Complementi di Matematica
Sedicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

9 novembre 2009

· Serie di Fourier

$T > 0$ (periodo) $\qquad \omega := \frac{2\pi}{T}$ (frequenza angolare)

Problema: sviluppare una funzione T-periodica rispetto a "una base" di funzioni T-periodiche "standard": $\sin(\omega t)$ / $\cos(\omega t)$

1) Conviene affrontare il problema nei complessi ($\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}}$): la "base" sarà data dalle funzioni:

$$e_m(t) = e^{i\omega m t}$$

Cercheremo di scrivere $f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e_m(t)$ (← IN CHE SENSO ? LA SERIE CONV. A f)

dove $c_m \in \mathbb{C}$.

· **Def.** $L^2_T := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodiche, con $|f|^2$ int. su $[0,T] \}$

con la norma $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 dt}$,

(dove le funzioni sono pensate a "meno di quasi-ovunque")

e prodotto scalare $\langle f , g \rangle = \int_0^T f(t) \overline{g}(t) dt$.

(simile a $L^2([0,T])$)

Veniamo al problema di sviluppare f come $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n(t)$

1 Notiamo che:

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^T e_n(t)\,\overline{e_m(t)}\,dt =$$

$$\int_0^T e^{i\omega n t}\, e^{-i\omega m t}\,dt = \int_0^T e^{i\omega(n-m)t}\,dt =$$

se $n \neq m$ $\left[\dfrac{e^{i\omega(n-m)t}}{i\omega(n-m)} \right]_0^T = 0$ perché $t \mapsto e^{i\omega k t}$

è T-periodica se $k \in \mathbb{Z}$. Mentre se $n = m$

$$\langle e_n, e_n \rangle = \|e_n\|_2^2 = \int_0^T 1\,dt = T$$

- Possiamo dire che le funzioni e_n $\left(e_n(t) = e^{i\omega n t}\right)$ sono ORTOGONALI e DI NORMA $\sqrt{T}$

$$\boxed{\langle e_n, e_m \rangle = T\, \delta_{n,m}} \qquad (\delta_{n,m} = 0 \text{ se } n \neq m,\ 1 \text{ se } n = m)$$

- Cosa possono essere i c_n ? . Facciamo un "discorso euristico"

Se $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ (in qualche senso) − Fissiamo k e facciamo

$$\langle f, e_k \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n, e_k \right\rangle \overset{(\text{fidandoci!})}{=}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle c_n e_n, e_k \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot T\, \delta_{n,k} = c_k T$$ DUNQUE

· Dunque è ragionevole ritenere che

(*) $$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\langle f, e_k\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-i\omega k t}\, dt}$$

(nota che i c_k sono ben definiti se f è integrabile su $[0,T]$).

Tutto questo suggerisce di definire

$$f_K(t) = \sum_{n=-K}^{K} c_n e_n(t) = \sum_{n=-K}^{K} \frac{1}{T}\left(\int_0^T f(s)\, e^{-i\omega n s}\, ds\right) e^{i n \omega t}$$

(polinomio di Fourier di ordine K, associato a f)

(nota che f_K è C^∞)

IL PROBLEMA DIVENTA: è vero che $f_K \to f$ —

IN CHE SENSO? (

La risposta dipenderà da "quanto è buona" la f — se f è discontinua non si può pretendere la conv. uniforme.

Alcune risposte

Teorema Se f è regolare a tratti, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$

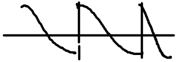
$$f_k(t) \xrightarrow{k \to +\infty} \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \quad \left(= f(t) \text{ se } f \text{ continua in } t \right)$$

Dove "regolare a tratti" vuol dire che esistono

$$0 \leq t_0 < t_1 < t_2 \cdots \leq t_r \leq T$$

per cui f è C^1 su ogni $]t_j, t_{j+1}[$ e la derivata è limitata su ognuno di questi intervalli

$\Rightarrow$ per ogni t_j esistono $f(t_j^+) = \lim_{t \to t_j^+} f(t)$; $f(t_j^-) = \lim_{t \to t_j^-} f(t)$



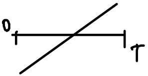
(+ replica su ogni intervallo $[MT, (M+1)T]$)

Commento Per avere la conv. puntuale serve la derivabilità di f — tranne un numero finito di punti.

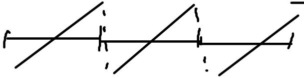
Tale ipotesi si potrebbe indebolire, MA non basta la sola continuità. C'è un Teorema in cui si dimostra che esistono f continue per cui $f_k(t) \not\to f(t)$ in nessun t.

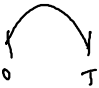
Teorema Se f è C^1 su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f_k \xrightarrow{\text{UNIF}} f$.

NOTA quando dico f continua / C^1, mi riferisco a f su $\mathbb{R}$

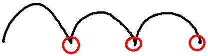


è discontinua





NON È C^1



- Questi discorsi evidenziano che la conv. unif / conv. punt. non sembrano essere la nozione giusta per studiare queste serie.
- Per gli scopi che abbiamo in mente ci servono dei "Teoremi reversibili"
- Cerchiamo di recuperare l'intuizione geometrica di "sviluppare f rispetto alla base "ortonormale" $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

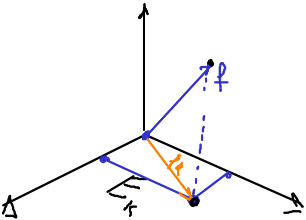
COSA RAPPRESENTA f_k in questi termini

Def. • Chiamo polinomio trigonometrico di ordine K una qualunque espressione del tipo $g(t)=\sum_{m=-k}^{k} \gamma_m e_m(t)$, con $\gamma_j \in \mathbb{C}$.

• Chiamo $E_k = \{$ polinomi trig di ordine $K \,|$

$E_k \subset L^2_T$, E_k ha dimensione $2k+1$

$(\text{se } g(t)=0 \Rightarrow \gamma_j = 0 \text{ per } j=-k \dots k)$



L^2_T

f_k è la proiezione ortogonale di f su E_k

il tutto visto rispetto al prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_0^T f\bar{g}$

· In effetti (a) $\langle f - f_K, g \rangle = 0 \quad \forall\, g \in E_K$

(b) $f_K \in E_K$

<u>DIM.</u> (b) è ovvia

(a) Bisogna fare i conti. $g = \sum_{n=-K}^{K} \gamma_n e_n$, $f_K = \sum_{j=-K}^{K} c_j e_j$

$$\langle f - f_K, g \rangle = \left\langle f - \sum_{j=-K}^{K} c_j e_j , \sum_{n=-K}^{K} \gamma_n e_n \right\rangle =$$

$$\sum_{n=-K}^{K} \langle f, \gamma_n e_n \rangle - \sum_{j=-K}^{K} \sum_{n=-K}^{K} \langle c_j e_j, \gamma_n e_n \rangle =$$

$$\sum_{n=-K}^{K} \overline{\gamma_n} \langle f, e_n \rangle - \sum_{j,n=-K}^{K} c_j \overline{\gamma_n}\, T\, \delta_{jn} =$$

$$\sum_{n=-K}^{K} \overline{\gamma_n} \langle f, e_n \rangle - \sum_{n=-K}^{K} \underbrace{c_n}_{=\frac{1}{T}\langle f, e_n \rangle} \overline{\gamma_n}\, T = 0$$

· (c) f_k è l'elemento di E_k che ha minima distanza (nel senso L^2) da f:

$$\mathrm{dist}(f,g) = \left(\int_0^T |f-g|^2\right)^{1/2}$$

Dim. Valutiamo (sottintendo che $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$), $g \in E_k$.

$$\|f-g\|^2 = \|(f-f_k)+(f_k-g)\|^2 =$$

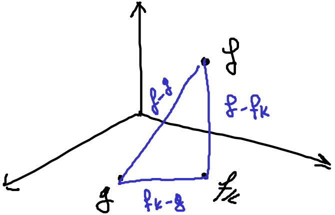
$$\langle (f-f_k)+(f_k-g), (f-f_k)+(f_k-g)\rangle =$$

$$\langle f-f_k, f-f_k\rangle + \langle f-f_k, \underbrace{f_k-g}_{\in E_k}\rangle +$$

$$\underbrace{\langle f_k-g, f-f_k\rangle}_{=0} + \langle f_k-g, f_k-g\rangle$$

Dunque dato g in E_k

$$(*) \quad \|f-g\|^2 = \|f-f_k\|^2 + \|f_k - g\|^2$$



Allora $\|f-g\|^2 \geq \|f-f_k\|^2 \quad \forall g$

e vale = esattamente se $g = f_k$

(f_k è l'elemento di minima distanza)

(d) $\|f - f_k\|^2 = \|f\|^2 - \|f_k\|^2 = \|f\|^2 - T\sum_{n=-k}^{k}|c_n|^2$

Dim. La prima eguaglianza viene mettendo $g=0$.

$$\|f_k\|^2 = \langle f_k, f_k\rangle = \left\langle \sum_{n=-k}^{k} c_n e_n , \sum_{j=-k}^{k} c_j e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{j,n=-k}^{k} c_n \bar{c}_j \underbrace{\langle e_n, e_j\rangle}_{T\delta_{nj}} = T\sum_{n=-k}^{k} c_n \bar{c}_n = T\sum_{n=-k}^{k}|c_n|^2$$

IN PARTICOLARE

$$\|f\|^2 - T\sum_{n=-k}^{k}|c_n|^2 \geq 0 \iff \sum_{n=-k}^{k}|c_n|^2 \leq \frac{1}{T}\|f\|^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{T}} \quad \text{(dis. di Parseval)}$$

· Anzi si ha

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |c_m|^2 = \frac{\|f\|^2}{T} \quad \text{se e solo se} \quad f_K \xrightarrow{L^2} f$$

$$\left(\text{se e solo se } \|f_K - f\|_2 \to 0\right)$$

$$\left(\text{ricordiamo che } \|f\|_2^2 = \int_0^T |f(t)|^2\,dt\right.$$

$\iff$ le f_K tendono a f "in energia" (in L^2) se e solo se $\sum c_K^2 = \frac{1}{T}\int_0^T f^2\,dt$

VEDREMO CHE EFFETTIVAMENTE VALE $= \iff f_K \xrightarrow{L^2} f$