Complementi di Matematica
Diciottesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

12 novembre 2009

· Versione reale della serie di Fourier:

Fin'ora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T periodica $\Rightarrow f \underset{L^2}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t}$

dove $c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega m \tau} d\tau$

Supponiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora $c_{-m} = \overline{c_m}$, infatti

$$c_{-m} = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{i\omega m \tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) \overline{e^{-i\omega m \tau}} d\tau = \overline{\frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega m \tau} d\tau}$$

$$= \overline{c_m}$$

perché $f(\tau) = \overline{f(\tau)}$

Ne segue che, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\omega t} = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{im\omega t} + \sum_{m=-1}^{-\infty} c_n e^{in\omega t} =$$

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{im\omega t} + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-im\omega t} = (\text{per quanto sopra}) =$$

$$c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_n e^{im\omega t} + \overline{c_n e^{im\omega t}} = c_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{Re}(c_n e^{im\omega t})$$

(tutto reale)

Allora supponiamo $c_n = \alpha_n - i\beta_n \Rightarrow \beta_0 = 0$ e

$$\Re\left(c_n e^{in\omega t}\right) = \Re(\alpha_n - i\beta_n)\left(\cos(n\omega t) + i\sin(n\omega t)\right) =$$

$$\alpha_n \cos(\omega n t) + \beta_n \sin(n\omega t) \Rightarrow$$

$$f(t) \underset{(L^2)}{=} \alpha_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega t) + \beta_n \sin(n\omega t) =$$

$$\boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)}$$

dove $a_0 = c_0 = \underline{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,d\tau}$ (è medio di f)

mentre se $n \geq 1$

$$a_n = 2\Re(c_n) = \frac{2}{T}\Re\int_0^T f(t)e^{-i\omega n t} = \underline{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt}$$

$$b_n = -2\Im(c_n) = -\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(-n\omega t) = \underline{\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt}$$

· Conseguenze

- f è reale $\Longleftrightarrow$ $c_{-n} = \overline{c_n}$ (il $\Leftarrow$ è meno ovvio)
- f è pari $\Longleftrightarrow$ $c_{-n} = c_n$ ($\Rightarrow$ facili $\Leftarrow$ un po' meno)
- f è dispari $\Longleftrightarrow$ $c_{-n} = -c_n$

per esempio f pari : $f(-t) = f(t) \Rightarrow$

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{in\omega t}\, dt = (s=-t,\ dt=-ds) = \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(-s)\, e^{-in\omega s}(-ds)$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(-s)\, e^{-in\omega s}\, ds = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\, e^{-in\omega s}\, ds = c_n$$

- f reale pari $\Longleftrightarrow$ c_n reali, $c_n = c_{-n}$ $\Longleftrightarrow$ $b_n = 0$
- f reale dispari $\Longleftrightarrow$ c_n imm. puri, $c_n = -c_{-n}$ $\Longleftrightarrow$ $a_n = 0$

Significato dei c_n visti in forma polare :

$$c_n = \rho_n \cdot e^{i\theta_n} \qquad \left[\begin{array}{l} \text{se } f \text{ è reale :} \\ \rho_{-n} = \rho_n \ ;\ \theta_{-n} = -\theta_n \end{array}\right]$$

$$\cdot\ f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n e^{i\theta_n} e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_n e^{i(n\omega t+\theta_n)} =$$

$$(\text{se } f \text{ è reale}) = \rho_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \left(e^{i(n\omega t+\theta_n)} + e^{-i(n\omega t+\theta_n)}\right) =$$

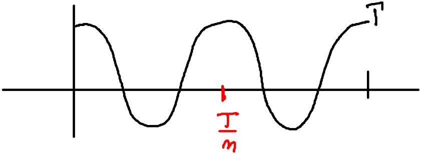
$$\rho_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \cos(n\omega t+\theta_n) = \underline{A_0 + \sum A_n \cos(n(\omega t+\varphi_n))}$$

dove $A_n = \begin{cases} \rho_0 & \text{se } n=0 \\ 2\rho_n & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$ è un AMPIEZZA,

$\varphi_n = \dfrac{\theta_n}{n}$ è uno SFASAMENTO / $T_n = \dfrac{\varphi_n}{\omega}$ "sfasamento temporale"

$c(t) = \cos(n\omega t)$

$c(t+\varphi) = \cos(n\omega(t+\varphi))$



Teorema Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty \Rightarrow$

(a) f è continua su $\mathbb{R}$ (e T-periodica)

(b) La serie di Fourier conv. unif. a f.

Dim. Basta la (b) e per questa basta la conv. totale: Dato che

$$\|c_n e_n\|_\infty = \max_{t\in\mathbb{R}} |c_n e^{in\omega t}| = |c_n| \quad , \text{ e so}$$

che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, ottengo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|c_n e_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow$ TESI

DUNQUE Se $c_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow f$ è CONTINUA

Teorema Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty \Rightarrow$

(a) f è C^1 su $\mathbb{R}$ (f e f' SONO T-PERIODICHE)

(b) le serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ e $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n'$ CONV. UNIF A f e f'

Dim. Basta dim. la (b) e per questa basta che le due serie siano totalmente convergenti. Per quanto riguarda la seconda abbiamo $(c_n e_n)'(t) = c_n i n\omega \, e^{in\omega t}$ $\Rightarrow$

$\| c_n e_n' \| = |c_n| n \omega$. Dunque da

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| n < +\infty$ OTTENGO $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \| c_n e_n' \|_\infty < +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n'$ è TOT. CONV. ($\Rightarrow$ è UNIF. CONV.)

Per quanto riguarda la serie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$ è chiaro che

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$ perché $|c_n| \le n|c_n|$ e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n| < +\infty$

e quindi ragiono come prima.

PIÙ IN GENERALE

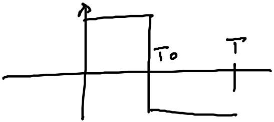
Se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k |c_n| < +\infty$ $\qquad k \geq 0$

$\Rightarrow$ f è di classe C^k (T periodico con tutte le derivate)

e $f^{(j)} \underset{\text{UNIF.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (in\omega)^j c_n e^{in\omega t}$ $\qquad j = 0, \dots, k$

ALCUNI ESEMPI

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq T_0 \\ -1 & \text{se } T_0 \leq t \leq T \end{cases}$$



Versione complessa $\quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt =$

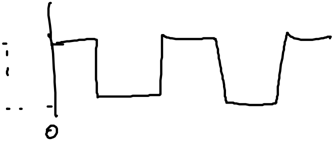
$$\frac{1}{T} \int_0^{T_0} e^{-in\omega t} dt - \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T} e^{-in\omega t} dt = \qquad (\text{se } n \neq 0)$$

$$\frac{1}{T}\left[\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_0^{T_0} - \frac{1}{T}\left[\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_{T_0}^{T} =$$

$$\frac{i}{T\omega n}\left\{e^{-in\omega T_0} - 1 - \underset{\parallel}{e^{-in\omega T}} + e^{-in\omega T_0}\right\} = \qquad (T\omega = 2\pi)$$

$$\frac{i}{2\pi n}\left\{-1 - e^{-2\pi n i} + 2e^{-in\omega T_0}\right\} = \frac{\left(e^{-in\omega T_0} - 1\right)i}{n\pi}$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\left(T_0 - (T - T_0)\right) = \frac{2T_0 - T}{T}$$, Per es $T_0 = \frac{T}{2}$



$e^{-in\pi}$ dato che $T_0\omega = \pi$

$$c_n = \frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\, i \quad ; \quad c_0 = 0$$

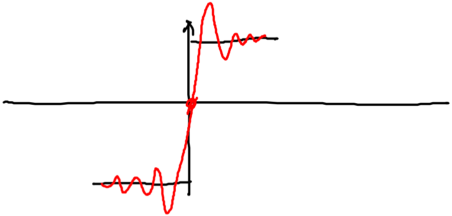
(c_n IMM. PURI $\Longleftrightarrow$ f DISPARI $\Longleftrightarrow$ $b_n = 0$)

VERSIONE REALE

$$f = \sum_{n=1} b_n \sin(n\omega t) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2\,\frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \sin(n\omega t) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)\pi} \sin((2k+1)\omega t)$$ (tutte armoniche dispari)

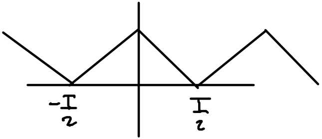
($c_n \simeq \frac{1}{n}$ torna con il fatto che f è discontinua)



vicino a zero l'approssimazione peggiora.

In zero la serie mi dà zero che è la media tra 1 e -1

Esempio



$$f(t) = \frac{T}{2} - |t| \quad \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \qquad (\text{e periodizzato con per. } T)$$

Oss. gli integrali usati per calcolare i coeff. si possono fare (invece che su $[0,T]$) su un qualunque $[T_0, T_0+T]$ – in questo conviene integrare su $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{T}{2} - |t|\right) e^{-in\omega t}\, dt$$

Integro per parti $\left(f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \\ -1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases} \right)$

$$T c_n = \underbrace{\left[\left(\frac{T}{2}-|t|\right)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_{-T/2}^{T/2}}_{=0} + \frac{1}{in\omega}\int_{-T/2}^{T/2} f'(t)\, e^{-in\omega t}\,dt =$$

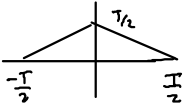
perché $\frac{T}{2}-|t|$ si annulla in $\pm\frac{T}{2}$

$$\frac{1}{in\omega}\left[(-1)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_{-T/2}^{0} + \frac{1}{in\omega}\left[\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_{0}^{T/2} =$$

$$\frac{1}{\omega^2 n^2}\left\{-1 + \underbrace{e^{-in\omega\frac{T}{2}}}_{(-1)^n} + \underbrace{e^{-in\omega\frac{T}{2}}}_{(-1)^n} - 1\right\} = \quad (\omega T = 2\pi)$$

$$= \frac{2}{\omega^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) \Longrightarrow c_n = \frac{2((-1)^n-1)}{T\omega^2 n^2}$$

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(\frac{T}{2}-|t|\right)dt = \frac{1}{T}\,\frac{T\cdot T/2}{2} = \frac{T}{4}$$



Versione reale $\quad b_n = 0$ (solo pari)

$$f(t) = \frac{T}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{4((-1)^n - 1)}{T\omega^2 n^2}}_{2c_n} \cos(n\omega t) =$$

$$\frac{T}{4} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{8}T}{\cancel{4}\pi^2 (2k+1)^2} \cos\big((2k+1)\omega t\big) =$$

$$\frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\big((2k+1)\omega t\big)$$

Se metto $t=0$ trovo $\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f(0)} = \frac{T}{4} - \frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$