Complementi di Matematica
Diciassettesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

10 novembre 2009

Avviso: cambio aula per le lezioni del giovedì

$\longrightarrow$ AULA S.I.5 (polo B)

Alcuni risultati riguardo la teoria dell'integrazione.

<u>Teorema</u> Ogni funzione integrabile si può approssimare, in norma integrale, mediante

(a) funzioni a scala

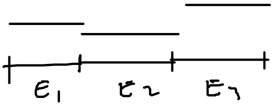
(b) funzioni C^∞.

Più precisamente dato $f \in L^1(\mathbb{R})$ (f integrabile)

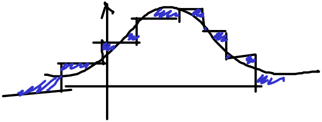
(a) esiste una successione (f_n) tale che:

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \qquad f_n(t) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k 1_{E_k}$$

essendo $\alpha_k \in \mathbb{R}$, E_k insiemi misurabili, $1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$



funzione a scala

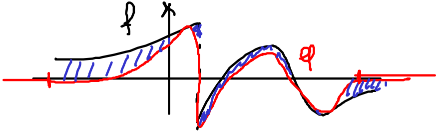


area della differenza $\xrightarrow{n\to\infty} 0$

(b) Data $f \in L^1(\mathbb{R})$ esiste (f_n) di funzioni tale che

$$f_n \xrightarrow{L^1} f \qquad f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,,\ \varphi \text{ infinitamente derivabile}, \ \varphi(x) = 0$$
$$\text{fuori da un intervallo} \}$$



sempre "area della differenza" $\to 0$

· **Conseguenze**

Una f ortogonale a C_0^∞ è necessariamente nulla

$\boxed{\text{Teorema}}$ (principio di eguaglianza debole)

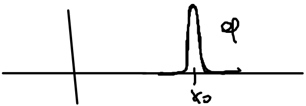
Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, e se

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty$$

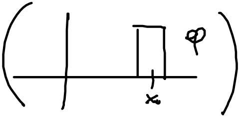
Allora $f = 0$ quasi ovunque.

(sul significato di $\int f\varphi$)

IDEA: Io non posso "MISURARE" $f(x_0)$, però posso misurare $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ per ogni φ. Per trovare $f(x_0)$ posso usare delle φ "concentrate in x_0"



"$\int f\varphi \to f(x_0)$" $\rightsquigarrow$

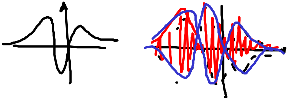


Dim (IDEA) Posso trovare una succ. φ_n di funzioni C_0^∞ tali che $\varphi_n \to f$.

Allora $\int_{\mathbb{R}} f \varphi_n = 0 \overset{(\dots)}{\Longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f^2 = 0$

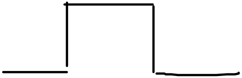
$\Rightarrow f^2 = 0$ q.o. $\Rightarrow f = 0$ q.o.

Lemma di Riemann

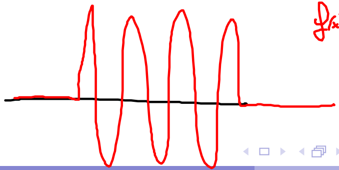


Se $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(nx)\, dx = 0$$

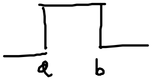


f



$f(x)\sin(nx)$

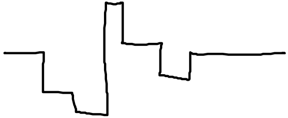
· IDEA DI DIM. (1) Se $f = 1_{[a,b]}$



si fa il calcolo $\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(nx) = \int_a^b \sin(nx)\,dx =$

$$\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_a^b = \frac{\cos(nb)-\cos(na)}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{se } n \to \infty$$

(2) se f è una funzione a scala $\Rightarrow$ segue dal caso 1



(3) Nel caso generale, dato $f \in L^1$ la approssimo con funzioni a scala e vedo che la proprietà si trasferisce su f. (lasciamo stare i dettagli – è una questione di scambio di limiti)

· Torniamo alle serie di Fourier. Abbiamo definito

$$f_K(t) = \sum_{m=-k}^{K} c_m e^{imωt} \quad \text{dove} \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T f(τ) e^{-iωmτ} dτ$$

$$\Rightarrow \quad f_K(t) = \sum_{m=-k}^{K} \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(τ) e^{-iωmτ} dτ \right) e^{iωmt} =$$

$$\int_0^T \underbrace{\left(\frac{1}{T} \sum_{m=-k}^{K} e^{iωm(t-τ)} \right)}_{D_K(t-τ)} f(τ)\,dτ = \underline{\int_0^T D_K(t-τ) f(τ)\,dτ}$$

$$\boxed{D_K(x) = \frac{1}{T} \sum_{m=-K}^{K} e^{iωmx}}$$ (NUCLEO DI DIRICHELET)

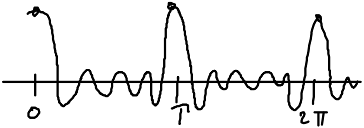
Alcune proprietà di D_K :

- D_K è T-periodico
- $\int_0^T D_K(x)\,dx = 1 \quad \Leftarrow \quad \int_0^T e^{i\omega kx}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq 0 \\ T & \text{se } k = 0 \end{cases}$
- $$T\,D_K(x) = \sum_{m=-k}^{k} \left(e^{i\omega x}\right)^m = e^{-i\omega kx} \sum_{m=0}^{2k} \left(e^{i\omega x}\right)^m =$$

$$e^{-i\omega kx}\,\frac{\left(e^{i\omega x}\right)^{2k+1} - 1}{e^{i\omega x} - 1} =$$

$$\frac{\cancel{e^{-i\omega kx}}\,\cancel{e^{i\omega x(k+\frac{1}{2})}}\left(e^{i\omega x(k+\frac{1}{2})} - e^{-i\omega x(k+\frac{1}{2})}\right)}{\cancel{e^{i\frac{\omega}{2}x}}\left(e^{i\frac{\omega}{2}x} - e^{-i\frac{\omega}{2}x}\right)} = \frac{\sin\left(\omega x\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}x\right)}$$

$$\Rightarrow \quad D_K(x) = \frac{1}{T}\,\frac{\sin\left(\omega\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}x\right)}$$



$$\left(D_K(0) = \frac{2k+1}{T}\right)$$

Vediamo per esempio la convergenza di $f_K(t)$ a $f(t)$ se f è di classe C^1

<u>Dim</u> Si faccia $f(t)-f_K(t) = f(t) - \int_0^T f(\tau)\, D_K(t-\tau)\,d\tau$

Dato che $\int_0^T D_K(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_0^T D_K(t-\tau)\,d\tau = 1 \quad \forall t$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \int_0^T f(t)\, D_K(t-\tau)\,d\tau$$ e quindi

$$f(t)-f_K(t) = \int_0^T \big(f(t)-f(\tau)\big)\, D_K(t-\tau)\,d\tau =$$

$$\int_0^T \underbrace{\boxed{\frac{f(t)-f(\tau)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}(t-\tau)\right)}}} \cdot \sin\left(\omega\left(K+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)\right) d\tau =$$

(il numeratore compensa il denominatore)

IN GENERALE È BRUTTA — SE f è C^1 QUESTA ESPRESSIONE È CONTINUA
$(x\ \tau \to t)$

$$\longrightarrow \int g(\tau) \sin\left(\omega\left(K+\frac{1}{2}\right)(t-\tau)\right) d\tau \xrightarrow{\text{con } g \text{ continua}} 0$$ (Lemma di Riemann)

· Si capisce dunque che per la conv. puntuale in t ci vuole una regolarità di $\dfrac{f(\tau)-f(t)}{\tau-t}$

(basterebbe meno di $f \in C^1$, ma ...)

<u>NOTA</u> se f è C^1 si ha anche

$$\left| f_k(t) - f(t) \right| \le \int \underbrace{\left| \frac{f(\tau)-f(t)}{\sin(\_\_)} \right|}_{\le \text{ costante}} \underbrace{\sin\left(\frac{k+1/2 \cdots}{}\right)}_{\text{minore di } 1} \le$$

COSTANTE

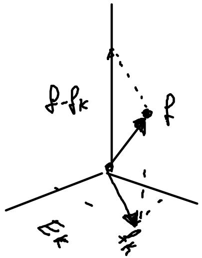
$$\Rightarrow \quad \left| f_k(t) \right| \le \text{ costante indipendente da } k$$

· Torniamo al problema in L^2 — avevamo visto che

$$\|f_K - f\|_2^2 = \|f\|^2 - \frac{1}{\pi}\sum_{n=-K}^{K} |c_n|^2$$

VOLEVAMO CAPIRE SE $\|f_K - f\|_2 \to 0$

(cioè se $f_K \xrightarrow{L^2} f$).



(1) Le f_K CONVERGONO A QUALCOSA (IN L^2). Cioè $\exists\, g \in L^2_\pi$ tale che

$\|f_K - g\|_2 \to 0$.

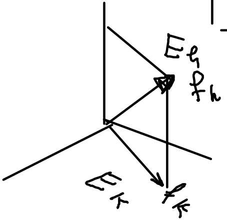
Questo è conseguenza del fatto che L^2 <u>È COMPLETO</u> (si può dim.) e del fatto che $\{f_K\}$ ha la proprietà di Cauchy, come si vede →

· $k \le h$

$$\boxed{\|f_h - f_k\|^2 = \|f_h\|^2 - \|f_k\|^2}$$

$(E_k \subset E_h)$

$(\|f_h\|^2 = \|f_k\|^2 + \|f_h - f_k\|^2)$



(si rifanno gli stessi calcoli con f_h al posto di f)

Ma $\|f_h\|^2 = \sum_{m=-h}^{h} |c_m|^2$, $\|f_k\|^2 = \sum_{m=-k}^{k} |c_n|^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\|f_h - f_k\|^2} = \sum_{m=k+1}^{h} |c_m|^2 + \sum_{m=-h}^{-k-1} |c_m|$$

Dato che $\sum_{m=0}^{\infty} |c_n|^2 \le \|f\|^2 \Rightarrow \sum_{m=k}^{+\infty} |c_n|$ PICCOLA A PIACERE PER K GRANDE

(e stesso per l'altro pezzo)

· Ne segue che, dato $\varepsilon > 0$ arbitrario, trovo $\overline{k}$ tale che

$$\sum_{n \geq \overline{k}} |c_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2} \qquad \sum_{n \leq -\overline{k}} |c_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \| f_h - f_k \|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{se } h, k \geq \overline{k}$$

$\Rightarrow$ PROP DI CAUCHY

Quindi $f_k \longrightarrow g \in L^2_T$

MI MANCA $g = f$ (la base $e^{in\omega t}$ è "SUFFICIENTE" A GENERARE TUTTO)

(2) $f - g$ ORTOGONALE A OGNI E_h $\longmapsto$

basta dire $\int (f - g)\overline{e_h} = 0 \quad \forall h$

INFATTI $\langle f - g, e_h \rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle f - f_k, e_h \rangle$ (per la CONVERGENZA $f_k \xrightarrow{L^2} g$)

$\cdot \quad = 0$ se $k \geq h$ $\left(\Rightarrow e_h \in E_k \text{ e } f - f_k \perp E_k \right)$

$\Rightarrow \langle f - g, e_h \rangle = 0 \quad \Rightarrow \boxed{f - g \perp E_k \quad \forall k}$

(3) FINALMENTE $f - g = 0$. Prendo

$\varphi \in C_0^\infty([0,T])$

$$\int_0^T \left(f(t) - g(t)\right) \overline{\varphi(t)}\, dt = \ ?$$

Posso prendere φ_k (l'approssimante di φ) $\Rightarrow$

$$\int_0^T \left(f(t) - g(t)\right) \overline{\varphi_k}\, dt = 0 \qquad (\text{per il punto } 2)$$

Ma, essendo φ C^1, so che $\varphi_k(t) \to \varphi(t)$ puntualmente

e so anche che $|\varphi_k(t)| \leq M \quad \Longrightarrow$

$$\left| \big(f(t) - g(t)\big)\varphi_k(t) \right| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Funzione integrabile fissa}}}{M\big(f(t) - g(t)\big)}$$

$\Rightarrow$ applicando il teorema di Lebesgue

$$\int_0^T \big(f(t) - g(t)\big)\varphi(t) = 0 \qquad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty$$

per il criterio di EGUAGLIANZA DEBOLE $\Rightarrow f = g$ quasi ovunque $\Rightarrow$ OK

· DUNQUE

Teorema Se $f \in L^2_T$ si ha che

(a) $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \|f\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

(b) $$f_k \xrightarrow{L^2} f \iff \|f_k - f\|_2 \to 0 \iff \int_0^T (f_k(t) - f(t))^2 dt \to 0$$

(a) ← Eguaglianza di Parseval.

(b) lo esprimo scrivendo

$$f(t) \underset{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega n t}$$

VALE ANCHE UN "VICERSA"

· <u>Teorema</u> Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una succ. di numeri complessi tale che $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$. Poniamo

$$g_k = \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n .$$

Allora

(a) g_k ammette limite g in L^2_T.

(b) $\forall k$ $c_k = \frac{1}{T} \langle g, e_k \rangle$ e $\|g\|^2 = \frac{1}{T} \sum |c_k|^2$

(La dim. è stata fatta "tra le righe" nel corso precedente — (a) $\Leftarrow$ COMPLETEZZA DI L^2 e dal fatto che $\{g_k\}$ è di Cauchy)

ABBIAMO INDIVIDUATO UNA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA

$$f \text{ tale che } \int_0^T |f|^2 \, dx < +\infty \quad \longleftrightarrow \quad \{c_k\} \text{ con } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 < +\infty$$

Vedremo come questa corrispondenza "trasforma" problemi differenziali in "problemi algebrici"

Supponiamo che f sia derivabile (FACCIO DEI CALCOLI "EURISTICI")

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n(t)$$

$$\left(\frac{d}{dt} e^{i\omega n t} = i\omega n\, e^{i\omega n t} \right)$$

$$f'(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n'(t) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{i\omega n c_n} e_n(t)$$

$\rightsquigarrow$ I COEFF. DI f' SONO "MENO SOMMABILI"

In effetti ci vorranno delle ipotesi per poter scambiare derivata e integrale

$\leftrightsquigarrow$ $\boxed{\text{LA REGOLARITÀ DI } f \text{ È LEGATA ALLA SOMMABILITÀ DEI } c_n}$

$$x^2 y'' + y' + y = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} x^2 y'' + x y' + y = 0 \\ x^2 y'' + y' + x y = 0 \end{array} \right)$$

MI CHIEDO ~~se~~ $\exists$ sol. $y(x)$ def. su tutto $\mathbb{R}$ (che sia sviluppabile in serie di potenze)

La cosa è interessante perché, a causa di $x^2 y''$, il problema non si può mettere in forma normale su $\mathbb{R}$.

Se cerco $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) x^n \right)$$

$$\Longrightarrow$$

$$x^2 y'' + y' + y =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} n=0 & a_1 + a_0 = 0 \\ n=1 & a_2 \cdot 2 + a_1 = 0 \\ n \geq 2 & a_n\, n(n-1) + a_{n+1}(n+1) + a_n = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a_1 = -a_0 \ , \quad a_2 = -\frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$a_{n+1} = -a_n \frac{\left[n^2 - n + 1 \right]}{n+1} \qquad \text{se } n \geq 2$$

- Dato a_0 tutto il resto è determinato $\left(\underline{a_0 = y(0)}\right)$
- PROBLEMA: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è convergente ??

dipende da come "cresce" a_n — uso il criterio del rapporto

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2-n+1}{n+1} \to +\infty \implies \underline{\underline{R=0}}$$

$\Downarrow$ NON C'È SOLUZIONE TRANNE CHE $a_0 = 0$

$$x^2 y'' - y' + x y = 0$$

COME PRIMA CERCO $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad , \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$x^2 y'' - y' + x y = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$n=0 \qquad a_1 = 0$

$n=1 \qquad -a_2 \cdot 2 + a_0 = 0 \qquad a_2 = \frac{a_0}{2}$

$n \geq 2 \qquad a_{n+1} = \frac{n(n-1) a_n + a_{n-1}}{n+1}$

(sembra brutto a causa di $\frac{n(n-1)}{n+1} \to +\infty$)

Lasciamo perdere perché è complicato —

$$(x^2-1)\,y'' + x^2 y = 0 \qquad \text{PROVARE} \ldots$$

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}}$$

- CONV. PUNTUALE

$$\text{se } n \to +\infty \qquad e^{nx} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

$$f_n(x) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } x>0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

- DUNQUE NON PUÒ CONV. UNIF. SU $\mathbb{R}$
- POTREBBE CONV. UNIFORMEMENTE SU $[a, +\infty[$ e su $]-\infty, -a]$ (da vedere)
- Vediamo cosa fa la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$
  - Conv. puntuale (per quali x è definita $S(x)$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}}$$

$x>0$ $\qquad \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}} \leq \frac{e^{nx}}{e^{2nx}} = e^{-nx}$ $\qquad$ CONVERGE

$x<0$ $\qquad \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}} \leq \frac{e^{nx}}{2}$ $\qquad$ CONVERGE

DUNQUE $S(x)$ è definita per $x \neq 0$

· DOMANDA $S(x)$ è CONTINUA ?

· PROVO A FARE LA CONV. TOTALE SU $[a,+\infty[$ / $]-\infty,-a]$, avendo prefissato $a>0$.

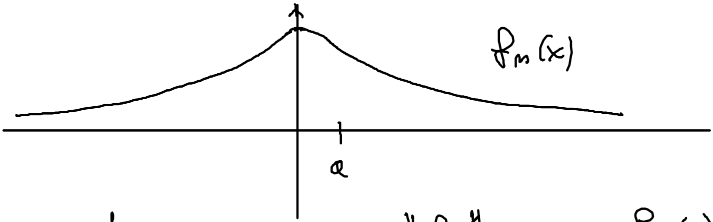
Studiamo $f_n(x)$ $(n \geq 1)$

$f_n(0) = 1$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$, $\lim_{x \to -\infty} f_n(x) \to$

$$f_n'(x) = \frac{n e^{nx}(1+e^{2nx}) - e^{nx}\, 2n\, e^{2nx}}{(1+e^{2nx})^2} =$$

$$\frac{1-e^{2nx}}{(1+e^{2nx})^2}\, n e^{nx} = 0 \iff 2nx = 0$$

$f_n'(x) < 0$ se $x>0$, $f_n'(x) > 0$ se $x<0$



$\|f_n\|_\infty = 1$ $\qquad$ ma $\|f_n\|_{[a,+\infty[} = f_n(a)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{[a,+\infty[} < +\infty \Rightarrow S(x)$ continua

Si vede che $\lim_{x \to 0} S(x) = +\infty$!

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=0}^{[\frac{1}{x}]} \frac{e^{nx}}{1+e^{2nx}} \geq$$

LA SOMMA COMINCIA DA $n=0$

$$n x \leq 1 \qquad \sum_{n=0}^{[\frac{1}{x}]} \frac{1}{1+e^2} = \frac{1}{1+e^2}\left(\left[\frac{1}{x}\right]+1\right) \geq$$

$$\phi \qquad \frac{1}{1+e^2}\,\frac{1}{x} \to +\infty$$

QUINDI $S(x)$ DIVERGE PER $x \to 0$