Complementi di Matematica
Tredicesima lezione

prof. Claudio Saccon

Dipartimento di Matematica Applicata, Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: **http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html**
Ricevimento: ogni **lunedì, dalle 8.30 alle 11.30**

2 novembre 2009

Integrazione secondo Lebesgue

Misura di un insieme (area/volume ...)

- Misura di un rettangolo = base × altezza (in due dimensioni)

In generale se $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdots (b_N - a_N).$$

Se A è un insieme generico di $\mathbb{R}^N$, cerco di approssimarlo mediante unione di rettangoli

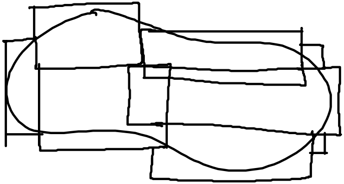
- "Linee guida"

- misura dei rettangoli
- misura dell'unione = somma delle mis. se gli oggetti non si intersecano.
- i lati di un rettangolo hanno mis = 0

- Approccio tradizionale (Riemann), uso un numero FINITO DI rettangoli, da dentro e da fuori

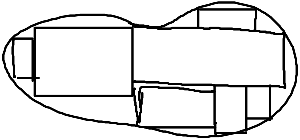
$A \subset \mathbb{R}^N$

A limitato



$$m^*_R(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} m(R_i),\ R_i \text{ rettangoli},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i \right\}$$

$$m_{*,R}(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} m(R_i'),\ R_i' \text{ rettangoli, disgiunti},\ \bigcup_{i=1}^{m} R_i' \subset A \right\}$$



· Def. A si dice misurabile secondo Peano se

$$m_{*,R}(A) = m^*_R(A)$$

(nota che in generale $m^*_R(A) \geq m_{*,R}(A)$ – si può dimostrare). In questo caso chiamo misura di A

$$m_R(A) = m^*_R(A) = m_{*,R}(A)$$

Fatto Ci sono insiemi non misurabili: in $N=1$

$$A = \{ x : 0 \leq x \leq 1 , \; x \in \mathbb{Q} \} = \{\text{numeri razionali tra } 0 \text{ e } 1\}$$

$$m^*_R(A) = 1 \qquad\qquad m_{*,R}(A) = 0$$

(qualunque intervallo $[a,b]$ contiene sia razionali che irrazionali.

· Alla nozione di misura è associata la nozione di integrale . . .

PROBLEMI della costruzione fatta sopra

- Mancanza di stabilità per passaggio al limite

Può succedere che (E_n) sia una successione di insiemi misurabili, che $E_n \subset E_{n+1}$, ma che $E := \bigcup E_n$ non sia misurabile.

Per esempio, supponiamo che (q_n) sia in $[0,1]$ una successione che esaurisca tutti i numeri razionali. Allora

$E_n = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ = insieme fatto da $n+1$ punti

$\Rightarrow$ E_n è misurabile e ha misura zero.

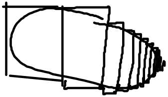
Ma $E = \bigcup E_n = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ non è misurabile.

SI RENDE NECESSARIA UNA DEF. DI MISURA PIÙ GENERALE

- La differenza con l'approccio precedente consiste nella possibilità di considerare unioni infinite di rettangoli.

Def. $A \subset \mathbb{R}^N$ (qualunque)

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} m(R_n) \, , \, R_n \text{ rettangoli}, \; A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n \right\} \in [0, +\infty]$$



Def $A \subset \mathbb{R}$ si dice misurabile se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; U, K$ tali che U aperto, K chiuso $K \subset A \subset U$ e

$$m^*(U \setminus K) < \varepsilon$$

In tal caso $m(A) := m^*(A)$

· Fatti che seguono dalla def.

- Se A_n è una succ. di insiemi misurabili allora $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \Rightarrow A$ è misurabile. $m(A) \le \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n)$

  Inoltre se $A_n \cap A_m = \emptyset$

  $$m(A) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n)$$

- Se (A_n) sono mis. $\Rightarrow A := \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ è mis.

- Se A, B sono mis $\Rightarrow A \setminus B$ è mis.

[Conseguenza Ogni insieme numerabile è misurabile e ha misura nulla.]

- Se $m^*(A) = 0 \Rightarrow A$ misurabile (e ha misura nulla)

Def. Se $m^*(A) = 0$ dico che A è trascurabile

• se A_n misurabili, $A_n \subset A_{n+1}$ $\Longrightarrow$ (successioni crescenti di insiemi)

$$m\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

• se A_n mis., $A_{n+1} \subset A_n$, $m(A_0) < +\infty$

$$\Longrightarrow m\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

(succ. decr. di insiemi)

<u>Def.</u> (INTEGRALE). $f : \mathbb{R}^N \to [-\infty, +\infty]$

<u>CASO $f \geq 0$</u>

(1) Dico che f è misurabile se

$Epi(f) = \{(x,y) : 0 \leq f(x) \leq y\}$ è mis. in $\mathbb{R}^{N+1}$

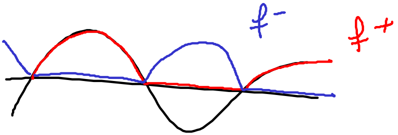
(2) Chiamo integrale di f la misura di $epi(f) \in [0, +\infty]$

- Indico l'integrale con $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx$ — NOTA che tale integrale esiste sempre se $\underline{\underline{f \geq 0}}$, misurabile, eventualmente $+\infty$.

CASO GENERALE

(1) Dico che f è misurabile se f^+ e f^- sono mis.

dove $f^+(x) = \max(f(x), 0)$, $f^-(x) = (-f(x))^+$



$$\left(f = f^+ - f^- ,\ |f| = f^+ + f^- \right)$$

(2) Dico che $\underline{f \text{ è integrabile}}$ se $\int_{\mathbb{R}^N} f^+ < +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}^N} f^- < +\infty$; in tal caso definisco

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x)^-\,dx$$

· INOLTRE se A misurabile e $f: A \to [-\infty, +\infty]$ introduco la misurabilità e l'integrale per f considerando

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

$$\int_A f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)\,dx$$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI.

- Linearità: Se f, g misurabili/integrabili $\Longrightarrow$ $f+g$ è mis./int. e

$$\int_{\mathbb{R}^N} f+g = \int_{\mathbb{R}^N} f + \int_{\mathbb{R}^N} g \qquad \text{(quando ha senso)}$$

se $c \in \mathbb{R}$ $\qquad \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (cf) = c\int_{\mathbb{R}^N} f$

- Se (f_n) è una succ. di funzioni misurabili e se $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x$ (convergenza puntuale) $\Rightarrow$ f misurabile.

<u>Teorema</u> (di Lebesgue). $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$

Se (f_n) è una successione di funzioni integrabili.

Se $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in A$.

Se esiste $g : A \to [-\infty, +\infty]$, g integrabile e tale che

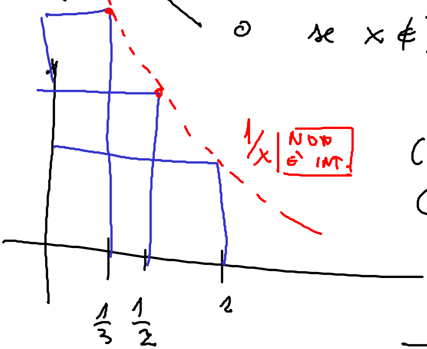
$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \forall x$$

allora

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_A f_n(x)\,dx$$

Controesempio se manca la "cond. dominata"

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{se } x \in]0, 1/n] \\ 0 & \text{se } x \notin]0, 1/n] \end{cases}$$



Se fisso x due casi →

(1) $x \le 0 \Rightarrow f_n(x) = 0 \to 0$

(2) $x > 0$; oltre primo o poi

$n > \frac{1}{x} \iff \frac{1}{n} < x \Rightarrow$

$f_n(x) = 0$

$\Longrightarrow \quad f_n(x) \longrightarrow 0$

PERÒ

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n \, dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\to 0$$

NON SI PUÒ PASSARE AL LIMITE SOTTO IL SEGNO DI INTEGRALE

· <u>Oss.</u> Il teorema di Lebesgue generalizza il risultato già visto con la conv. unif.

Se $f_n \to f$ UNIF. su $[a,b]$ $\Longrightarrow$ $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$

Infatti se $f_n \to f$ UNIF. su $[a,b]$ esiste una costante M tale che

$$|f_n(x)| \leq M$$

Posto $g(x) = M$, g è integrabile su $[a,b]$ $\Longrightarrow$ ottengo il risultato usando Lebesgue.

· Versione "continua"

Se $f(x,y)$ $\quad f : A \times B \to [-\infty, +\infty]$, $A \subset \mathbb{R}^N$, $B \subset \mathbb{R}^M$.

$(x \in A$ e $y \in B)$ $\quad x_0 \in A$

SUPPONIAMO CHE

- $\forall x \in A \quad y \mapsto f(x,y)$ INTEGRABILE SU B
- $\forall y \in B \quad x \mapsto f(x,y)$ CONTINUA IN x_0
- $\exists\, g : B \to [-\infty, +\infty]$, tale che $|f(x,y)| \leq g(y) \ \forall x$

$\Rightarrow$ Posto $F(x) = \boxed{\int_B f(x,y)\,dy}$, allora F è continua in x_0

Controesempio $\qquad f(x, y) = x\, e^{-xy}$

continua in tutte le variabili, $f(0, y) = 0$. Sia $x > 0$

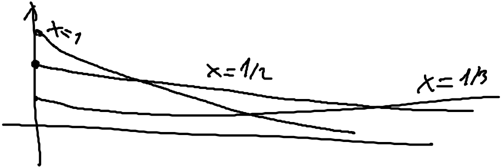
$$\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dy = x \int_0^{+\infty} e^{-xy}\, dy \qquad t = xy$$

$$y = \frac{t}{x} \quad dy = \frac{dt}{x} \quad \longrightarrow \cancel{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{\cancel{x}} = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1$$

NON TENDE A $\int_0^{+\infty} f(0, y)\, dy$

NON SI RIESCE A TROVARE LA $g(y)$

$f(y)$



• Se invece: $\alpha > 0$

$$f(x,y) = x^\alpha e^{-xy}$$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-xy}\, dy = \qquad \left(xy = t,\ dy = \frac{dt}{x}\right.$$

$$\frac{x^\alpha}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = x^{\alpha-1} \longrightarrow 0 \quad \text{se } \alpha > 1$$

<u>IN EFFETTI</u> SE $\alpha > 1$ riesco a trovare una $g(y)$ tale che $x^\alpha e^{-xy} \leq g(y)$ $\forall x \in [0,1]$

e $\int_0^{+\infty} g(y)\, dy < +\infty$

per esempio $x^2 e^{-xy} \leq g(y)$??

(DOMANI)