Complementi di Matematica
Quattordicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

3 novembre 2009

Teorema $\quad f : A \times B \to [-\infty, +\infty] \qquad A \subset \mathbb{R}^N, \; B \subset \mathbb{R}^M$

Ipotesi

(a) $\forall x \in A \qquad y \mapsto f(x,y)$ è misurabile su B

(b) $\forall y \in B \qquad x \mapsto f(x,y)$ è continua in $x_0 \in A$

(c) esiste $g : B \to [0, +\infty]$ tale che

convergenza dominata $\to \quad |f(x,y)| \leq g(y) \qquad \forall y \in B \; \forall x \in A$

$\Uparrow$

(basterebbe x vicino a x_0)

(allora $(a)+(c) \Rightarrow \; y \mapsto f(x,y)$ è integrabile $\forall x$)

TESI Posto $F(x) := \int_B f(x,y)\,dy$

F è continua in x_0, cioè si "può scambiare"

$$\lim_{x \to x_0} \int_B f(x,y)\,dy = \int_B \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right) dy \left(= \int_B f(x_0,y)\,dy = F(x_0) \right)$$

NOTA Si tratta di una versione del teorema di Lebesgue in cui al posto di $f_n(y)$ c'è una $f_x(y) = f(x,y)$ e invece di avere $n \to \infty$, c'è $x \to x_0$

Esempio $\quad f(x,y) = x^{\alpha} e^{-xy} \qquad \alpha > 0$ PARAMETRO

$A = [0,+\infty[\quad B = [0,+\infty[$

Le ipotesi (a) e (b) sono verificate – Vale in effetti

Fatto Se f è continua $\Rightarrow$ f misurabile. Vediamo se vale la (c) – anzi vediamo per quali α ciò accade.

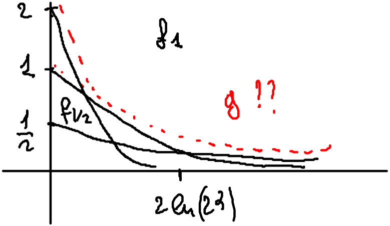
Per capire se esiste $g(y)$ tale che $f(x,y) \leq g(y) \ \forall x$

vediamo quanto fa

$$\boxed{\max_{x \geq 0} f(x,y) \qquad \text{a } y \text{ fissato}}$$

$$f_x(y) = x^\alpha e^{-xy}$$

Riesco a trovare $g(y)$ con $g(y) \geq f_x(y) \quad \forall x \geq 0$



$$g(y) = \frac{C_\alpha}{y^\alpha}$$

$$f_x(0) = x^\alpha, \quad \lim_{y \to +\infty} f_x(y) = 0, \quad f_0(y) = 0 \quad \forall y$$

$$e^{-y} = \frac{1}{2^\alpha} e^{-\frac{y}{2}} \iff e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2^\alpha} \iff -\frac{y}{2} = \ln\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)$$

$$\max_{x\geq 0} x^\alpha e^{-xy}$$

faccio la derivata rispetto a x e faccio il grafico di

$x \mapsto f(x,y)$ a y fissato

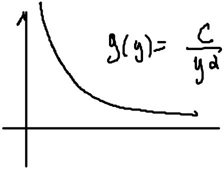
$f(0,y) = 0$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x,y) = 0$ se $y>0$

(mentre se $y=0$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x,y) = +\infty$)

$$\frac{d}{dx} f(x,y) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-xy} - y x^\alpha e^{-xy} = x^{\alpha-1} e^{-xy}(\alpha - yx)$$

$$\frac{d}{dx} f(x,y) = 0 \iff \boxed{x = \frac{\alpha}{y}} \longrightarrow f\left(\frac{\alpha}{y}, y\right) = \frac{\alpha^\alpha}{y^\alpha} e^{-\alpha} = \frac{C_\alpha}{y^\alpha}$$

· Per quali α $g(y)$ è integrabile su $[0,+\infty]$ $(g(0)=+\infty)$

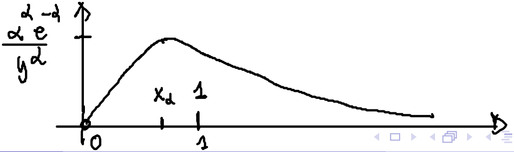


MAI ?? In effetti NON TROVO UNA g che funzioni per tutte le $x \geq 0$.

Però se voglio applicare il teorema per $x \to 0$, MI BASTA TROVARE $g(y)$ tale che $f(x,y) \leq g(y)$ $\forall x \in [0,1]$

mi basta $\max_{0 \leq x \leq 1} x^\alpha e^{-xy} = ?$

Il calcolo fatto prima ci permette di fare il grafico di $x \to x^\alpha e^{-xy}$

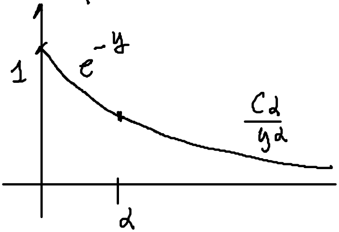


NE DEDUCO CHE

$$\max_{0\le x\le 1} x\, e^{-xy} = \begin{cases} \dfrac{C_\alpha}{y^\alpha} & \text{se } \quad x_\alpha \le 1 \iff y \ge \alpha \\ e^{-y} & \text{se } \quad y \le \alpha \end{cases}$$

$\left(x_\alpha = \dfrac{\alpha}{y} \qquad x_\alpha \le 1 \iff \alpha \le y \right)$. Dunque la

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{C_\alpha}{y^\alpha} & \text{se } \; y \ge \alpha \\ e^{-y} & \text{se } \; y \le \alpha \end{cases}$$



È INTEGRABILE TALE g ??

<u>LO È</u> se e solo se $\alpha > 1$. Quindi posso applicare il teorema (nel caso di $x \to 0$) solo se $\alpha > 1$.

• QUINDI SE $\alpha > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-xy}\,dy = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} e^{-xy}\,dy = 0$$

VICEVERSA SE $\alpha \leq 1$, facendo il calcolo, si trova

$$x^{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dy = x^{\alpha}\left[\frac{e^{-xy}}{-x}\right]_0^{+\infty} = x^{\alpha-1},$$ da cui si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-xy}\,dy = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases} \neq 0$$

(abbiamo fatto una "verifica" del funzionamento del Teorema)

· Completiamo il teorema, considerando anche la derivabilità di $F(x) = \int_B f(x,y)\,dy$

(posso derivare sotto il segno di integrale ?!)

<u>Teorema</u> (continuazione) Se si ha, oltre alle ipotesi di prima

(a1) $y \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ è misurabile $\forall x$ ($\forall x$ vicino a x_0)

(b1) $x \mapsto f(x,y)$ è derivabile per $\forall x$ ($\forall x$ vicino a x_0)

(c1) $\left| \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right| \leq g_1(y)$ con g_1 integrabile, $\forall y$ $\forall x$ ($\forall x$ vicino a x_0)

$$\Rightarrow \quad F'(x_0) = \int_B \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y)\,dy$$

· Nell'esempio di prima, per quali α la

$$F(x) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-xy}\, dy \quad \text{è derivabile in } x=0 \text{ ?!}$$

Lo è se $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ è maggiorata da una g_1 integrabile

In questo caso $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \alpha x^{\alpha-1} e^{-xy} - y x^{\alpha} e^{-xy} =$

$x^{\alpha-2} e^{-xy} (x\alpha - y)$. Vorrei

$$x^{\alpha-2} e^{-xy} |x\alpha - y| \leq g(y) \qquad \forall y \quad \forall x \in [0,1]$$

Riesco a farlo se $\alpha > 2$ (ESERCIZIO — fare come prima

calcolando $\max_{0 \leq x \leq 1} (\circledast) =: g(y)$

· Esercizio $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{(1+nx^2)^2}$ (20/11/2006)

· Convergenza puntuale di $\{f_n\}$? DIPENDE DA X

$x=0 \quad f_n(0) = 1 \to 1$

$x \neq 0 \quad f_n(x) \to 0$

Posto $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$f_n \to f$ PUNTUALMENTE

NON POSSONO CONVERGERE UNIFORMEMENTE SU $\mathbb{R}$ / SU $[a,b] \ni 0$

DATO CHE f È DISCONTINUA IN $x=0$

(la risposta alla domanda (b) è NO)

· Convergenza uniforme su $[1,2]$??

$\Longleftrightarrow$ $f_n \to 0$ UNIF. su $[1,2]$ (dato che il limite, se esiste, deve essere il limite puntuale, e cioè zero)

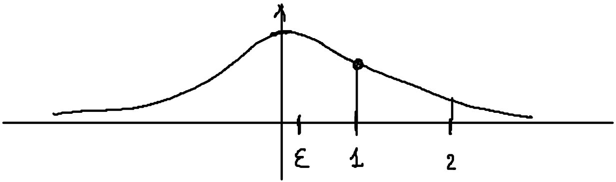
$$\Longleftrightarrow \max_{1 \le x \le 2} |f_n(x)| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Quanto fa $\|f_n\|_\infty = \max_{1 \le x \le 2} |f_n(x)|$?!

Studiamo $f_n(x)$:

- $f_n(x)$ è pari , $f_n(0) = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$
- $f_n'(x) = \dfrac{-2(1+nx^2)\,2nx}{(1+nx^2)^4}$; fa zero solo in $x=0$
  <0 per $x>0$ / >0 per $x<0$

•



$$\Rightarrow \max_{1 \leq x \leq 2} |f_n(x)| = f_n(1) = \frac{1}{(1+n)^2}$$

Dato che $\frac{1}{(1+n)^2} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Longrightarrow f_n \to 0$ UNIF.

• Passo a studiare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+nx^2)^2}$

conv. puntuale si ha per $x \neq 0 \Leftrightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+nx^2)^2}$

S è definita per $x \neq 0$ (IMPOSSIBILE LA CONV. UNIF. VICINO A ZERO)

· IN GENERALE SE $\sum f_n$ CONV. UNIF. SU $A \Rightarrow f_n \to 0$ UNIF. SU A (la domanda (d) ha risposta NO)

Conv. unif. della serie su $[1,2]$ posso usare la conv. totale, cioè verificare se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[1,2]} < +\infty \iff \sum_{n=0} \frac{1}{(1+n)^2} < +\infty$$

$\boxed{SÌ}$: $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{1}{(1+n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

OPPURE SI PUÒ DIRE $\dfrac{1}{(1+n)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ per $n \geq 1$

$\Rightarrow$ la prima serie è conv. dato che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

ATTENZIONE: La conv. unif. su $]a,b[$ è la stessa cosa della conv. unif. su $[a,b]$, nell'ipotesi che le f_n siano continue su $[a,b]$

infatti $\sup_{a<x<b} |f_n(x)| = \max_{a\leq x\leq b} |f_n(x)|$

CIOÈ Se f_n sono continue su $[a,b]$

f_n CONV. UNIF. SU $]a,b[\iff f_n$ conv. unif. su $[a,b]$

NON C'È NESSUN VANTAGGIO A CONSIDERARE $]a,b[$

Se ho dei problemi in $[a,b]$ devo prendere $[a_1,b_1] \subset]a,b[$

• Nel caso che stiamo considerando $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+nx^2)^2}$

posso dimostrare che $f_n \to 0$ UNIF. SU $[\varepsilon, +\infty[$

qualunque sia $\varepsilon > 0$ e pure

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONV. TOTALMENTE ($\Rightarrow$ UNIF.) su tali $[\varepsilon, +\infty[$

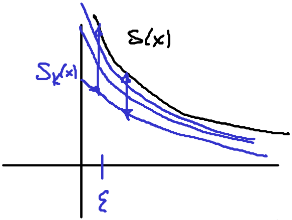
Infatti $\|f_n\|_{\infty, [\varepsilon, +\infty[} = f_n(\varepsilon) \quad \forall n$

$$= \frac{1}{(1+\varepsilon^2 n)^2} \qquad \left(e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon^2 n)^2} < +\infty \right)$$

$$\Rightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+nx^2)^2} \text{ è continua su }]0, +\infty[$$

NON PUÒ ESSERE CHE $\max_{x \in \mathbb{R}} \Big| S(x) - \underbrace{\sum_{n=0}^{k} f_n(x)}_{S_k(x)} \Big| \xrightarrow{k \to \infty} 0$

"MORALMENTE" $S(x) \to +\infty$ se $x \to 0$



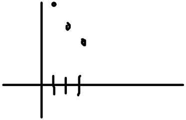
Vediamo che "$\lim_{x \to 0} S(x) = +\infty$"

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+nx^2)^2} \; ; \quad S\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{n^2}\right)^2} \geq$$

$$\sum_{n=0}^{n^2} \frac{1}{\left(1+\frac{n}{n^2}\right)^2} \geq \sum_{n=0}^{n^2} \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} n^2 \to +\infty$$

, se $n \to +\infty$

$$\Longrightarrow \quad S\left(\frac{1}{n}\right) \to +\infty \quad \text{se } n \to +\infty$$



CON UN PO' DI PAZIENZA SI VEDE CHE $S(x) \to +\infty$

se $x \to 0$ (- - -)

$$S(x) \geq \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{x^2}\right]} \frac{1}{(1+nx^2)^2} \geq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x^2}\right] \to +\infty$$

se $x \to 0$

(3) Serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n\, 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{-z}{2}\right)^n$$

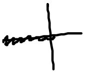
Basta studiare $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ e poi $f(z) = g\left(-\frac{z}{2}\right)$

Studio g. $R = 1$ $\quad \left(\sqrt[n]{n} \to 1\right)$

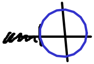
$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z} \qquad (m = n-1)$$

$$g(z) = \int_0^z \frac{1}{1-w}\, dw + \underbrace{g(0)}_{=0} = \Big[-\ln(1-w)\Big]_0^z = \ln \frac{1}{1-z}$$

determinazione princip.



$\ln(z)$



$l(1-z)$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \ln\left(\frac{1}{1+z/2}\right) = \ln\left(\frac{2}{2+z}\right) \qquad \forall\, |z|<2$$

$$\left(|-z/2| < 1 \iff |z| < 2 \right)$$

(4) $f(x+iy) = e^{x+2iy}$ è olomorfa **NO**

VEDIAMO se valgono le C.R.

$$f(x+iy) = \underbrace{e^{x}\cos(2y)}_{f_1(x,y)} + i\,\underbrace{e^{x}\sin(2y)}_{f_2(x,y)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y) = e^{x}\cos(2y) \qquad \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) = e^{x}\sin(2y) \qquad \text{NO}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) = -2e^{x}\sin(2y), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y) = 2e^{x}\cos(2y)$$

(c'è un 2 di troppo!!)

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\,dx$

Passo a $\displaystyle (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{ix}}{x(1+x^2)}}_{f(x)}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i) + \pi i \operatorname{Res}(f, 0)$

$f(x)$ ha tre poli semplici $\pm i$, 0

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{z(z+i)}\right|_{z=i} + \pi i \left.\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right|_{z=0} =$$

$$= \frac{2\pi i\, e^{-1}}{i(2i)} + \pi i \frac{1}{1} = \frac{\pi}{e \cdot i} + \pi i = i\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow (v.p.)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x(1+x^2)}\,dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\,dx = \pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$f_n(x) = x\, e^{-n^2x^2}$$

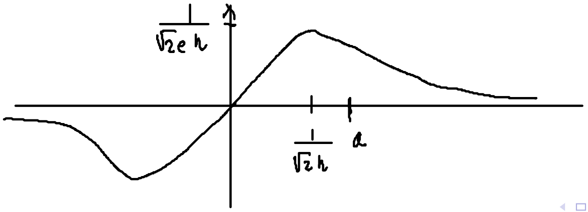
Studio di $f_n(x)$

- $f_n(0)=0 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f_n(x)=0 \qquad (n \geq 1,$ mentre $f_0(x)=x)$

f_n dispari.

$$f_n'(x) = e^{-n^2x^2} - x\, 2n^2 x\, e^{-n^2x^2} = e^{-n^2x^2}\left(1-2n^2x^2\right)$$

$$f_n'(x) = 0 \iff x \pm \frac{1}{\sqrt{2}\,n} \quad ; \quad f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}\,n}$$



• LIMITE PUNTUALE

$$\lim_{n \to +\infty} x e^{-n^2 x^2} = 0 =: f(x)$$

• LIMITE UNIF. $\max_x |f_n(x) - f(x)| = \max_x f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2e}\; n} \to 0$

O.K. CONV. UNIF.

PASSIAMO ALLA SERIE:

• CONV PUNTUALE

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x e^{-n^2 x^2}$$

se $x = 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$

se $x \neq 0$ $x \sum e^{-n^2 x^2} < +\infty$.

(RADICE o RAPPORTO)

$\Rightarrow$ CONV. PT. SU $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $F(x)$ È BEN DEFINITA $\forall x \in \mathbb{R}$

· CONV. UNIF ? PROVIAMO LA CONV. TOTALE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2e}\, n} = +\infty$$ NON VIENE

PERO' PER LE DOMANDE BASTA LA CONV. UNIF. SU OGNI $[a,+\infty[$; in tal caso $\|f_n\|_\infty = f_n(a)$, se fonde $a>0$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sum_{n=0}^{\infty} a\, e^{-n^2 a^2} < +\infty$$ (GIÀ VISTO se $x=a$)

$\Rightarrow$ CONV. UNIF. SU $[a,+\infty[$ $\Rightarrow$ CONTINUITÀ SU $[a,+\infty[$

PER LA DERIVABILITÀ SI FA IN MODO ANALOGO :

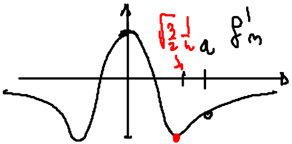
$$f'_n(x) = e^{-n^2x^2}(1-2n^2x^2) \qquad \text{Fisso } a>0$$

Cerco $\displaystyle\max_{x\geq a} |f'_n(x)|$.

Studio $f'_n(x)$. $\quad f'_n(0)=1, \quad f'_n(\infty)=0$

$$f''_n(x) = -2n^2x\,e^{-n^2x^2}(1-2n^2x^2) + e^{-n^2x^2}(-4n^2x) =$$
$$x\,e^{-n^2x^2}(-2n^2+4n^4x^2-4n^2) = n^2x\,e^{-n^2x^2}(4n^2x^2-6)$$

si annulla se $x=0$, $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{n}$



COMUNQUE $\displaystyle\max_{x\geq a} |f'_n(x)| = |f'_n(a)|$

$$\cdot = n^2 a(4n^2a^2-6)\,e^{-n^2a^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} < +\infty$$

RENDE
TUTTO SOMMABILE (CRITERIO RAPPORTO)

Proviamo a fare $\|f_n'\|_{]0,+\infty[,\infty} = \max_{x>0} |f_n'(x)| =$

$$= f_n'\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,\tfrac{1}{n}\right) = -e^{-\frac{3}{2}}\left(1-\cancel{2}\cancel{n^2}\,\tfrac{3}{\cancel{2}}\,\tfrac{1}{\cancel{n^2}}\right) = 2\,e^{-\frac{3}{2}}$$

$$e^{-n^2x^2}(1-2n^2x^2)$$

Da questo si vede che f_n' NON CONVERGE UNIF.

Infatti se $f_n' \to g \Rightarrow f$ è derivabile e $f' = g$

$\Rightarrow g = 0 \Rightarrow \|f_n'\|_\infty \to 0$ INVECE NO

- TANTOMENO PUÒ ESSERE UNIF. CONV. LA SERIE $\sum f_n'$

IN EFFETTI SE FACCIO $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n' \| = \sum_{n=0}^{\infty} 2e^{-3/2} = +\infty$

Se mi metto su $[e, +\infty[$ TUTTO TORNA

$\Rightarrow$ $F(x)$ è derivabile su $]0, +\infty[$