Complementi di Matematica
Diciannovesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

16 novembre 2009

• $f \in L^2_T$ posto $c_k = \frac{1}{T}\langle f, e_k \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt$

(o su $[a,b]$ con $b-a=T$)

$$\Rightarrow \boxed{f \overset{}{\underset{L^2}{=}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n} \quad (*) \quad \left(e_n(t) = e^{i\omega n t}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

inoltre $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt$

• Se f è più regolare $\Longleftrightarrow$ c_n più sommabili e la conv. della serie è meglio ..

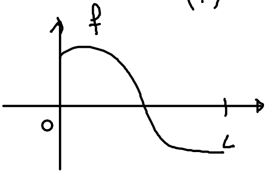
• Versione "in soli seni" oppure "soli coseni".

Partiamo da una $f : [0, L] \to \mathbb{C}$, con $\int_0^L |f|^2 dx < +\infty$ ($f \in L^2([0,L])$). Poniamo $\bar{\omega} = \frac{\pi}{L}$

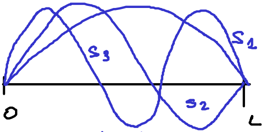
Vorrei scrivere

$$f(x) \overset{(?)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\bar{\omega}x)\, dx \quad \text{oppure}$$

$$\overset{(?)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos(n\bar{\omega}x)\, dx$$



LA VOGLIO "SVILUPPARE" RISPETTO ALLA "BASE" $s_n(x)$



NOTA: le s_n sono tutte nulle in $x = 0$ e $x = L$

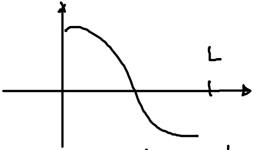
· Mi riconduco a questo fatto fin'ora.

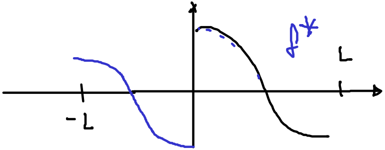
Dato $f(x)$ definisco $f^*(x)$ in due passi

(1) Pongo

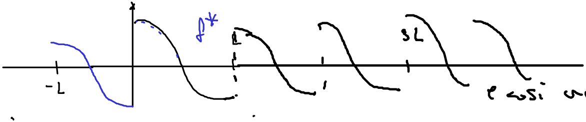
$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \,]0,L] \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -f(-x) & \text{se } x \in [-L,0[\end{cases} \qquad (f^* : [-L,L] \to \mathbb{C})$$

In sostanza ho preso l'estensione DISPARI di f su $[-L\ L]$





(2) estendo f^* a tutto $\mathbb{R}$ in modo che sia $2L$-periodica



e così via ...

Posso allora sviluppare f^* in serie di Fourier dove

$\omega = \dfrac{2\pi}{2L} = \bar{\omega}$ $\Rightarrow$ (nella versione reale)

$$f^*(x) \underset{L^2}{=} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos(m\bar{\omega}x)}_{=0} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\bar{\omega}x)$$

Ma essendo f^* dispari, si ha $a_m = 0 \ \forall m$,

Per quanto riguarda i b_m abbiamo

$$b_m = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}L} \int_{-L}^{L} f^*(x) \sin(m\bar{\omega}x)\,dx = \frac{2}{L}\int_0^L f^*(x)\sin(m\bar{\omega}x)\,dx$$

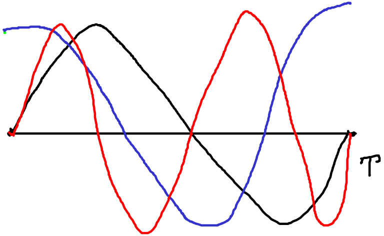
$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(m\bar{\omega}x)\,dx$$

DUNQUE

$$f \underset{L^2(0,L)}{=} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(m\bar{\omega}x)$$ dove i b_n sono

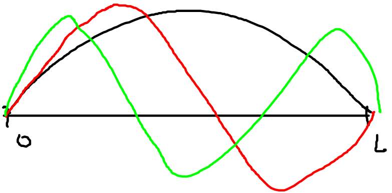
$\left(\text{cioè} \quad \int_0^L \left| f - \sum_{m=1}^{K} b_m \sin(m\bar{\omega}x)\right|^2 dx \longrightarrow 0 \ \text{se} \ K \to +\infty \right)$

· Attenzione non sono le stesse funzioni del caso periodico



$\sin(\omega t)$ $\cos(\omega t)$

$\sin(2\omega t)$



$\sin(\bar\omega t)$

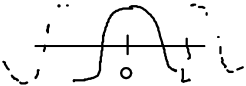
$\sin(2\bar\omega t) = \sin(\omega t)$

$\sin(3\bar\omega t)$

· In modo analogo posso sviluppare in $\cos(n\bar{\omega} t)$:

(1) Definisco $f^*(x)$ in modo che sia pari su $[-L, L]$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le L \\ f(-x) & -L \le x \le 0 \end{cases}$$



(2) Estendo f^* a una funzione $2L$-periodica

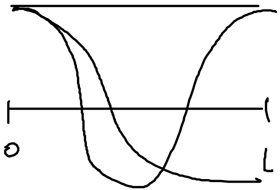
· Uso gli sviluppi relativi al caso $2L$-periodico $\Rightarrow$

$$f^*(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\bar{\omega} x) + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\bar{\omega} x)}_{= 0 \text{ dato che } f^* \text{ è PARI}}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \underset{L^2}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\bar{\omega} x)$$ dove (si vede)

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad ; \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\bar{\omega} x)\,dx$$

· Anche stavolta ho considerato funzioni DIVERSE da quelle del caso periodico



. . .

Anche nel caso degli sviluppi in soli seni / soli coseni c'è un legame tra sommabilità dei coefficienti e regolarità della funzione (caso che comprende anche le "proprietà agli estremi"). IN PARTICOLARE

· Teorema. Se $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty \Rightarrow$

$$f(x) \underset{\text{UNIF.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n \bar{\omega} x)$$

da cui $f(x)$ è continua, $f(0) = f(L) = 0$.

· Se $\sum_{n=1}^{\infty} n^k |b_n| < +\infty \Rightarrow$

f ha derivate fino all'ordine k, continue e si ha

$$f^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(L) = 0 \qquad j \text{ INTERO } 2j \leq k$$

$$0 = f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = f^{(iv)}(0) = f^{(iv)}(L) \ldots$$

IDEA DELLA DIM. L'ipotesi $\sum_{n=1}^{\infty} n^k |b_n| < +\infty \Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n^j |b_n| < +\infty$ se $j \leq k$ $\Rightarrow$ CONV. TOTALE DELLA serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n s_n^{(j)}$, dove $s_n(x) = \sin(n\bar{\omega}x)$

• Analogamente

Teorema • Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow$

$$f \underset{\text{UNIF}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x)$$

• Se, più in generale, $\sum_{n=0}^{\infty} n^K |a_n| < +\infty \Rightarrow f$ ha derivate fino all'ordine K continue, somma della corrispondente serie delle derivate.

Inoltre $f^{(2j+1)}(0) = f^{(2j+1)}(L) = 0$ se $2j+1 \leq K$

$$0 = f'(0) = f'(L) = f'''(0) = f'''(L) \;\ldots$$

Questi sviluppi sono utili nello studio di problemi di equazioni diff. LINEARI CON DATI AL CONTORNO del tipo $y(0) = y(L) = 0$ / $y'(0) = y'(L) = 0$

· Eq. diff. del II° ordine con dati agli estremi

(1) CONDIZIONI PERIODICHE ; dati $a, b, c \in \mathbb{C}$, dato T
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ T-periodico
voglio risolvere

$$(P_1)\quad \begin{cases} a y'' + b y' + c y = f \\ y \ - T \text{ periodica} \end{cases}$$

$\left(\text{oppure } y(0) = y(T)\ ,\ y'(0) = y'(T)\right)$

IDEA CERCO $y(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_m(t)$ $\left(e_n(t) = e^{in\omega t},\ \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$

Se y è fatto così, e se tutto va bene,

$$y'(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_n'(t) = \sum_{m-\infty}^{+\infty} c_n\, i m\omega\, e_n(t)$$

$$y''(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_n (im\omega)^2 e_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} -c_n\, m^2\omega^2 e_n(t)$$

· Supponiamo inoltre che f si possa sviluppare in serie di F.

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e_n$$

Scrivo l'equazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(-n^2\omega^2 a + in\omega b + c\right)}_{P(in\omega)} c_n e_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e_n(t)$$

$P(in\omega)$, se $P(z) = az^2 + bz + c$

Per far verificare l'equazione posso imporre

$$(*) \quad c_n P(in\omega) = \left(-n^2\omega^2 a + in\omega b + c\right) c_n = f_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Dalla condizione $(*)$ vorrei ricavare i c_n — mi si presenta un'alternativa

$$(1) \qquad P(in\omega) \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

· In questo caso ricavo:

$$c_n = \frac{f_n}{P(in\omega)} = \frac{f_n}{-a n^2\omega^2 + ibn\omega + c} \qquad \forall n$$

A questo punto "torno indietro" e vado a vedere se la y definita in questo modo, risolve effettivamente (P_1). — cioè se i passaggi fatti prima sono effettivamente corretti.

TUTTO DIPENDE DALLA SOMMABILITÀ DEGLI f_n (e quindi dalla regolarità di f)

SUPPONIAMO DI SAPERE $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n| < +\infty$ ($\Rightarrow f$ è CONTINUA)

$$\Rightarrow |n^2 c_n| \leq \text{cost} \cdot |f_n| \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n| < +\infty$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{n^2}{P(in\omega)}} \cdot f_n$$

è limitato

DUNQUE SOTTO QUESTA IPOTESI su f:

y È CONTINUA, DERIVABILE DUE VOLTE

e T-PERIODICA, e le derivate I$^\circ$ e II$^\circ$ di

y sono poi alle rispettive serie delle derivate

$\Rightarrow$ posso fare i passaggi che ho fatto $\Rightarrow$

y risolve il problema (P_T)

[In sostanza cercando la sol. con $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n(t)$

abbiamo trasformato il problema in un problema "algebrico"

sui c_n – Si capisce anche che "meglio è f" $\leadsto$

più sommabili sono gli f_n, tanto meglio è y

(basta guardare la formula $c_n = \dfrac{f_n}{P(in\omega)}$)]

(2) Cosa succede se qualche $P(im\omega)=0$ — secondo caso dell'alternativa). Dato che $P(z)$ è un polinomio di grado 2, $P(z)$ ha, al più, due radici. Quindi ci possono essere al massimo due interi k_1 e k_2 tali che $P(ik_1\omega)=0$, $P(ik_2\omega)=0$ (RICORDO CHE $a, b, c \in \mathbb{C}$). In ogni caso — guardando la condizione $(*)$, si ricava

$$f_{k_1}=0 \qquad \left(f_{k_2}=0 \right)$$

$$(*) \qquad c_n P(in\omega) = f_n$$

$\Rightarrow$ CONDIZIONE DI COMPATIBILITÀ: se un intero k rende nullo $P(ik\omega) \Rightarrow f_k$ DEVE ESSERE 0

· ALTRIMENTI NON ESISTE SOLUZIONE. Se poi $f_k = 0$

POSSO SCEGLIERE c_k COME MI PARE.

DUNQUE NEL CASO (2)

- non sempre (P_+) è risolubile (dipende da f)
- se è (P_+) è risolubile NON C'È sol UNICA.

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 1 \\ y \ 2\pi - \text{periodica} \end{cases}$$

Cerco $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$, facendo i conti di prima

$$(-n^2 + 2in + 2) c_n = f_n \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$