es. se $\lambda < 0$)

$\Rightarrow$ Trovo che $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n s_n(x)$ è effettivamente sol.

(a patto che $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$)

DUNQUE C'È SOLUZIONE UNICA PER OGNI DATO f.

(2) C'è un n_0 tale che $\lambda - n_0^2\bar{\omega}^2 = 0$ $\left(\lambda = n_0^2\bar{\omega}^2\right)$

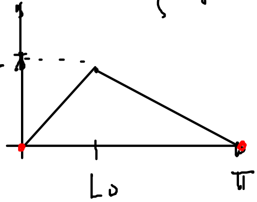
Allora la sol. esiste <u>SOLO</u> se $f_{n_0} \neq 0$ $\left(\int_0^L f(x)\sin(n_0\bar{\omega}x)\,dx = 0\right)$

e in questo caso è definita a meno di $\gamma \sin(n_0\bar{\omega}x)$

($\gamma \in \mathbb{R}$ arbitrario) $\rightarrow$ $y(x) = \sum_{n=1,\, n\neq n_0}^{\infty} \dfrac{f_n}{\lambda - n^2\bar{\omega}^2}\sin(n\bar{\omega}x) + \gamma\sin(n_0\bar{\omega}x)$

· Esempio

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x) & \text{su } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \qquad (\lambda > 0)$$

$f(x) =$ 

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{L_0} & \text{se } 0 \le x \le L_0 \\ \dfrac{(\pi - x)}{\pi - L_0} & L_0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\cdot\ \overline{\omega} = \frac{\pi}{\pi} = 1 \quad \Rightarrow \quad s_n(x) = \sin(nx)$$

DEVO VEDERE SE $\lambda - n^2 \neq 0 \ \forall n$, cioè

$$\boxed{\lambda \neq n^2 \text{ per } \forall n.}$$

IN QUESTO CASO ESISTE UNICA LA SOL. TROVIAMOLA (per serie)

(a) Trovo i coeff. di Fourier, rispetto ai seni, della f.

Notiamo che $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{L_0} & 0 \leq x < L_0 \\ -\dfrac{1}{\pi - L_0} & L_0 < x \leq \pi \end{cases}$

Facendo una integrazione per parti $(\ast)$

$$\frac{\pi}{2} f_n = \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,dx \overset{(\ast)}{=} \underbrace{\left[\frac{f(x)\left(-\cos(nx)\right)}{n} \right]_0^{\pi}}_{=0 \text{ dato che } f(0) = f(\pi) = 0}$$

$$+ \frac{1}{n} \int_0^{\pi} f'(x) \cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{1}{n} \int_0^{L_0} \frac{1}{L_0} \cos(nx)\,dx - \frac{1}{n} \int_{L_0}^{\pi} \frac{1}{\pi - L_0} \cos(nx)\,dx =$$

$$\frac{1}{n L_0} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{\cancel{0}\,0}^{L_0} - \frac{1}{n(\pi - L_0)} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{L_0}^{\cancel{\pi}\,0} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{L_0} + \frac{1}{\pi - L_0} \right) \sin(n L_0)$$

$$\Rightarrow \quad f_n = \frac{2}{\cancel{\pi}} \frac{1}{n^2} \frac{\cancel{\pi}}{L_0(\pi - L_0)} = \frac{2}{n^2 L_0(\pi - L_0)}$$

e quindi $\quad u_n = \dfrac{f_n}{\lambda - n^2} = \dfrac{2}{(\lambda - n^2) n^2 (\pi - L_0) L_0}$

(NEL CASO $\lambda \neq n^2 \ \forall n$)

$$\left[y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2}{(\lambda - n^2) n^2 (\pi - L_0) L_0}}_{u_n} \sin(nx) \right] \quad (*)$$

IN FONDO

SI NOTI CHE y HA DERIVATA II^a CONTINUA E NULLA AL BORDO PERCHÉ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot n^2 < +\infty$

(2) Se INVECE $\lambda = n_0^2$, con gli stessi ragionamenti

$\exists$ soluzione $\Longleftrightarrow$ $f_{n_0} = 0 \Longleftrightarrow$ IMPOSSIBILE

Se $\lambda = n_0^2$ non dà soluzione (con una tale f)

VERIFICA DI QUANTO TROVATO RAGIONANDO SENZA LE SERIE DI F. — TROVO ESPLICITAMENTE $y(x)$ — USO PESANTEMENTE IL FATTO DI ESSERE IN UNA VARIABILE

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x) \\ y(0)=0 \;, \; y(\pi)=0 \end{cases}$$

DATO CHE $f(x) = \dfrac{x}{L_0}$ su $[0, L_0]$

RISOLVO L'EQ. SU $[0, L_0]$

· $y(x) = y_0 + \bar{y}$ dove y_0 è sol. di $y'' + 4y = 0$ (OMOGENEA)

$\bar{y}$ è una sol. particolare.

<u>OMOGENEA</u> $y_0(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + \beta \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$

<u>PARTICOLARE</u> CON DATO $f(x) = \dfrac{x}{L_0}$; $\bar{y}(x) = cx$ con c DA TROVARE

$\bar{y}(x) = cx$, $\bar{y}'(x) = c$, $\bar{y}'' = 0$ $\Rightarrow$

$$\bar{y}'' + \lambda \bar{y} = \lambda c x = \frac{x}{L_0} \iff c = \frac{1}{\lambda L_0}$$

<u>PARTICOLARE</u> con DATO $f(x) = \dfrac{x - \pi}{L_0 - \pi}$; CERCO $\tilde{y}(x) = c_1 (x - \pi)$

$$\tilde{y}'' = 0 \Rightarrow \tilde{y}'' + \lambda \tilde{y} = \lambda c_1 (x - \pi) = \frac{x - \pi}{\pi - L_0} \iff c_1 = \frac{1}{\lambda(\pi - L_0)}$$

· Risolvo su $[0, L_0]$ con pos. iniziale nulla
(rimarrà un parametro libero)

$$\begin{cases} y(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta \cancel{\cos(\sqrt{\lambda}x)} + \dfrac{1}{\lambda L_0} x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$x=0$

$$\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x)}_{x = L_0} + \frac{x}{\lambda L_0} \qquad (\alpha = ??)$$

Se la calcolo in L_0 trovo $y(L_0) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda} L_0) + \dfrac{1}{\lambda}$

e la sua velocità sarà $2\alpha \cos(2x) + \dfrac{1}{4L_0} \Big|_{x = L_0} =$

$\sqrt{\lambda}\, \alpha \cos(\sqrt{\lambda} L_0) + \dfrac{1}{\lambda L_0}$

ORA RISOLVO SU $[L_0, \pi]$

$$y(x) = \alpha_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + \frac{1}{\lambda(\pi - L_0)}(\pi - x)$$

CON CONDIZIONE

$$y(L_0) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}L_0) + \frac{1}{\lambda}$$

$$y'(L_0) = \sqrt{\lambda}\,\alpha \cos(\sqrt{\lambda}L_0) + \frac{1}{\lambda L_0}$$

SE IMPONGO TALI CONDIZIONI + $y(\pi) = 0 \implies$

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos(\sqrt{\lambda}L_0) + \beta_1 \sin(\sqrt{\lambda}L_0) + \cancel{\frac{1}{\lambda}} - \alpha \sin(\sqrt{\lambda}L_0) = \cancel{\frac{1}{\lambda}}\ 0 \\ -\sqrt{\lambda}\,\alpha_1 \sin(\sqrt{\lambda}L_0) + \sqrt{\lambda}\,\beta_1 \cos(\sqrt{\lambda}L_0) - \frac{1}{\lambda(\pi - L_0)} - \sqrt{\lambda}\,\alpha \cos(\sqrt{\lambda}L_0) + \frac{1}{\lambda L_0} \\ \alpha_1 \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + \beta_1 \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases}$$

QUESTO È UN SISTEMA IN $\alpha, \alpha_1, \beta_1$, Per vedere se è risolubile dovrei calcolarne il determinante.

$$\theta = \sqrt{\lambda}L_0$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta), & \sin(\theta), & -\sin(\theta) \\ -\sqrt{\lambda}\sin(\theta), & \sqrt{\lambda}\cos(\theta), & -\sqrt{\lambda}\cos(\theta) \\ \cos(\sqrt{\lambda}\,\pi), & \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi), & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

dovrebbe venire zero $\Leftrightarrow \lambda = n^2$.

VEDIAMO SOLO $\Leftarrow$; se $\lambda = n^2 \Rightarrow \det = 0$

INFATTI SE $\lambda = n^2 \Rightarrow$ l'ultima riga $= (\pm 1, 0, 0)$

$$\Rightarrow \det = \pm 1 \left(\sin(\theta) \cdot -\sqrt{\lambda}\cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{\lambda}\cos(\theta) \right) = 0$$

È VERO ANCHE IL VICEVERSA

(*) NOTA

Sapere che $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx)$

E' ANCHE UTILE PER UTILIZZARE $y(x)$, se riesco a valutare l'errore tra la serie "completa" e $\sum_{n=1}^{K} c_n \sin(nx)$.

Nel caso in cui $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ posso scrivere

$$\left\| y(x) - \sum_{n=1}^{K} c_n s_n(x) \right\|_{\infty,[0,L]} = \left\| \sum_{n=K+1}^{\infty} c_n s_n(x) \right\|_{\infty}$$

$$\leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \| c_n s_n \|_{\infty} = \sum_{n=K+1}^{\infty} |c_n|$$

DUNQUE PERCHÈ L'errore $\left| y(x) - \sum_{n=1}^{K} c_n s_n(x) \right| < \varepsilon$

(per tutte le x in $[0, L]$), basta che $\sum_{n=K+1}^{\infty} |c_n| < \varepsilon$

Se per esempio $|c_n| \le \frac{M}{n^4}$ (come nel calcolo di prima)

Mi serve valutare $\sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{M}{n^4} \simeq \frac{M}{K^3}$ ci vogliono $\simeq \sqrt[3]{\varepsilon}$ termini

(per esempio usando gli integrali)

$$\int_K^{+\infty} \frac{M}{x^4}\,dx = \left[\frac{M}{(-3)x^3} \right]_K^{+\infty} = \frac{M}{3}\frac{1}{K^3}$$