Complementi di Matematica
Quindicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

5 novembre 2009

· Ancora sull'integrazione secondo $\mathcal{L}$.

- <u>Teorema</u> • Se f è integrabile secondo Riemann $\Rightarrow$ f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono

• Se f è assolutamente integrabile in senso improprio $\Rightarrow$ f è integrabile secondo Lebesgue e gli integrali coincidono

<u>Nota</u> f è int. secondo $\mathcal{L}$. $\Longleftrightarrow$ $|f|$ è int. secondo $\mathcal{L}$.

Allora se f è int. in senso improprio, ma non è assolutamente integrabile, $\Rightarrow$ f <u>non</u> è Lebesgue integrabile

Per es. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ <u>NON</u> è $\mathcal{L}$. integrabile (su $[0, +\infty[$)

Ricordo che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{\sin(x)}{x}\, dx \quad \left(= \frac{\pi}{2}\right)$,

peraltro si sa che $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^+ dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^- dx = +\infty$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\sin(x)}{x}$ NON È $\mathcal{L}$. INT.

$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$

Teorema (Tonelli) Supponiamo f MISURABILE e $f(x,y) \geq 0$. Allora

(a) Per quasi ogni x in $\mathbb{R}^N$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è misurabile su $\mathbb{R}^M$

(b) La funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$, definita a piacere nelle x in cui non vale (a), è misurabile.

(c) Vale la formula

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(in tutto quanto sopra è ammesso il valore $+\infty$!!)

In particolare se f è misurabile e ≥ 0 si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^M} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x,y)\,dx \right) dy$$

. Abbiamo usato la nozione di "quasi ovunque":

<u>Convenzione</u> Diciamo che una proprietà $P(x)$ vale quasi ovunque, o per quasi ogni x, se

$$m\left(\{x : P(x) \text{ è falso}\}\right) = 0$$

cioè se $P(x)$ vale per tutte le x eccetto quelle di insieme trascurabile

<u>Teorema</u> (Fubini) Supponiamo che $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to [-\infty, +\infty]$ sia INTEGRABILE (cioè che $|f|$ sia integrabile). Allora

(a) Per quasi ogni x in $\mathbb{R}^N$ la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^M$

(b) La funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy$, definita a piacere nelle x in cui non vale (a), è integrabile.

(c) Vale la formula

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^M} f(x,y)\,dy \right) dx \quad (\in \mathbb{R})$$

· Se $D = \{x^2+y^2 \le 1\}$

$$\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)} \, dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{(x^2+y^2)} \, dy \right) dx =$$

$y = tx \qquad dy = x\,dt$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \frac{x\,dt}{(x^2+t^2x^2)} \right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2} \int_{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \frac{dt}{(1+t^2)} =$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \, 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - 1 \right) dx = +\infty$$

dato che in $x = 0$ $\quad 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2}} - 1 \right) \longrightarrow \pi$

e $\frac{1}{x}$ NON È INTEGRABILE

$y = tx \quad dy = x\,dt$

- Se aggiungo $\alpha > 0$

$$\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{x}{x^{2\alpha}} \underbrace{\int_{-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}^{\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}}_{g(x)}\,dx$$

anche se non lo calcolo posso farmi un'idea di cosa fa (finito o infinito) È chiaro che $g(x)$ è definito ed è continuo x $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$.

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha} > 0 \text{ finito se } \alpha > 1 \,/\, \text{infinito se } \alpha \leq \frac{1}{2}$$

Allora se $\alpha > \frac{1}{2}$ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{x^{2\alpha-1}}\,dx$ finito se

$$2\alpha - 1 < 1 \iff \boxed{\alpha < 1}$$

{ Se invece $\alpha \leq \frac{1}{2}$ la cosa diventa più complicata
(dovrebbe comunque essere integrabile) ??

(vedi dopo con le coordinate polari)

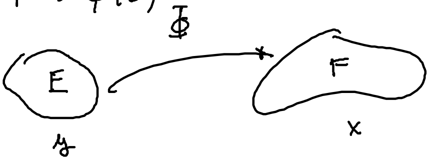
Teorema (cambio di variabile)

$f : E \to [-\infty, +\infty]$ $\qquad E \subset \mathbb{R}^N$

f integrabile su E

$\phi : E \to \mathbb{R}^N$ $\qquad \phi$ di classe C^1 (tutte le derivate esistono continue)

ϕ iniettiva. $\qquad F := \phi(E)$



Allora

$$\int_E f(\phi(y))\,|\det J_\phi(y)|\,dy = \int_F f(x)\,dx$$

Ricordiamo che $J_\phi = \left\{ \dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j}$ (matrice Jacobiana)

· Per esempio (coordinate polari in $\mathbb{R}^2$)

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\theta) \\ \rho\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \Phi_1 \\ \leftarrow \Phi_2 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} = \cos(\theta) \qquad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = -\rho\sin(\theta)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} = \sin(\theta) \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = \rho\cos(\theta)$$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & , -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & , \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \longrightarrow |\det J_\Phi| = |\rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta)| = \rho$$

Dunque:

$$\int_E f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, dt = \int_{\Phi(E)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Formula utile se $\Phi(E)$ è radiale e f pure...

Per esempio

$$\int_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \int_{\{(\rho,\theta)\,:\,0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\rho\le 1\}} \frac{1}{\rho^{2\alpha}}\cdot\rho\ d\rho\,d\theta = (*)$$

per la verità ϕ non è iniettiva ($(0,\theta)\to 0\ \forall\theta$, e pure $\phi(\rho,0)=\phi(\rho,2\pi)$)

però i punti in cui le cose vanno male formano un insieme trascurabile in $\mathbb{R}^2$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}}\,d\rho\right)d\theta = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{\rho^{2\alpha-1}} \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha\ge 1 \\ \frac{\pi}{1-\alpha} & \text{se } \alpha<1 \end{cases}$$

$$2\pi\left[\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{2-2\alpha}$$

(si vede cosa succede anche se $\alpha<\frac{1}{2}$, cosa che prima non era chiaro)

Esempio

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{\{(\rho,\theta)\,:\,\rho\ge 0,\ 0\le\theta\le 2\pi\}} e^{-\rho^2}\cdot\rho\ d\rho\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{+\infty}\rho\, e^{-\rho^2}d\rho\right)d\theta = \pi\int_0^{+\infty} e^{-\sigma}\,d\sigma$$

$\rho^2=\sigma$

$2\rho\,d\rho = d\sigma$

$$:= \pi \left[-e^{-\sigma} \right]_0^{+\infty} = \pi .$$

Notiamo che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\,dy =$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) dx =$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi$$

DUNQUE $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Più in generale, $a > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2} dx = \qquad t = \sqrt{a}\,x \qquad dx = \frac{dt}{\sqrt{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{a}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

· Spazi vettoriali con norme integrali

Prendo un insieme E di $\mathbb{R}^N$ (si pensi a $N=1$, E INTERVALLO)

$\mathcal{L}^1(E) = \{$ funzioni integrabili su $E\}$

$\mathcal{L}^2(E) = \{$ funzioni misurabili con $|f|^2$ integrabile$\}$ ← !

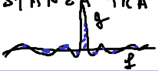
$\mathcal{L}^\infty(E) = \{$ funzioni misurabili limitate quasi ovunque$\}$

($f \in \mathcal{L}^\infty$ se $|f(x)| \leq M$ per quasi ogni x)

Def. Se $f \in \mathcal{L}^1$ / se $f \in \mathcal{L}^2$

$$\|f\|_1 := \int_E |f(x)|\,dx \quad / \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_E |f(x)|^2 dx}$$

Se $f \in \mathcal{L}^\infty$ $\|f\|_\infty = \min\{M : |f(x)| \leq M \text{ q.o.}\}$

$\|f-g\|_1$ MISURA LA DISTANZA TRA f e g MEDIANTE L'AREA DELLA DIFFERENZA  ($\|f-g\|_2$ è simile)

· PROBLEMA $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_\infty$ NON VERIFICANO TUTTE LE PROPRIETÀ DELLA NORMA

(a) $\|f\| \geq 0$ VERA, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ NO

(b) $\|t f\| = |t| \, \|f\|$ VERA

(c) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ VERA

IL FATTO È CHE $\int_E |f(x)|\,dx = 0$ NON IMPLICA $f(x)=0$ $\forall x$

IMPLICA SOLO che $f(x) = 0$ PER QUASI OGNI x (SI VEDE)

Nota che se f fosse continua $\Rightarrow$ $\|f\|_{1,2,\infty} = 0$ IMPLICA $f=0$

ma considerare solo le continue non ci basterà.

SOLUZIONE AL PROBLEMA Devo pensare alle funzioni "definite a meno di quasi ovunque"; per me se $f(x) = g(x)$ per quasi ogni x $f = g$.

· DETTO IN MODO RIGOROSO

$f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ per quasi ogni x ($\sim$ è riflessiva, transitiva e simmetrica)

(cioè $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura nulla)

$L^1 = \mathcal{L}^1/\sim$ gli oggetti di L^1 sono le classi di equivalenza rispetto a $\sim$

per esempio lo zero di $L^1 = \{f \in \mathcal{L}^1 : f(x) = 0 \text{ q.o.}\}$

$L^2 = \mathcal{L}^2/\sim$ $L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\sim$

A rigore dovrei scrivere allora $[f] \in L^1$ dove $f \in \mathcal{L}^1$

intendendo $[f] = \{g : g \sim f\}$, f rappresentante

Se definisco $\|[f]\|_1 = \|f\|_1$ (non dipende dal rappresentante f)

$\Longrightarrow$ $\|\cdot\|_1$ è una norma su L^1

(stesso discorso per $\|\ \|_2$ e $\|\ \|_\infty$). (Di fatto scriveremo f invece di $[f]$)

- Perché è utile considerare L^2?

In L^2 c'è il prodotto scalare

$$< f, g > = \int_E f(x) g(x)\, dx$$

questa espressione gioca lo stesso ruolo del prodotto scalare in $\mathbb{R}^N$.

- $$<\alpha f_1 + \beta f_2, g> = \alpha < f_1, g> + \beta < f_2, g>$$
$$< f, \alpha g_1 + \beta g_2 > = \alpha < f, g_1 > + \beta < f, g_2 >$$

- $$< f, g > = < g, f >$$

- $$< f, f > = \| f \|_2^2$$

IN REALTA' SERVIRÀ CONSIDERARE $f: E \to \mathbb{C}$
(L'integrabilità di una tale funzione si definisce dicendo che $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$ sono int e $\int_E f = \int_E \mathrm{Re}\, f + i \int_E \mathrm{Im}\, f$

· e questo corrisponde a dire che $|f|$ è int.)

Nel caso complesso il prodotto scalare è

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

e si ha:

- $\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle = \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle$

  $\langle f, \alpha g_1 + \beta g_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle f, g_1 \rangle + \overline{\beta} \langle f, g_2 \rangle$

- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

- $\langle f, f \rangle = \| f \|_2^2$

<u>Teorema</u> (Disuguaglianza di Schwartz)

$$| \langle f, g \rangle | \leq \| f \|_2 \cdot \| g \|_2$$

· Allora posso interpretare $\left\langle \frac{f}{\|f\|}, \frac{g}{\|g\|} \right\rangle = \cos(\theta)$ (almeno nel caso reale) e vedere θ come "l'angolo" tra f e g. Se $\langle f, g \rangle = 0$ f e g si dicono ortogonali.